



# ТЕНЗОРНЫЙ МЕТОД ДВОЙСТВЕННЫХ СЕТЕЙ А.Е. ПЕТРОВ

Действительный член РАЕН, доктор технических наук, профессор кафедры Системного анализа и управления Университета природы, общества и человека «Дубна», главный редактор бюллетеня «Банки и Финансы».

Автор более 420 работ, включая три монографии.

Профессиональные интересы связаны с развитием тензорного метода исследования сложных систем, включая экономические системы и проблемы управления устойчивым развитием, исследованию двойственности систем с перемещаемой структурой.

Андрей Евгеньевич Петров, родился в 1948 году в городе Могилев.

В 1973 г. окончил МИФИ по специальности «Экспериментальная ядерная физика» и в 1973-1996 гг. работал на кафедре Киселевского.

В 1974-1978 гг. вместе с В.И. Хрипуновым перевел на русский язык фундаментальную работу Г. Круна «Тензорный анализ систем» (под редакцией П.Т. Кузина и П.Г. Кузнецова).

В 1985 г. защитил кандидатскую диссертацию «Тензорный метод расчета сложных систем (на примере балансового планирования)». В том же году опубликовал книгу «Тензорный методологии в теории систем».

С 1988 г. работы по исследованию сложных систем, включая проблемную экономическую систему, на основе тензорного метода Круна, под руководством П.Т. Кузнецова. Член Оргкомитета Международных симпозиумов «Просперность и время» в эволюции проблемной системы природа-общество-человек» 2001 и 2002 гг., посвященных имени П.Т. Кузнецова.

В 1986-1990 гг. разработка алгоритмов расчета сетей и сетевых моделей сложных систем по частям тензорными методами для лавинных расчетов, в интересах НИИР по созданию системы управления страной при изменении внешних условий.

В 1974-1991 гг. секретарь семинара «Искусственный интеллект» П.Т. Кузина в МДНТТИ им. Ф.Э. Дзержинского, а также ряда семинаров «Интеллектуальные банки данных».

В 70-х гг. изучал историю строительства логических машин в России. К этой работе автора приложил Г.Н. Певарю, который прислал название двух вариантов его книги «Теория систем Круна» (не разшифры опубликовать по соображениям политической конъюнктуры) и «Тензорная методология в теории систем». 1985. Г.Н. Певарю и В.А. Вениско рекомендовали автору написать книгу о тензорном методе Круна.

В 1975-1996 гг. разработал тензорный метод двойственных сетей на основе нового инварианта изменения структуры (фракционный скачок закон сохранения потока энергии). В 1993-1996 гг. окончил докторантуру МИФИ и в 1998 г. защитил докторскую диссертацию «Тензорный метод двойственных сетей».

Опубликовал ряд статей по применению информатических и финансовых инструментов для достижения политических целей, а также, в соавторстве, книгу Арменский А.Е., Гусев В.С., Петров А.Е. Информационная и экономическая безопасность государства. Учебно-методическое пособие для государственных служащих, 2003.

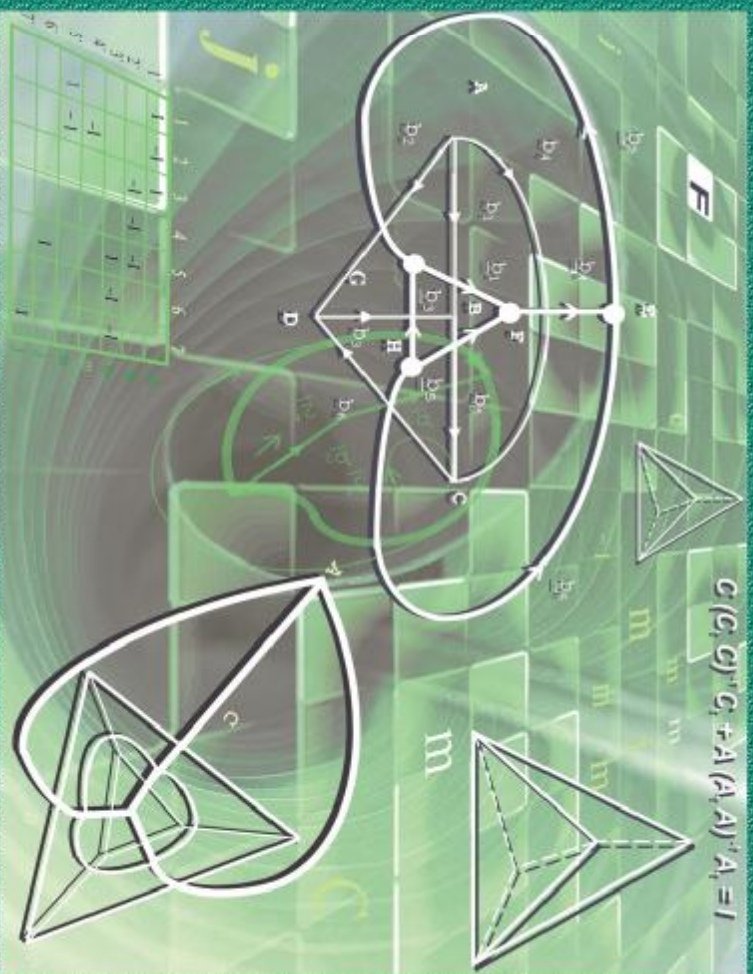
С 1995 года издает бюллетень «Банки и Финансы» (ИД «Мобилит»), база данных которого стала основой ряда информатических продуктов в печатной и электронной форме. В частности ИАС «Банки и финансы», разработанные по заказу Банка России, который содержит более 150 показателей каждого банка за период с 1988 года. На этой основе разработан рейтинг «Динамический финансовый стабильности», расчет которого для каждого банка позволяет представить емкостный индекс состояния банковской системы России в целом. Результаты отражены в книге Карамиский А.М., Переселский А.А., Петров А.Е. Рейтинги в экономике (методология и практика), 2005.

В последние годы издал в серии «Ряд очерков посвящен первооткрывателям пещер Кавказа, высотными восхождениям, лыжным караваном. Дважды вице-чемпион СНГ по альпинизму. Записки Лобова, 7439 и 1999 год и пик Кенгур-Тек, 7719 (Китай), 2004 год. Имеет двинца «Снежный барс» по альпинизму, дважды «Медведь Мондиберт Кавес» за 20 индивидуальных лыжных маршрочов.

## ТЕНЗОРНЫЙ МЕТОД ДВОЙСТВЕННЫХ СЕТЕЙ

А.Е. ПЕТРОВ

### ТЕНЗОРНЫЙ МЕТОД ДВОЙСТВЕННЫХ СЕТЕЙ



Москва 2007

**Международный университет природы, общества и человека «Дубна»  
(кафедра системного анализа и управления)**

Андрей Евгеньевич ПЕТРОВ

## **ТЕНЗОРНЫЙ МЕТОД ДВОЙСТВЕННЫХ СЕТЕЙ**

Москва 2007

Интернет-версия Москва 2009

**ББК 32.817в631**  
**П 30-5**

Петров А.Е.

П 30-5 Тензорный метод двойственных сетей / А.Е. Петров – М.: ООО «Центр информационных технологий в природопользовании» 2007. – 496 с.: ил.  
**ISBN 5-9751-0036-4**

Изложены методологические, научные, математические основы тензорного метода двойственных сетей, который обеспечивает моделирование, расчет и анализ поведения сложных технических и социально-экономических систем с переменной структурой. Математической основой является пространство структуры замкнутых и разомкнутых путей, которые взаимно дополняют друг друга в двойственных сетях, обеспечивая сетевое моделирование открытых и замкнутых систем. Тензорные (измеримые) величины при изменении структуры преобразуются линейно, с помощью матриц преобразования путей.

Преимущества метода создает новый инвариант двойственных сетей. Он выражается в постоянстве суммы метрических тензоров двойственных сетей при изменении структуры. В электрических цепях инвариант выражается в постоянстве суммы рассеиваемых мощностей двух двойственных цепей. Двойственность разрешает противоречия, связанные с постулатом об инварианте мощности Крона. В физическом пространстве инвариант проявляет себя как закон сохранения потока энергии, обладая фундаментальными свойствами.

Практическим следствием метода являются алгоритмы расчета сетей и сетевых моделей с переменной структурой. Это позволяет рассчитать поведение системы при изменении связей, включая разрывание на части. Взаимные воздействия при разрывании (или наложении) связей отражаются в двойственной сети. Расчет сложной системы по частям можно выполнить с применением параллельных вычислений, используя многопроцессорные вычислительные комплексы.

Метод применяется для сетевого моделирования межотраслевого баланса потоков продуктов и денежных средств хозяйственной системы. Это обеспечивает анализ и прогноз структурных изменений хозяйственных связей для управления устойчивым развитием экономических и социальных систем. Сетевые модели применяются для анализа деятельности банков и предприятий, создания методики рейтинга динамической финансовой стабильности, а также для расчета параметров массообмена объектов нефтепереработки.

Материалы книги легли в основу курса «Математические методы и компьютерные технологии в управлении обществом». Курс читается в Государственном университете Природы, общества и человека «Дубна» студентам кафедр САУ и Устойчивого инновационного развития.

Для исследователей и разработчиков сложных систем, специалистов по управлению социально-экономическими системами, аналитиков, широкого круга специалистов технических и естественнонаучных вузов, а также для аспирантов и студентов.

**ББК 32.817в631**  
**П 30-5**

**ISBN 5-9751-0036-4**

© Петров А.Е., 2007  
© Оформление. ООО «ЦИТиП», 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Название раздела	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	4
1. ТЕНЗОРНАЯ МЕТОДОЛОГИЯ В ТЕОРИИ СИСТЕМ	12
1.1. Процессы и структура сложных систем	14
1.1.1. Материя и структура	14
1.1.2. Двойственность структуры сетей и систем	21
1.1.3. Процессы в системе	30
1.1.4. Тензоры для моделирования процессов и структуры	44
1.1.5. Процессы и структура многомерных систем	51
1.2. Тензорный метод исследования систем	55
1.2.1. Состав тензорного метода	55
1.2.2. Тензоры в математике и физике	59
1.2.3. Тензорный метод в технике и экономике	64
1.3. Области применения тензорного метода	72
1.3.1. Применение тензоров в науке и технике	72
1.3.2. Тензорный метод Крона	74
1.3.3. Развитие тензорного метода исследования систем	84
1.4. Технология применения тензорного метода	94
1.4.1. Аналогии между процессами в системах и сетями	95
1.4.2. Аналогии между структурой систем и сетями	102
1.4.3. Построение сетевых моделей сложных систем	105
1.4.4. Технология расчета систем методом двойственных сетей	107
2. ДВОЙСТВЕННЫЕ СЕТИ	112
2.1. Основные понятия сетей	113
2.1.1. Элементы сети	113
2.1.2. Двойственность ветвей в сети	118
2.1.3. Изменение путей при изменении соединения ветвей	125
2.1.4. Топологические параметры двойственных сетей	128
2.2. Пути в сети	132
2.2.1. Свойства путей	132
2.2.2. Преобразования базисов путей в сети	139
2.2.3. Замкнутые и разомкнутые пути	142
2.3. Векторное пространство путей в сети	144
2.3.1. Соответствие путей векторному пространству	144
2.3.2. Ковариантность и контравариантность в пространстве путей	148
2.3.3. Преобразование путей и хромосомы	158
2.4. Двойственные сети	162
2.4.1. Преобразование путей при изменении структуры	162
2.4.2. Ортогональность замкнутых и разомкнутых путей	166
2.4.3. Прямой и взаимный базисы в пространстве сети	170
2.4.4. Определение двойственных сетей	174
2.4.5. Ориентация и двойственность	182
2.5. Метрика и структура двойственных сетей	197
2.5.1. Метрика в геометрии	197
2.5.2. Метрика в сети	200
2.5.3. Преобразования базисов в двойственных сетях	206
2.6. Векторы в пространстве двойственных сетей	210
2.6.1. Векторы-процессы в сети	210
2.6.2. Задача расчета сети и ее инварианты	218
2.6.3. Инвариант пространств с переменной размерностью	224
2.6.4. Преобразования сетей с переменной структурой	226
3. РАСЧЕТ СЕТЕЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СТРУКТУРЫ	230
3.1. Расчет сети при связывании свободных ветвей	232

3.1.1. Воздействия и отклики в двойственных сетях	233
3.1.2. Задача расчета сети	237
3.1.3. Расчеты сетей из свободных ветвей	241
3.1.4. Расчеты сетей из связанных ветвей	244
3.2. Примеры расчета сетей при соединении ветвей	250
3.2.1. Матрицы решения в отсутствии метрики	253
3.2.2. Матрицы решения при наличии метрики	256
3.2.3. Компоненты вектора в сети при отсутствии метрики	261
3.2.4. Компоненты вектора в сети при наличии метрики	277
3.2.5. Проверка решения и законы Кирхгофа	289
3.3. Расчет сети при изменении соединений ветвей	302
3.3.1. Матрица изменений при соединении и разъединении ветвей	302
3.3.2. Матрицы решения при наложении связей	308
3.3.3. Матрицы решения при разрывании связей	312
3.3.4. Эффективность вычислений при изменении структуры	319
3.3.5. Пример расчета матриц решения при изменении структуры	324
3.4. Расчет сложной сети при разделении на подсети	330
3.4.1. Матрица изменений при разделении сети на подсети	331
3.4.2. Матрицы решения при расчетах сетей по частям	338
3.4.3. Алгоритмы расчета сложных сетей по частям	345
3.4.4. Пример расчета сети по частям	350
3.4.5. Изменение величины вектора при изменении структуры сети	361
4. ПОСТОЯНСТВО ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ДВОЙСТВЕННЫХ ЦЕПЯХ	373
4.1. Инварианты двойственных сетей	374
4.1.1. Постулат Крона об инварианте мощности и инварианты двойственных сетей	374
4.1.2. Двойственные сети и электрические цепи	384
4.1.3. Аддитивность мощности в двойственных сетях и цепях	388
4.2. Инвариантность потока энергии в двойственных сетях	392
4.2.1. Квадрат величины вектора и поток энергии в сети	392
4.2.2. Изменение мощности в цепи при изменении структуры	401
4.2.3. Диаграммы изменения мощности в двойственных сетях	412
4.3. Двойственные сети и непланарные графы	419
4.3.1. Непланарность графов и двойственность сетей	419
4.3.2. Расчет сети и двойственной сети графа $K_{3,3}$	421
4.3.3. Расчет сети и двойственной сети графа $K_5$	431
5. ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА СИСТЕМ	451
5.1. Применение сетей для расчета межотраслевого баланса	452
5.1.1. Полная система уравнений межотраслевого баланса	457
5.1.2. Тензорная форма уравнений межотраслевого баланса	461
5.1.3. Сетевая модель межотраслевого баланса	466
5.1.4. Расчет межотраслевого баланса по частям	472
5.1.5. Двойственность потоков продуктов и денежных средств	478
5.1.6. Примеры расчета баланса продуктов по частям	483
5.2. Анализ результатов деятельности банков и предприятий	524
5.2.1. Потоки денежных средств в банках	524
5.2.2. Измеримые показатели и отчетность банков	527
5.2.3. Методика анализа деятельности банков и предприятий	533
5.2.4. Анализ динамики и сетевая модель рейтинга динамической стабильности	539
5.3. Сетевая модель массообмена при нефтепереработке	551
5.3.1. Особенности физического процесса ректификации	551
5.3.2. Аналогии параметров массообмена и сети	555
5.3.3. Тепловой и материальный баланс колонны	558
5.3.4. Сетевая модель процесса ректификации для анализа пожароопасных ситуаций	562
5.3.5. Тепловой и гидродинамический баланс каталитического крекинга углеводородного сырья и регенерации закоксованного катализатора	566
Список литературы	592

*Посвящается Ольге Андреевне Петровой (1974 – 1993).*

*Она наизусть знала звездное небо, но горы Памира оборвали ее земной путь.*

## **ВВЕДЕНИЕ**

Тензорный метод двойственных сетей исследует фундаментальные свойства взаимного влияния материи процессов и структуры связей, как в абстрактном понимании, так и в приложении к изучению сложных систем. Полученные математические результаты применяются для анализа социально-экономической системы с целью управления устойчивым развитием. Управление производством, мониторинг, анализ требует математического моделирования, т.е. представления реально происходящих событий, явлений в экономике, технике, в научных исследованиях с помощью математической теории, математического метода. Свойства двойственности сетей определяют замкнутые и разомкнутые пути, которые превращаются друг в друга при изменении соединений, составляя ортогональные подпространства в структуре.

Фундаментальное значение имеет найденный инвариант преобразования структуры. Его математический смысл состоит в постоянстве суммы метрических тензоров двух сетей с двойственной структурой, базисы подпространств замкнутых и разомкнутых путей которых взаимно дополняют друг друга до полного пространства. Физический смысл инварианта состоит в постоянстве рассеиваемой мощности в двух электрических цепях с двойственной структурой при изменении соединения ветвей. В этом пример проявления *закона сохранения потока энергии* при изменении структуры. Инвариант указывает на необходимость существования двойственной сети для всякой структуры с потоками электромагнитной энергии. Двойственные сети, структуры должны существовать в ненаблюдаемом в настоящее время пространстве, двойственном к наблюдаемому пространству, с которым они составляют одно целое. Теоретическая необходимость существования пространства двойственных сетей позволяет, например, расширить представления о подсознании, и т.д.

Двойственный инвариант стал основой метода расчета сетей при изменении структуры, включая разделение на части. Это позволяет, например, изучать на сетевых моделях последствия структурных изменений в экономических и социальных системах. Более понятной в математическом отношении становится проблема части и целого, разрывания и соединения. Для этого метод математического моделирования, основанный на пространстве состояний, дополняется методом двойственных сетей, который основан на пространстве потоков. Это позволяет исследовать одновременно процессы и структуру моделируемой системы. Для создания тензорных сетевых моделей сложных систем, с реализацией в форме информационных технологий, применяется представление о потоках и

путях их распространения, соответствующее поведению реальных измеримых величин в изменяемой структуре системы.

Для анализа поведения экономической, социальной системы важно количественно оценивать не только текущее состояние, и заданное состояние, в которое она должна перейти спустя определенный промежуток времени. Необходимо определить также те промежуточные состояния, которые должна пройти система между начальным и заданным состояниями. Это обеспечит контроль соответствия реального движения целевым установкам. Это позволит определить тенденции, которые сформируются в развитии системы, и определят ее путь после достижения заданного состояния.

Необходимо оценить поведение составляющих, действия которых складываются в траекторию поведения всей системы. Поведение отдельных частей отличается от поведения тех же частей, соединенных в целое, где части обмениваются между собой воздействиями и потоками. Например, при разделении СССР на части, независимые государства, изменилась только структура. Были разорваны хозяйственные связи, при сохранении сырьевого, промышленного, кадрового потенциала. Однако это привело к падению производства и потребления более чем вдвое. Исследования экономистов показывают, что падение производства в период гражданской войны, а также реформ 90-тых годов, было вызвано в основном разрывом хозяйственных связей. Таким образом, структура играет значительную роль в социальных и экономических системах. Особенно при усложнении связей в технике, политике, обществе и экономике, в условиях глобализации, соединения отдельных стран в единый планетарный хозяйственный механизм.

Для анализа структуры связей в системе необходимо выделить отдельные элементы и определить границы, по которым они могут соединяться или разделяться, осуществлять обмен потоками через эти границы. В технике структура определяется связями устройств для производства и преобразования энергии. В хозяйстве элементами являются технологии, на вход которых поступают исходные компоненты (сырье, ресурсы, поставки смежников), а на выходе продукция, которая отправляется потребителям (смежникам или конечным потребителям). Связи технологий между собой, с сырьевыми потоками и рынком составляют хозяйственную структуру. Систему государства можно разделить по территориальному, отраслевому, социальному признакам.

Для расчета изменений процессов при изменении структуры связей элементов системы; в широком смысле – взаимодействия процессов и структуры, необходим новый математический аппарат. Существующие методы математического моделирования отражают либо процессы (метрические пространства теоретико-множественной топологии),

либо структуру систем (комбинаторная топология). Фундаментальные свойства взаимного влияния материи процессов и структуры исследует тензорный метод двойственных сетей.

Одним из первых обратил внимание на роль структуры в технических системах Габриэль Крон. «Фундаментальными работами по математической теории электрических машин являются работы Г. Крона, который предложил модель и уравнения обобщенной электрической машины» (*Копылов*, 2001, с. 12). Все электрические машины рассматривались как изменения соединений элементов обобщенной машины, т.е. отличались структурой (*Kron*, 1930, 1934, 1942). Затем, на основе электрических цепей, был разработан тензорный анализ сетей (*Крон*, 1978). Следующим шагом стал метод моделирования и исследования сложных систем по частям – диакоптика (*Крон*, 1972, *Хэпп*, 1974). «Удивительно, как мало существует первичных типов элементов, образующих строительные блоки всего разнообразия технических структур... Огромное разнообразие структур отличается только способом соединений..., а многообразие теорий только типом допускаемой системы отсчета» (*Kron*, 1942).

Диакоптику, как метод моделирования в разных областях с помощью эквивалентных электрических цепей и расчета по частям, в 50–60-е годы разработал Крон, а затем развивали другие ученые в США, СССР, Японии, Великобритании. Такие модели Крон применял для расчета электрических машин, сложных цепей, электроэнергетических систем, уравнений Максвелла, Шредингера, Навье–Стокса, строительных конструкций, лопаток турбин, ядерного реактора. В нашей стране построены эквивалентные модели механических подсистем электроприводов, объектов электромеханики (*Кузина*, 1986, 1989), модели межотраслевого баланса (*Петров*, 1985, 1998, 2002), двигателя транспорта на магнитном подвесе (*Сохор*, 1991, 1997), для синтеза технических конструкций (*Кутергин*, 2006), а также в других областях. В 80-тых годах метод разрывания применялся для решения сложных задач на распределенных вычислительных системах (*Котарова*, *Шамаева*, 1979), для организации параллельных вычислений на сетях транспьютеров (*Bowden*, 1988, 1989).

В диакоптике модель системы в виде эквивалентной цепи разделяют на части и рассчитывают их. Решения частей соединяет в целое сеть пересечений, которая состоит из ветвей, связывающих подсети. Расчет по частям этим методом получается *без итераций*. Крон получил алгоритмы расчета по частям для двух частных типов цепей; они не имели общего характера. Отсутствие общности ограничивало возможности применения. В основе тензорного анализа сетей Крона лежал постулат об инварианте мощности при соединении ветвей. Мощность при изменении соединений меняется, постулат стал объектом критики. Указанные проблемы препятствовали развитию и применению тензорного метода.



Тензорный метод двойственных сетей автор разработал не столько для решения этих проблем, сколько из интереса к общим проблемам связи потоков энергии, структуры и двойственности. Сети двойственны, если каждому замкнутому пути (контур) в одной сети соответствует разомкнутый путь в другой сети, и наоборот. Преобразования структуры сетей двойственны, если каждому замыканию разомкнутого пути в одной сети соответствует размыкание контура в другой сети, и наоборот. Сумма замкнутых и сумма разомкнутых путей в двух двойственных сетях постоянна. Матрицы преобразования путей двойственных сетей связывает инвариант, который обеспечивает расчет воздействий и откликов при изменении структуры, и проявляется в постоянстве суммы рассеиваемой мощности при изменении соединений двух электрических цепей с двойственной структурой (Петров, 1985). Таким образом, в результате постулат об инварианте мощности оказался инвариантом для сетей с двойственной структурой, о которых Крон не знал.

Вместе с тем инвариант двойственных сетей имеет более абстрактное значение, чем постоянство мощности, или даже закон сохранения потока энергии. Автор сначала пошел за тензорами для электрических цепей Крона и, отчасти, Хэппа, но пришел к тому, что начинать надо с путей. Сети представляют собой абстрактные объекты, которые можно рассматривать без их отношения к физической реальности. Это чистая структура. Сети состоят из отрезков линий (ветвей или «палок») и точек. Точки на концах линий могут соединять их между собой. По ветвям-палкам можно переходить из одной части сети в другую. Совокупность ветвей образует *путь* из одной точки в другую. Если путь привел в точку начала, то это замкнутый путь, контур. Если не привел в точку начала, то это разомкнутый, открытый путь. Направление ветвей и путей задает плюсы и минусы их ориентации. Это позволяет выражать пути не только через ветви, но и друг через друга. Набор независимых путей составляет базис, определяющий системы координат в структуре.

Замыкание разомкнутого пути превращает его в замкнутый путь. Размыкание замкнутого пути превращает его в разомкнутый путь. Их базисное количество определяется числом узлов-точек в сети с заданной структурой, способом соединения ветвей. Выражение базисов друг через друга обеспечивают матрицы преобразования. Эти матрицы используются для преобразования других величин, что порождает тензорный анализ сетей. Двойственные сети дополняют друг друга до полной сети. Размерности базисов замкнутых и разомкнутых путей каждой сети меняются при изменении структуры, их матрицы преобразования прямоугольные и не образуют группу. Базисы полной сети сохраняют свою размерность при изменении структуры, что обеспечивает линейные, тензорные преобразования двойственных сетей и сетевых моделей предметных областей.

Двойственное и симметричное понимание замкнутых и разомкнутых путей возникло не сразу. «Еще во времена Максвелла электротехники при расчетах использовали понятие замкнутых контуров или ячеек. Однако понятие разомкнутых контуров в те времена не было известно. В начале 30-х годов родоначальник диакоптики Габриель Крон, отыскивая метод, дуальный методу контурных токов, ввел понятие узловой пары. В соответствии с этим понятием переменными считаются разности потенциалов между двумя любыми узлами электрической цепи. Крон сообщил автору, что еще в начале 30-х годов он инстинктивно чувствовал, что разомкнутый контур, названный им потом разомкнутой ячейкой, правильнее считать понятием, дуальным замкнутому контуру, чем узловую пару. Однако в его основополагающих работах дано только определение разомкнутой ячейки» (Хэнн, 1974).

Далее ветвям могут быть приписаны веса, представляющие физическое, материальное содержание элементов системы. Веса определяют метрику пространства сети. Если на сеть накладывается вектор, представляющий поток энергии в системе, то в сети (и двойственной сети) появляются его ковариантные и контравариантные компоненты. Эти компоненты появляются как в ветвях, так и в путях. Для внешних воздействий базисом являются разомкнутые пути, а для внутренних – замкнутые пути. В этом состоит отличие открытых и замкнутых систем.

Метод двойственных сетей обеспечивает преобразование решения для одной структуры системы в решение для любой другой структуры, в том числе при разделении на части. Таким образом, этот метод является обобщением диакоптики. Разделение сети, сетевой модели на подсистемы и расчет по частям снижает объем вычислений. Это позволило создать алгоритмы расчета систем с переменной структурой, которые могут применяться на компьютерах с параллельной архитектурой.

Данный метод обеспечивает построение сетевых моделей, расчет и анализ сложных систем с переменной структурой. Для этого используются аналогии процессов и структуры реальных систем и математических сетевых моделей. Возможны приложения в технике для расчета и анализа: электроэнергетических систем, сетей преобразователей энергии, трубопроводных, транспортных сетей, вариантов компоновки конструкции технических систем. Метод позволяет рассчитать последствия отключения (выхода из строя) элементов или подсистем технической системы, например, нефтеперегонного завода, ядерного реактора, газо- и нефтепроводов, систем электроснабжения с целью снижения опасности возникновения аварийных ситуаций.

Метод обеспечивает моделирование, расчет и анализ экономических систем: изменение объемов производства при изменении хозяйственных связей, включая разделение

экономической системы на части; открытие новых, или ликвидация старых производств. Расчет балансовых задач производства продуктов, потребления поставок и ресурсов для обеспечения спроса (плана). Анализ результатов производственной и финансовой деятельности промышленных предприятий, результатов деятельности банков. Анализ и прогноз вариантов исполнения бюджета, в зависимости от поступления доходов (налогов) при изменении ставок и облагаемых баз.

Соединение анализа процессов и структуры позволяет выявить новые закономерности, получить больше информации о системе, чем требует исходная постановка задачи. Например, при построении сетевой модели межотраслевого баланса появилась возможность расчета не только потоков продуктов, как требовалось первоначально. Модель позволяет также рассчитать воздействия, которые вызывают эти потоки. Их можно трактовать как потоки кредитно-денежных средств, которые должны финансировать объемы производства, обеспечивающие спрос (конечный продукт) и поставки. Это позволяет проводить анализ вариантов развития производства совместно с источниками финансирования, что необходимо для управления устойчивым развитием.

В главе 1 представлены основы тензорной методологии в теории систем. Особенность применения тензорного метода для моделирования и анализа сложных технических, экономических систем состоит в общей технологии представления процессов и структуры, расчете и анализе изменения параметров процессов при изменении структуры, включая разделение системы на подсистемы и соединение подсистем в целое. Рассмотрены аналогии процессов и структуры для построения сетевых моделей различных сложных систем. Представлена технология применения двойственных сетей для анализа технических и экономических систем.

В главе 2 рассмотрены математические основы двойственных сетей. Показано, что пути в сети обладают свойствами векторного пространства. Ветви могут иметь «веса», представляющие метрику (сопротивление «среды»), а пути задают базис системы координат, представляют структуру. В пространстве путей определены скалярное произведение, ортогональность, ковариантность и контравариантность, инварианты двойственных сетей. Показано различие преобразования базисов и векторов при изменении структуры сетей. Представлен новый инвариант, который связывает матрицы преобразования двойственных сетей. При введении метрики инвариант также включает в себя метрические матрицы. Преобразованиям структуры двойственных сетей инвариант обеспечивает групповые свойства. При наложении вектора процесса на пространство сети, групповые свойства

обеспечивают преобразование его компонент (воздействий и откликов) при изменении структуры.

В главе 3 представлены приложения двойственных сетей для расчета сети при изменении структуры: изменении соединений в связанной сети, при разделении сети на части или соединении частей в целое. Получены алгоритмы расчета сети при любых изменениях структуры, двойственные для базисов замкнутых и разомкнутых путей. Это обеспечивает расчет сети по частям с параллельным расчетом подсетей. Решение полной сети получено по решениям подсетей без итераций. Взаимодействие частей отражается в двойственной сети к сети ветвей, составляющих изменяемые пути. Представлены алгоритмы расчета сетей по частям без итераций для организации параллельных вычислений, что повышает эффективность вычислительной техники.

Глава 4 посвящена свойствам инварианта двойственных сетей в электрических цепях. Рассмотрены аналогии между сетями и цепями; представлена неизвестная ранее закономерность постоянства мощности при изменении структуры двойственных цепей. Это можно рассматривать как проявление закона сохранения потока энергии. Рассмотрены свойства двойственных цепей, структура которых представлена непланарными графами.

В главе 5 представлены приложения в новой области – для моделирования, расчета и анализа экономических систем, создания на этой основе информационных продуктов практического назначения. Разработана сетевая модель межотраслевого баланса продуктов в системе производств. Потоки продуктов представлены контурными и узловыми токами, а потоки денежно-кредитных средств – контурными и узловыми напряжениями. Модель обеспечивает расчет объемов производства при изменении хозяйственных связей, структурных реформах и распределении потоков денежных средств. Алгоритм расчета баланса по частям сокращает объем вычислений, обеспечивает расчет материально-финансового баланса. Расчет вариантов структурной и хозяйственной политики является необходимым элементом системы управления устойчивым развитием.

Начавшийся в 2007 году финансовый кризис показал актуальность создания моделей и методов расчета отношений между потоками продуктов и денежными потоками. В главе 5 рассмотрены основы такого подхода к построению модели социально-экономической системы методом двойственных сетей.

На основе сетевой модели потоков денежных средств разработана методика анализа результатов деятельности банков. Методика применяется при создании информационных продуктов в печатной форме (бюллетень «Банки и финансы») и в электронной форме (ИАС «Банки и финансы»), для государственных и коммерческих организаций. Методика анализа

деятельности предприятий применялась для анализа отраслей промышленности. На основе сетевого анализа потоков денежных средств создан рейтинг динамической финансовой стабильности (РДФС) банков. Методика РДФС применима для создания рейтингов предприятий, страховых организаций, других хозяйствующих субъектов (*Карминский, Пересецкий, Петров, 2005*).

Для расчета вариантов прогноза бюджета разработана сетевая модель потоков денежных средств в системе анализа поступления доходов бюджета. Модель применена для расчета вариантов прогноза бюджета при изменении налогооблагаемых баз, ставок, платежей.

Построена сетевая модель массообмена при ректификации в процессе переработки нефти, которая нашла применение при разработке подсистемы оперативного прогнозирования пожароопасных ситуаций в АСУ ТП объектов нефтепереработки.

Многие люди помогли автору и оказали поддержку данному научному направлению. Побиск Георгиевич Кузнецов научил автора системному взгляду на окружающий мир, умению видеть сходное в различном. Лев Тимофеевич Кузин заставил автора искать практические приложения тензорным методам. Геллий Николаевич Поваров, с которым автор занимался исследованием идей русских конструкторов логических машин, научил дотошности и скрупулезности в исследованиях. Автор благодарен А.Е. Арменскому, В.И. Белякову-Бодину, Б.Е. Большакову, В.А. Горбатову, И.П. Копылову, В.А. Кутергину, С.В. Лаппо, С.Г. Тимохину за полезные замечания и обсуждения.

Особую признательность автор выражает проректору Международного университета природы, общества и человека «Дубна», профессору Евгении Наумовне Черемисиной за неоценимую помощь в издании книги.

Исследования по сетевому моделированию экономических систем проведены при поддержке РФФИ, проекты 05-06-80302 и 07-06-00209.

В данном издании внесены правки, актуализированы некоторые данные, добавлен раздел по сетевой модели массообмена в процессе ректификации объектов нефтепереработки.

## 1. ТЕНЗОРНАЯ МЕТОДОЛОГИЯ В ТЕОРИИ СИСТЕМ

Управление устойчивым развитием в системе «Природа – общество – человек» является актуальной задачей глобального масштаба. Состояние и развитие этой системы обеспечивают добывающие, топливно-энергетические, производственные, транспортные, финансовые, банковские, страховые и другие системы. Они соединены между собой структурными связями, которые, в конечном счете, обеспечивают прохождение потока солнечной энергии через глобальную систему с целью роста и развития человеческого общества. В каждой стране действует механизм связанных между собой трех компонент – производство, товарные рынки, финансовая система, которые постепенно объединяются в единую глобальную систему. В этой системе добыча природных ресурсов, производство товаров и услуг, их потребление и последующая утилизация создают одну группу сетей и путей. Потoki в этих путях поступают из природы, протекают через хозяйственную систему общества и возвращаются в природу в виде отходов. Другую группу сетей создают потоки денежных средств, которые замкнуты в обществе, обращаясь между эмитентами, банковской системой, юридическими и физическими лицами в наличной и безналичной форме.

Модель системы жизнеобеспечения подобна электромагнитному преобразователю, в которой потоки продуктов аналогичны электрическим токам, а потоки денежных средств – магнитным потокам. Линии магнитного потока всегда замкнуты, как и пути движения денежных средств. Отличие в том, что электромагнитные системы преобразуют и рассеивают потоки энергии с потерями, их КПД меньше единицы. Системы жизнеобеспечения не только рассеивают, но и накапливают потоки энергии, увеличивают количество свободной энергии в распоряжении общества, обеспечивая этим развитие человека и человечества; их видимый КПД больше единицы.

Системы производства, товарных рынков, финансов состоят из отдельных хозяйствующих субъектов, связанных структурой сложных отношений. Сами хозяйствующие субъекты включены в технологические цепочки, сети, обладающие сложной структурой. С развитием технологий меняется не только содержание процессов, но и структуры связей. Изменение структуры связей оказывает наибольшее воздействие на состояние экономических, технологических, технических, финансовых систем.

Знание законов изменения процессов при изменении структуры необходимо для исследования, проектирования управления, прогнозирования. Это касается сложных технических, экономических, физических систем разных предметных областей.

Сложные системы различных областей науки, техники, экономики отличаются настолько, что для каждой из них принято разрабатывать свои методы исследования и расчета. Вместе с тем у них немало общего. Все технические, экономические системы

состоят из элементов, обладающих теми или иными материальными свойствами; соединения элементов образуют структуру. Воздействия на систему вызывают в ней отклики, которые зависят как от величины воздействий, так и от параметров материи, «сопротивления» элементов. В системе возникают процессы. Под процессами, как правило, будем понимать потоки энергии, которые передаются и преобразуются в элементах системы, меняются при изменении структуры связей элементов системы.

Для решения задач системного анализа, проектирования и управления, в особенности для управления устойчивым развитием социально-экономических систем, необходим общий метод расчета изменения *процессов* при изменении *структуры* системы. Вместе с тем математическое моделирование и анализ процессов, и математическое моделирование и анализ структуры производятся в разных областях математики. Одно направление математики представляет материальные, метрические отношения между элементами, но не рассматривает структуру связи между ними. Другое направление представляет структуру, связи между элементами, сетевые структуры, однако не касается процессов в системах, т.е. воздействий и откликов, метрических отношений, их динамики при изменении структуры.

При математическом моделировании состояния и поведения системы, уравнения (алгебраические, дифференциальные, интегральные), которые описывают процессы, составляют для заданной структуры соединения элементов. В обобщенном виде методы решения этих уравнений связаны с теоретико-множественной топологией метрических пространств. Эти уравнения определяют расчет отклика материи элементов (метрические параметры) на воздействия (энергетические). Они не содержат описания структуры связей. При изменении структуры связей уравнения состояния надо получать и решать заново.

При математическом моделировании структуры, конфигурацию и связи элементов в сложной системе представляют симплексы, комплексы, замкнутые и разомкнутые пути. Структурные методы связаны с комбинаторной топологией, они не содержат понятий метрики, т.к. не определена мера – расстояние между циклами, разрезами, симплексами.

Таким образом, методы теоретико-множественной топологии описывают процессы, но не структуру, а методы комбинаторной топологии описывают структуру, но не процессы сложных систем. Для системного анализа и управления необходим метод, который объединяет процессы и структуру сложных систем. Оказалось, что это возможно на основе применения тензорного метода исследования сложных систем.

Состояние системы, параметры откликов в элементах, которые характеризуют это состояние, могут меняться при изменении воздействий на систему, при изменении параметров материи самих элементов, а также при изменении соединений элементов, т.е. структуры системы. С возрастанием сложности технических и экономических систем все

более важной становится задача расчета и анализа изменения состояния системы при изменении структуры связей ее элементов, даже если воздействия и сами элементы остались прежними. Проблема связи процессов и структуры, вообще говоря, есть проблема связи части и целого.

Задача данной работы состоит в изучении закономерностей изменения структуры, а также изменения процессов при изменении структуры. Для этого используется достаточно простая математическая модель – сеть из одномерных отрезков-ветвей с присущими ей свойствами двойственности. Изучение двойственных сетей позволило найти законы изменения процессов при изменении структуры систем; разработать алгоритмы расчета откликов на приложенные воздействия при изменении структуры, включая разделение системы на части или соединение из частей целого.

Тензорный метод основан на использовании объектов, измеримых величин, компоненты которых имеют линейный закон преобразования при изменении структуры сложных систем. Теоретической основой применения тензорного метода в теории систем является математическая модель двойственных сетей. Только для двойственных сетей существует инвариант, который обеспечивает преобразование параметров процессов при изменении структуры по тензорным законам. В данной главе рассмотрены особенности процессов и структуры сложных систем; основные понятия и содержание тензорного метода, его применения в геометрии и физике; применение тензорного метода для расчета, управления и анализа технических и экономических систем с помощью двойственных сетей.

### **1.1. Процессы и структура сложных систем**

Общим для разных систем является наличие процессов в субстанции элементов, и наличие структуры связей между элементами; именно связи делают отдельные элементы системой. Процессы и структура составляют две неразрывные стороны любой системы от уровня микромира до космических масштабов.

#### **1.1.1. Материя и структура**

Эволюция технических и экономических систем в сторону усложнения, как по количеству элементов, так и по количеству связей между ними, требует создания соответствующих методов и средств их описания, исследования, расчета, анализа и управления. Развитие знаний об окружающем мире, развитие общества и создаваемых им технологий увеличивает влияние связей между элементами на поведение системы. Совокупность связей образует понятие структуры системы. Теория систем возникла и развивается вместе с увеличением количества элементов и связей между ними. Усложнение связей требует совместного анализа процессов и структуры сложных систем.



Наиболее наглядно процессы и структура представлены в электрической цепи. В данной работе автор разделил электрические цепи, которые Крон и его последователи использовали в качестве «эталона» для моделирования физических и технических систем, и их математическое содержание. В качестве инструмента по созданию математических основ исследования и анализа взаимодействия процессов и структуры используются двойственные сети. Оказалось, что двойственные сети обладают новыми закономерностями, имеющими глубокое содержание не только в отношении взаимодействия процессов и структуры. Найденный инвариант преобразования структуры двойственных сетей является проявлением закона сохранения потока энергии.

Первый шаг в направлении исследования структурных свойств был сделан в теории графов, которая опирается на законы Кирхгофа. Эти законы устанавливали топологические отношения в электрической цепи (*Kirchoff G.*, 1847). Они известны как законы сохранения токов в узлах и напряжений в контурах. Закон Кирхгофа, например, для узлов (или токов) утверждает, что заряд не может ни накапливаться в узле, ни исчезать в узле. Правда, почти за сто лет до этого аналогичные законы в механике установил Д'Аламбер, который переформулировал второй закон Ньютона, чтобы показать, что сумма сил, действующих на тело равна нулю.

Структура соединения элементов играет определяющую роль при формировании физической сути процессов, которые происходят в физических, технических и экономических системах. Структура играет важнейшую роль в информационных и биологических системах. Все физические явления порождены возникновением новых связей между элементами, структура которых становится все сложнее и образует системы новых уровней сложности. Элементарные частицы (нуклоны и мезоны) связаны в ядро, в котором возникают ядерные процессы. Само ядро, вместе с электронными оболочками, составляет структуру атома. На уровне атома возникают электромагнитные явления, когда нуклоны и электроны соединяются в единую систему. Многообразие химических процессов возникает при соединении атомов в молекулы. И так далее.

Система представляет собой совокупность элементов, которые определяют свойства протекающих в них процессов, и соединяющей их структуры связей. Эти свойства присущи материи в целом. Причиной изменения положения или состояния материи является воздействие. Мерой сопротивления воздействию является инерция материи. В технических и физических системах это могут быть масса, сопротивление, теплоемкость, вязкость, магнитная проницаемость. В экономических системах это могут быть коэффициенты прямых затрат, ставки привлечения и размещения денежных средств, доходность финансовых инструментов на фондовых рынках. Следствием становится отклик, который проявляется в

изменении положения или состояния материи системы, протекающих в ней потоках. Вместе это составляет суть процессов, которые протекают в элементах материи. Процессами, как правило, является передача и преобразование потоков энергии.

Элементы систем сами по себе обладают многообразными свойствами. Свойства материи элементов, представляющие главный интерес при проведении конкретного исследования, определяют название системы, т.е. те качества, которыми данная система отличается от других систем. Материальными свойствами элементы системы обладают всегда, даже если они не соединены между собой, но проявляют их тогда, когда на них оказано воздействие. Тогда в системе, в элементах возникает отклик, реакция на воздействие. Характеристики измеримых откликов показывают, в какой степени система соответствует тем требованиям, которые заложены в нее при проектировании и управлении. При моделировании системы в целях ее исследования, свойства материи элементов определяют метрические свойства представляющего пространства.

Сложные системы отличаются наличием большого количества элементов, соединение элементов образует структуру. Структуру трудно считать материей. Ее значение нельзя измерить приборами так, как это делается с физическими величинами. Понятиям структуры (симплексы, комплексы, замкнутые и разомкнутые пути) нет места в системе физических величин, например в ЛТ таблице Бартини-Кузнецова. Вместе с тем понятие структуры пронизывает все, что существует, как живые, так и неживые системы, на всех уровнях от масштабов микромира до космических масштабов.

Материальный состав элементов и структура связей между ними существует и до возникновения воздействий, до возникновения процессов. *Это состояние системы назовем невозбужденным состоянием.* Если на систему оказано воздействие, то в ней возникают и протекают процессы, характеризующиеся воздействиями и откликами (которые являются реакцией материи и структуры элементов на воздействие), т.е. в системе протекают потоки энергии. *Это состояние назовем возбужденным состоянием.* Невозбужденные сети Г. Крон называл «мертвые» сети, а возбужденные сети – «живые» сети (Крон, 1972). Такие образные термины в данном случае не подходят. Дело в том, что существуют неживые системы (физические и технические), которые только рассеивают потоки энергии, и живые системы, которые не только рассеивают, но и накапливают потоки энергии (экономические, биологические). Способность накапливать, собирать свободную энергию является главной характеристикой живых систем, которая обеспечивает возможность роста, и развития живой части природы. Для характеристики живых и неживых систем будем использовать термины «невозбужденное состояние» и «возбужденное состояние».

Элементы системы с их материей, и структура связей элементов вместе с возможными изменениями связей – это и есть невозбужденное состояние системы. Модель (математическая) такой системы – сеть. Элементами сети могут быть одномерные (отрезки) или многомерные (гиперплоскости) объекты. Сеть, с ее свойствами двойственности, обладает инвариантами, которые обеспечивают преобразование связанных с ней величин при изменении структуры, подобно тому, как происходит преобразование компонент геометрических объектов при изменении систем координат. Состояние невозбужденной системы характеризуют параметры элементов и параметры структуры связей элементов.

#### **Элементы.**

1. Количество и состав элементов; геометрическая размерность элементов (точки, линии, поверхности, объемы, гиперплоскости).
2. Материальные характеристики элементов (существенные с точки зрения протекающих в системе процессов) выражаются их физической размерностью в соответствии с инерционными свойствами (масса, сопротивление и т.д.).

#### **Структура связей.**

3. Совокупность связей между элементами, конфигурация связей. Соединенные элементы образуют в системе замкнутые пути и разомкнутые пути. Пути можно выражать друг через друга, комбинируя элементы, которые их составляют. Независимые наборы замкнутых и разомкнутых путей определяют базисы соответствующих подпространств. Изменения структуры определяются соединением и разъединением границ элементов. При этом некоторые замкнутые пути размыкаются, или разомкнутые замыкаются. Происходит соответствующее изменение размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей. С этим связаны свойства изменения, преобразования структуры систем.

Связи можно рассматривать как некие отдельные элементы, не имеющие материального содержания. Чтобы не выделять сами связи как отдельные элементы, можно говорить о соединении элементов их границами. Для этого надо разделить внутренний состав элемента и его границу с окружающей средой. При соединении, разъединении, т.е. изменениях, которые являются преобразованиями структуры, возникает вопрос о способе соединения, местах соединения элементов системы между собой. Это вопрос о том, какая часть каждого из соединяемых элементов становится общей для них, а какая часть остается особенной, принадлежащей только каждому элементу. Т.е. вопрос о том, как отличить, что в результате соединения появились два соединенных друг с другом элемента, а не возник один элемент в результате слияния двух элементов.

Следовательно, при рассмотрении преобразования структуры возникает вопрос о границах элементов, которые составляют структуру. Для решения этого вопроса надо

отделить внутреннюю часть элемента от окружающей ее границы. Внутренняя часть, по сути, остается недоступной наблюдению и происходящее внутри можно описать только через свойство, способность элемента реагировать на воздействия. Граница – это та часть элемента, через которую происходит воздействие; его можно измерить. Через границу, как часть элемента, воспринимается отклик, который также можно измерить. Таким образом, понятие границы элемента связано не только с преобразованием структуры, но и с возможностью измерения.

В сплошных средах для целей исследования и анализа принято проводить деление на слои, элементы, и определять взаимодействие между ними. То есть, взаимодействие через условные границы. Непрерывность при этом достигается при переходе к бесконечно малым. Например, при стремлении к нулю толщины слоя.

Граница есть та часть элемента, которая может стать общей с другими элементами, без потери каждым из них своей особенности, индивидуальности. Например, в сети из отрезков линий границами являются точки начала и окончания каждого отрезка. Преобразования структуры связаны с изменением числа границ элементов в системе. Во всех случаях при соединении границ элементов число границ уменьшается, а при разъединении элементов число границ в системе увеличивается. В этом связаны инварианты преобразования структуры. В двойственных сетях, например, при изменении структуры суммарное число независимых замкнутых и разомкнутых путей остается постоянным.

Возбужденное состояние системы характеризуют величины и точки приложения воздействий, а также отклики, определяемые свойствами невозбужденной системы.

4. Воздействия на систему возможны двух видов:

- Воздействия извне системы, т.е. через границы элементов; это предполагает взаимодействие системы с окружающей средой. Это открытые системы.
- Воздействия изнутри системы, т.е. в самих элементах, без контакта, взаимодействия с окружающей средой. Это замкнутые системы.

5. Состояние системы характеризуют отклики в элементах на приложенные воздействия, которые возникают при условиях ее состояния, заданных в пунктах 1–4.

Отклики на приложенные воздействия при заданных параметрах элементов определяют состояние системы постольку, поскольку они сами оказывают воздействие со стороны системы на окружающую среду. Данные «обратные» воздействия от откликов регистрируют измерительные комплексы, которые дают наблюдателю (аналитику) информацию о состоянии системы. Измерение для целей исследования должно оказывать минимальное воздействие на состояние системы.

Состояние системы определяют материя, структура связей элементов и протекающие процессы. Для анализа состояния системы необходим расчет откликов на приложенные воздействия. Для анализа возможного изменения состояния системы необходим расчет откликов при изменении тех или иных характеристик системы (свойств и состава элементов, значений и точек приложения воздействий, структуры связей элементов и др.).

*Процессы*, протекающие в системе, описывают с помощью уравнений поведения. Эти уравнения выражают значения откликов в элементах системы через приложенные воздействия и характеристики материи (метрики) самих элементов. Отклики меняются в зависимости от изменения воздействий и характеристик материи элементов.

*Структура*<sup>1</sup> системы представляет собой взаимное расположение, соединение элементов. Отклики меняются в зависимости от изменения структуры.

Таким образом, состояние системы может меняться:

- при изменении количества и состава элементов,
- при изменении материальных характеристик (метрики) элементов,
- при изменении структуры связей элементов, например:
  - соединение системы из элементов или разделение системы на элементы;
  - изменение соединений в связанной системе;
  - разделение связанной системы на подсистемы или соединение системы из подсистем.
- при изменении значений и точек приложения воздействий, а также их вида (внешние или внутренние).

При математическом моделировании структуры, конфигурацию и связи элементов в сложной системе представляют симплексы, комплексы, замкнутые и разомкнутые пути (теория графов (*Свами*, 1984), теория сетей (*Форд*, 1966), графов связей (*Physical structure...*, 1974) и т.д.). Однако, эти теории, как отмечалось, не содержат понятий метрики, поскольку не определена мера – расстояние между циклами, разрезами, симплексами.

В конце XX века появились работы, в которых отмечается важность развития и применения математических методов моделирования сложных систем природы и общества с переменной структурой для управления устойчивым развитием. Что должно сохраняться при проведении структурных изменений, при этом изменение каких величин следует считать

---

<sup>1</sup> Термин «*структура*» (от латинского *structura* - строение, расположение, порядок) применяют в разных смыслах. О. Веблен называл совокупность свойств множества абстрактных объектов «*структурой*» пространства [Веблен, 1949, с.32]. Структурой называл совокупность свойств *физического* пространства А.Н. Щукарев [1934]. Термин «структура» в работах Биркгофа стали со временем более точно переводить как «*решетка*». Есть также государственные и др. структуры. В данной работе термин *структура* означает взаимное расположение элементов сети или сложной системы, совокупность связей элементов. Применяется в сходном смысле термин *топология системы*, однако топология – это наука.

критерием успеха проводимых преобразований? Или – какой структурой должна обладать система для выполнения заданных параметров развития? Например, для заданного увеличения выпуска продукции в заданный период времени. Какие пропорции возрастания компонент производства (для внутреннего потребления различных социальных и возрастных групп, или для экспорта) соответствует целям развития страны? Необходимо рассчитать последствия влияния резких скачков производства в последующие периоды развития, и на какие структурные компоненты окажут влияние эти последствия. Эти и другие задачи должны стать предметом расчета и анализа вариантов изменения структуры.

Среди проводимых в данном направлении исследований необходимо отметить работы Российской Академии естественных наук (РАЕН) по проектированию устойчивого развития (*Кузнецов О.Л., Кузнецов П.Г., Большаков Б.Е., 2000; Кузнецов О.Л., Большаков Б.Е., 2002; Громыко Ю.В., Петров А.Е., 2002*). Кроме того, в работах РАЕН, подчеркивается необходимость применения сетевого моделирования для создания информационно-аналитических систем по управлению устойчивым развитием, обеспечению экономической безопасности государства (*Арменский А.Е., Гусев В.С., Петров А.Е., 2003*). В этих работах отмечается важность тензорного метода, соединяющего измеримые величины, а также процессы и структуру сложных систем. Анализ структуры приобретает все большее значение в условиях быстрых изменений хозяйственных связей при распаде и слиянии экономических субъектов, а также при обеспечении безопасности в условиях техногенных, природных катастроф, когда разрушение связей, выход из строя подсистем способны оказать критическое воздействие на состояние и управляемость сложных систем.

Понятие границ элементов, их изменения при соединении и разъединении, приводит к осознанию таких свойств самой структуры, которые имеют фундаментальный характер. Дело в том, что при соединении элементов, их соответствующие границы объединяются, из двух границ остается одна. При разъединении элементов, их соответствующие границы разъединяются, из одной границы возникает две. Этот, казалось бы, мало значительный факт, приводит к тому, что меняются топологические свойства структуры.

Например, если в сети из одномерных отрезков соединить два отрезка их концами, то эти концы-узлы сольются, и останется один узел. Если соединить концами три отрезка, то из трех узлов останется один узел. Если рассматривать сеть как пространство с количеством измерений равным числу элементов-ветвей, то координатами такого пространства будут наборы ветвей, состоящие из одной или нескольких ветвей. Такие наборы ветвей называют *пути*. Как только появляются ветви, появляются и пути через них. Если путь начинается с одного конца-узла ветви и, пройдя по одной или нескольким ветвям, заканчивается в том же самом узле, то это замкнутый путь. В противном случае это разомкнутый путь. Понятие

прохождения ветви (или многомерного элемента) приводит к понятию ориентации ветви. Ориентация позволяет определить, в каком направлении проходит ветвь – в одном направлении, или в противоположном направлении. На практике ориентацию задают, выбирая, приписывая, какое направление прохождения ветви считать положительным; тогда противоположное становится отрицательным.

Одни пути можно выражать через другие пути, перечисляя составляющие их ветви в соответствующем порядке и с учетом ориентации. Выбрав пути, независимые друг от друга, но через которые выражаются все остальные пути в структуре, получим базис, который определяет размерность соответствующего подпространства. Таких подпространств в любой сети, как отмечалось выше, два – это подпространства замкнутых и разомкнутых путей. Они независимы друг от друга, ортогональны; поскольку базисы их путей не выражаются друг через друга. Вместе с тем они зависимы друг от друга, поскольку взаимно преобразуются, и вместе составляют полное пространство сети.

Независимые наборы замкнутых и разомкнутых путей определяют базисы соответствующих подпространств. При размыкании замкнутого пути получается разомкнутый путь; или при замыкании разомкнутого пути получается замкнутый путь. Соответственно изменяются размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей. С этим связаны свойства изменения, преобразования структуры систем.

Изменение размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей приводит к вырождению, неразрешимости задачи расчета. Из меньшего числа переменных нельзя получить большее число переменных. Например, если прямая линия, или отрезок прямой, спроектированы на плоскость в точку, то по значениям координат этой точки нельзя восстановить информацию обо всех точках прямой. Нельзя даже сказать – это был конечный отрезок, или бесконечная прямая, или просто точка. Чтобы получить такую информацию, надо на прямую линию посмотреть «сбоку», т.е. из другого измерения, отличного от той плоскости, на которой прямая линия превратилась в точку.

Аналогичная ситуация возникает с точками плоскости, которая проектировалась на другую плоскость в прямую линию – по данным о точках этой проекции прямой нельзя ничего сказать о точках, принадлежащих всей проектируемой плоскости.

### **1.1.2. Двойственность структуры сетей и систем**

Двойственность обеспечивает решение проблемы изменения размерности при изменении структуры сети. Дополнение заданной сети сетью с двойственной структурой (в ней каждому замкнутому пути соответствует разомкнутый путь, и наоборот) создает пространство сети, в котором размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей остаются постоянными при изменении структуры. Двойственность является естественным свойством пространства-структуры, которое связано с понятием направления, ориентации.

Если задано одно направление, то оно должно дополняться и противоположным направлением. Для двух двойственных сетей при изменении связей ветвей все измерения пространства-структуры сохраняются и остаются доступными для анализа. Увеличение числа базисных замкнутых путей в одной сети приводит к уменьшению числа базисных замкнутых путей в двойственной сети, но их сумма постоянна. При этом одновременно обратные изменения происходят с разомкнутыми путями.

Двойственность многообразно проявляет себя в различных областях. В обзоре В.В. Попкова (*Попков, 2002*) отмечено, что двойственные понятия широко используются в философии и различных отраслях специального знания (в физике, математике, химии и др.). Однако до сих пор не систематизировано с учетом достижений современной науки все то, что «действительно удивительно и божественно для вдумчивого мыслителя – это присущее всей природе удвоение числовых значений, и наоборот, раздвоение – отношение, наблюдаемое во всех видах и родах вещей» (*Платон, 1999*).

Это понятие, которое было замечено в глубокой древности, и связано с взаимным дополнением противоположностей в окружающем мире, имеет разные названия: дуализм, диада, дихотомия, бинарная оппозиция, противоположность, полярность. Идея двойственности дошла до нас в мифах древних народов. Геб и Нут у египтян, Ки и Ан у шумеров, Пракрити и Пуруша у индийцев, Инь и Янь у китайцев, Ометикутль и Омесигуатль у ацтеков, Ахриман и Ормюзд у персов – все это названия богов или активных двойственных начал, взаимодействие которых, по мнению древних, приводит в движение мир. Стороны двойственности вступают в союз, где их различия теряются, образуя целое, обладающее способностью к движению, развитию. Так, Пракрити и Пуруша объединяются в Прадхане, Янь и Инь сливаются в Дао, Ахраман и Ормюзд соединяются в Митре, Ометеотль образует единое для Ометикутля и Омесигуатля (*Попков, 2002*).

Двойственные начала символизируют тепло и холод, день и ночь, черное и белое, добро и зло, мужское начало и женское начало, любовь и ненависть. Эти взаимодействующие противоположности лежат в основе формирования порядка из первоначального мирового хаоса, вводя в него различия и создавая наблюдаемые структуры окружающего мира. Объединенные в союз, но разделенные как чистые полярности, двойственные начала преобразуют неопределенную энергию в активный потенциал, который способен произвести изменения в окружающем мире. В таком описании (*Peat, 1987*) содержатся элементы современных представлений о порядке, хаосе, дифференциации, потоке, колебаниях, связности и др.

В данном случае наибольший интерес для нас представляют свойства двойственности, связанные с изменением структуры в математике, физике, теории систем. В математике



понятие двойственности возникло, по-видимому, в проективной геометрии. Наличие двойственности позволяет установить некоторую симметрию в рассуждениях. Например, если заменить в любом верном предложении все входящие в него понятия на двойственные им понятия, то можно получить верное предложение, двойственное первому. Этот принцип двойственности проявляется, например, в существовании прямой и обратной теорем в геометрии.

Теоремой, обратной данной, называется такая теорема, условием которой служит заключение данной теоремы, а заключением – условие данной теоремы. Часто говорят о двух взаимно обратных, или двойственных друг другу теоремах (*Градштейн*, 1973). Взаимно обратные теоремы, истинность которых доказана, важны в математических исследованиях. Часто необходимо знать, какие свойства можно принять за основные, вполне определяющие объект исследования. Эти свойства объектов (геометрических фигур, множеств) выделяются посредством доказательства обратных теорем. Возможность выделить таким путем некую сущность объекта (свойство, инвариант) показывает важность двойственных утверждений.

В проективной геометрии на плоскости двойственными являются точка и проходящая через нее прямая; в этом случае говорят о точке инцидентной прямой и о прямой инцидентной точке. В проективной геометрии в пространстве двойственными являются понятия точки и плоскости, а понятие прямой двойственно само себе. Это связано с дополнением объекта в пространстве до некоторого в проективном смысле полного объекта. Дело в том, что в проективной геометрии прямые, плоскости, объемы, и так далее (собственные элементы пространства) замкнуты на бесконечности так называемыми несобственными элементами. Соответственно, бесконечно удаленной точкой, бесконечно удаленной прямой, бесконечно удаленной плоскостью (поверхностью) и так далее. В основе проективной геометрии лежит признание полного равноправия собственных и несобственных элементов.

Двойственной отрезку прямой является та часть прямой, которая дополняет отрезок до полной проективной прямой, замкнутой на бесконечности. Аналогично, части плоскости, ограниченной окружностью, двойственна вся внешняя часть плоскости, дополняющая круг до полной проективной плоскости. Стянув окружность в точку, мы получим двойственность точек и плоскостей в проективном пространстве.

Принцип двойственности в проективной геометрии утверждает, что если верно какое-либо предложение, касающееся точек, прямых, плоскостей и отношений инцидентности между ними, то верно и так называемое двойственное предложение, получаемое из данного, если поменять местами слова «прямая» и «точка» (для проективного пространства слова «плоскость» и «точка»). Например, предложению «три плоскости определяют точку»

соответствует двойственное предложение «три точки определяют плоскость». На плоскости этому соответствует аналогичная пара утверждений. «Две точки определяют прямую» (известно, что через две точки можно провести единственную прямую). «Две прямые определяют точку» (известно, что две прямые пересекаются в одной точке, а параллельные прямые в проективной геометрии пересекаются в несобственной, т.е. бесконечно удаленной точке). Именно признание равноправия собственных и несобственных элементов в проективной геометрии позволило использовать принцип двойственности, иначе параллельные прямые оказались бы не имеющими общей точки.

Другим примером двойственности является задача линейного программирования (Петров, 1985). Прямая задача заключается в нахождении максимума целевой функции *изнутри* выпуклого многогранника, расположенного в  $n$ -мерном пространстве. В этом пространстве многогранник задается линейной формой с  $n$  ограничениями, наложенными на  $m$ -мерный вектор-аргумент целевой функции. Обратная или двойственная задача – нахождение минимума обратного функционала *снаружи* на поверхности многогранника, т.е. в пространстве, дополняющем внутренность многогранника прямой задачи до полного пространства, но в линейном программировании это  $m$ -мерное пространство. При этом компоненты «прямого» вектора преобразуются по правилам обращения матриц в коэффициенты-ограничения для обратной задачи.

Также примером проявления и применения двойственности может служить алгебраическая топология. Двойственность в топологию ввел в 1922 г. Дж. Александер (Alexander J., 1922), а в дальнейшем эта идея развилась в двойственность между гомологиями и когомологиями. В алгебраической топологии 0-симплексом является точка, 1-симплексом – отрезок прямой без своих границ, 2-симплексом – треугольник (также без своих границ), 3-симплексом – тетраэдр (объем) и так далее до  $p$ -симплексов  $n$ -мерного пространства. Пространства этих симплексов образуют гомологическую последовательность. Ей отвечает двойственная когомологическая последовательность  $(n - p)$ -симплексов, дополняющих каждый симплекс гомологической последовательности до полного проективного пространства. Например, в трехмерном пространстве двойственным  $(n - p)$ -симплексом к 1-симплексу (отрезку прямой) гомологической последовательности оказывается  $n - 1 = 3 - 1 = 2$  симплекс (плоскость) когомологической последовательности.

Таким образом, двойственность здесь определяется не только размерностью элементов, но и размерностью пространства. Для двух заданных элементов тем самым определена размерность пространства, по которому они могут быть двойственными в указанном смысле.

Принцип двойственности для теории категорий утверждает, что некоторое высказывание истинно тогда и только тогда, когда в этой теории истинно двойственное

высказывание. Принцип двойственности позволяет выделить формальные связи между понятиями и результатами, которые в конкретных категориях, кажутся не зависящими друг от друга. В частности, с помощью теории категорий была найдена двойственная связь между наблюдаемостью и достижимостью системы. Наблюдаемость понимается в смысле возможности определить состояние системы по выходу. Достижимость состоит в определении множества достижимых состояний. Система представляется как пара систем, таких, что достижимость одной двойственна (в смысле категории) наблюдаемости другой.

Для сетей (электрических цепей) Крон установил двойственность между замкнутыми и разомкнутыми путями, т.е. контурами и парами узлов. Те и другие образуются ветвями, т.е. 1-симплексами проективной геометрии, следовательно, это двойственность между «прямыми». Ввести ее удалось благодаря замене понятия «узел» (двойственной ему является «плоскость») на понятие «пара узлов».

В трактате «Электричество и магнетизм» (1873) Максвелл разработал два метода расчета цепи, известные как контурный и узловой. В одном в качестве переменных принимаются токи в контурах, в другом – разности потенциалов, возникающие на парах узлов. Максвелл принимал потенциал одного из узлов за потенциал отсчета («заземления»), т.е. за начало координат, и вычислял разности потенциалов между этим узлом и остальными узлами. Уравнения получались относительно «абсолютных» потенциалов, возникающих в каждом узле. При этом вводится на одну переменную и одно уравнение больше, чем это реально необходимо, а сами уравнения получаются громоздкими. По этой причине на практике обычно отдавали предпочтение контурному методу.

Крон обратил внимание на несимметричность этих методов в работе Максвелла. Он ввел понятие пары узлов, что позволило выбрать в качестве переменной разность потенциалов между любыми двумя точками (узлами) сети. Помимо удобства анализа это обеспечило двойственность (параллельность) контурного и узлового методов расчета цепи. Узлы, 0-симплексы, заменили парами узлов, которые фактически обозначали начало и конец разомкнутого пути, 1-симплекса. Контурные уже представляли собой пути, т.е. 1-симплексы. Таким образом, переменные контурного и узлового метода получили одну размерность. Как и в двойственных теоремах геометрии, теперь стало достаточно в уравнениях контурного метода заменить все величины двойственными, и получаются уравнения узлового метода. И наоборот. В первом переменными являются замкнутые пути – контуры, а во втором переменными являются разомкнутые пути – пары узлов.

Таким образом, процесс расчета становится симметричным с соответствующей заменой величин при переходе от контурной цепи к узловой цепи, или наоборот. Например, воздействующее (внутри цепи) контурное напряжение заменяется воздействующим (извне)

узловым током. Контурный ток отклика заменяется напряжением отклика на парах узлов. Матрица импедансов (комплексных сопротивлений) заменяется матрицей адмиттансов (комплексных проводимостей). И так далее (*Петров*, 1985, с. 88).

В сети двойственными являются замкнутые и разомкнутые пути, воздействия и отклики, сеть и двойственная к ней сеть. Две сети с двойственной структурой (или два многомерных полиэдра) как раз и обеспечивают постоянство размерностей дополняющих друг друга подпространств замкнутых и разомкнутых путей. Например, для простейшего изменения структуры – при соединении двух ветвей в сети – два узла сливаются (уменьшается число узлов). В результате возникает один новый независимый замкнутый путь, увеличивается размерность подпространства замкнутых путей. При этом исчезает один независимый разомкнутый путь, уменьшается размерность подпространства разомкнутых путей. Общая размерность пространства путей сети не меняется, она постоянна и равна количеству элементов – ветвей.

Одновременно, в двойственной сети один узел в соответствующих соединенных до этого ветвях разделяется на два узла. В результате возникает новый независимый разомкнутый путь, увеличивается размерность подпространства разомкнутых путей. При этом исчезает один замкнутый независимый путь, уменьшается размерность подпространства замкнутых путей. Общая размерность пространства путей двойственной сети при этом не меняется, она постоянна и равна количеству элементов – ветвей.

Таким образом, в совокупности двойственных сетей при изменении структуры общая размерность подпространств замкнутых путей постоянная; общая размерность подпространств разомкнутых путей постоянная.

Следовательно, вырожденным преобразованиям в одной сети, с увеличением числа переменных, соответствует невырожденное преобразование в двойственной сети, где уменьшается количество таких переменных, т.е. двойственная сеть, образно выражаясь, при проектировании прямой в точку, позволяет посмотреть на эту прямую «со стороны», получить недостающие переменные для решения задачи.

Если первоначально все элементы-ветви в сети замкнуты, разомкнутых путей нет, то при соединении элементов друг с другом часть путей будет разомкнута, число разомкнутых путей возрастет с нуля до некоторой величины, и на столько же уменьшится число замкнутых путей. В двойственной сети при этом первоначально все элементы-ветви разомкнуты, замкнутых путей нет, но при двойственном соединении элементов друг с другом часть путей будет замкнута, число замкнутых путей возрастет с нуля до некоторой величины, а число разомкнутых путей на столько же уменьшится. Количеству соединений в одной сети соответствует количество разъединений в двойственной сети.

	<b>Свободные ветви, т.е. не имеют соединений друг с другом</b>	<b>Изменения структуры</b>	<b>Соединенные ветви, т.е. на сеть и двойственную сеть наложены связи</b>
<b>Сеть</b>	Все пути замкнутые	Замкнутые пути размыкаются, появляются разомкнутые пути	Сумма замкнутых и разомкнутых путей равна количеству ветвей
<b>Двойственная сеть</b>	Все пути разомкнутые	Разомкнутые пути замыкаются, появляются замкнутые пути	Сумма замкнутых и разомкнутых путей равна количеству ветвей
<b>Полная сеть из двух двойственных сетей</b>	Сумма замкнутых и разомкнутых путей в двух сетях равна числу элементов в двух сетях, т.е. двойному количеству ветвей	Количество замыкаемых путей в сети равно количеству размыкаемых путей в двойственной сети, и наоборот	Сумма замкнутых путей в двух сетях и сумма разомкнутых путей в двух сетях постоянные и равны количеству ветвей

Главный показатель изменения структуры одномерной сети состоит в изменении количества узлов (вершин графа). В теории графов предполагается, что количество узлов не меняется. Изменение количества узлов приводит к изменению самого графа, поскольку он определяется *двумя инвариантами*: количеством узлов и количеством ветвей-ребер. Сеть определяется первоначально *одним инвариантом* – количеством ветвей, а узлы, соединения могут меняться. Отказ от одного инварианта приводит к разрушению данной алгебраической «конструкции», что проявляется в появлении вырожденных преобразований при изменении структуры. Одним из объектов критики работ Г. Крона было использование им прямоугольных матриц преобразования при соединении и разъединении ветвей. Крон утверждал, что матрицы преобразования образуют группу. Как известно, важное свойство группы состоит в существовании обратной операции для каждого преобразования, однако прямоугольная матрица не имеет обратной, следовательно, матрицы преобразования группу не образуют.

Для восстановления полноты алгебраической «конструкции» для сети должен был существовать другой инвариант (вместо постоянства узлов-вершин для графа). Этот инвариант найден автором, он оказался связан с понятием двойственности сетей. В двойственных сетях каждому замкнутому пути в одной сети соответствует разомкнутый путь в другой сети, и наоборот. Оказалось, что существует инвариантная зависимость между матрицами преобразования путей в двух двойственных сетях, отражающая фундаментальную закономерность, которая существует для двойственных сетей. Такой инвариант связывает матрицы преобразования двойственных сетей при изменении структуры (см. гл. 2):

$$C (C_t C)^{-1} C_t + A (A_t A)^{-1} A_t = I.$$

где  $C$  – матрица преобразования путей в данной сети;  $A$  – матрица преобразования путей в двойственной сети;  $I$  – единичная матрица.

Инвариант, который выражает данную закономерность, позволяет преобразовать решения при любом изменении структуры сетей (соединения, разъединения, разделение на части или соединение из частей целого). Эта закономерность связывает процессы и структуру в сетях, сетевых моделях сложных систем в их взаимодействии и взаимном изменении.

Материальные характеристики ветвей можно представить как веса. Если ветвям сети приписаны веса (собственные и взаимные), выражаемые матрицей  $Z$  ( $Z = Y^{-1}$ ), то указанное инвариантное соотношение для замкнутых путей примет вид:

$$(Z)^{-1} = Y = {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C)^{-1} {}^m C + Y^j A_t ({}^j A Y^j A_t)^{-1} {}^j A Y.$$

Если на сеть наложен вектор (воздействие), то его компоненты принимают значения в базисе замкнутых (внутреннее воздействие) или разомкнутых (внешнее воздействие) путей. В данном случае инвариант – это постоянство длины вектора: часть вектора в одной сети, часть в двойственной, но их сумма постоянна и не зависит от изменения соединений. Для вектора  ${}^m \mathbf{d}$ , заданного в замкнутых путях, формула преобразования контравариантных компонент при изменении структуры имеет вид:

$${}^m d_0^a = {}^m d_c^a + {}^m \underline{d}_c^a = {}^m d^a {}^m C_a^a + {}^m \underline{d}^a {}^j A^a_a Y^{ab} = ({}^m C_a^a)_t {}^m d^a + ({}^j A^a_a)_t Y^{ab} {}^m \underline{d}^b,$$

где  ${}^m d_c^a$  и  ${}^m \underline{d}_c^a$  – компоненты вектора в двойственных сетях. Нельзя получить компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  для связанной сети по их значениям в свободных ветвях, поскольку в связанных ветвях они распадаются на совокупность компонент вектора в двойственных сетях и только в сумме дают компоненты полного вектора.

Для разомкнутых путей данные инвариантные соотношения имеют такой же вид, а преобразования такой же смысл, но при двойственной замене величин.

Полученные на этой основе методы расчета двойственных сетей обеспечивают матрицам преобразования групповые свойства, которых они не имели для одной сети. Это позволило построить алгоритмы расчета процессов при изменении структуры сетей и сетевых моделей сложных технических, экономических систем единым методом. С точки зрения физики данный инвариант является проявлением закона сохранения потока энергии, измеряемого как мощность, энергия в единицу времени.

При изменении соединений элементов системы расчет изменения параметров процессов производится умножением на матрицы преобразования базисов замкнутых и разомкнутых путей. Оказалось, что измеримые, т.е. *реальные величины, которые описывают процессы в системах, при изменении структуры преобразуются по линейным законам, с помощью матриц преобразования путей, точно так же, как в геометрии преобразуются тензоры.* Это обстоятельство и дало название методу.

Тензорный метод в геометрии и физике использует изотропное и непрерывное пространство. Основная особенность тензорного метода в теории систем состоит в том, что используется пространство с ограничениями, которое существует только вдоль выделенных направлений, определяемых ветвями сети (сетевой модели сложной системы). Количество ветвей задает размерность пространства сети. Элементами сети могут быть не только одномерные ветви, но и многомерные элементы. Например, поверхности, объемы, гиперплоскости. Задавая «веса», связанные с элементами, мы определим их «масштаб», метрические отношения между ними. Совокупность таких отношений составляет метрику данного пространства-структуры.

Таким образом, для представления процессов и структуры сложных систем с помощью тензоров в данной работе применяется и развивается понятие сети, которая служит математической моделью состояния, а также изменения процессов и структуры систем. Сеть представляет элементы системы ветвями, схема связей которых соответствует структуре системы. Замкнутые и разомкнутые пути в сети играют роль координат, независимые наборы путей представляют базисы. Пространство сети состоит из ортогональных подпространств замкнутых и разомкнутых путей данной сети и двойственной сети.

### 1.1.3. Процессы в системе (возбужденная система)

Процессы в системе, например, потоки энергии, представлены соответствующими величинами (воздействия, отклики, материальные свойства элементов). Эти величины измеряются через свои компоненты, т.е. те значения, которые они принимают в каждом элементе. Расчет величин производится в путях-координатах.

Технические и экономические системы похожи в том, что в них через соединенные элементы проходят потоки энергии. Совокупность связей элементов составляет структуру системы. Преобразование потоков энергии составляет суть процессов в системе. При математическом моделировании процессы должны быть представлены только в терминах измеримых величин, применение которых дает возможность экспериментально проверить результаты (Кузнецов О.Л., Большаков Б.Е., 2002). В указанной работе все системы реального мира делятся на равновесные и неравновесные системы. Равновесная система не может совершать внешней работы, поскольку все внешние «обобщенные силы» (потоки) уравновешены внутренними силами. Неравновесная система может совершать внешнюю работу, эволюционируя во времени, поскольку внешние потоки не уравновешены внутренними потоками.

В соответствии с данной классификацией, которая отражает реальную ситуацию в окружающем мире, системы делятся на три типа.

1. Уменьшение свободной энергии и рост энтропии. Этому соответствуют системы с доминированием процессов рассеяния свободной энергии и приближения к равновесию.
2. Увеличение свободной энергии и уменьшение энтропии. Это системы с доминированием процессов накопления свободной энергии и удаления от равновесия.
3. Отсутствие изменений свободной энергии и энтропии. Это ситуация неустойчивого равновесия внешних и внутренних потоков.

С точки зрения данной классификации, можно разделить системы на неживые, которые относятся к первому типу, и живые, которые относятся ко второму типу. Технические системы, как и вообще неживые системы, рассеивают потоки энергии, совершая работу в процессе преобразования поступающей в них энергии (воздействий) с коэффициентом полезного действия (кпд) меньше единицы. Экономические системы, как и вообще живые системы, не только рассеивают потоки энергии, но и накапливают энергию; в этом суть размножения и воспроизводства. При этом их видимый кпд оказывается больше единицы.

В.И. Вернадский в 1935 году писал: «Природные процессы живого вещества в их отражении в биосфере увеличивают свободную энергию биосферы (первый биогеохимический принцип). Все природные процессы в области естественных косных тел –



за исключением явлений радиоактивности – уменьшают свободную энергию среды (биосферы)».

Увеличение сложности систем происходит по мере роста количества элементов и связей между ними. Вместе с тем существуют аналогии между процессами и структурой технических, экономических систем с одной стороны и математическими моделями в виде двойственных сетей – с другой стороны, что обеспечивает возможность их исследования, расчета и анализа единым методом. Анализ изменения процессов при изменении структуры связей необходим в самых разных предметных областях. Например, при расчете сетей передачи энергии, электрических и электромеханических систем, транспортных, трубопроводных сетей. Такой анализ необходим при расчете вариантов последствий отключения или выхода из строя элементов, подсистем, например, на нефтеперерабатывающем заводе или в ядерном реакторе, или при разделении системы хозяйственных связей на подсистемы, как это произошло при распаде СССР. Особенно актуален расчет и анализ вариантов изменения производства товаров и услуг (объема и состава потоков) при изменении структуры хозяйственных связей для управления устойчивым развитием общества.

**Тензорный метод и двойственные сети.** Метод расчета изменения процессов при изменении соединений элементов необходим, например, для анализа последствий отключения, переключения или выхода из строя элементов или подсистем, разделения целой системы на части или соединения частей в целое, при расчете вариантов конструкции; при изменении хозяйственных связей в экономике. Такой метод позволяет получить решение (характеристики процессов, значения откликов на приложенные воздействия) для одной структуры связей, а затем использовать это решение для того, чтобы преобразовать в решения для других структур, с новым соединением элементов, не решая всю задачу заново.

Значительную роль в решении данной проблемы тензорным методом двойственных сетей играют аналогии, которые существуют между параметрами процессов (измеримыми величинами), параметрами структуры в различных технических и экономических системах. По своей сути аналогии отражают фундаментальное единство природы процессов и структуры, присущее внешне различным системам. Такие аналогии обеспечивают сопоставление процессов и структуры систем разных предметных областей с векторами и структурой двойственных сетей. Это обеспечивает создание технологии построения сетевых моделей, в которых одновременно представлены и процессы, и структура сложных систем.

Применение тензорного метода к проектированию и управлению сложными системами, как отмечалось, основано на отличии пространства сетей от однородного и всюду плотного пространства геометрии. Отличие состоит в том, что пространством сетей является

неоднородное пространство-структура. Это пространство рассматривается только вдоль выделенных линий, ветвей, а в многомерном случае – в пределах гиперплоскостей, которые соединяются друг с другом в заданные (проектируемые) конструкции, образуя полиэдральные комплексы. Изменение соединений рассматривается как преобразование координат в пространстве-структуре. При этом меняются не только параметры *структуры* (например, замкнутые и разомкнутые пути), как отмечалось в разделе 1.1, но также параметры *процессов*, происходящих в системе (значения величин, характеризующих воздействия, отклики, метрику).

Невозбужденная система в промышленности – это, например, производства, структура которых составляет технологические цепочки. В топливной энергетике это сети добычи, переработки, транспортировки энергоносителей. В электроэнергетике – генераторы мощности, трансформаторные системы, сети передачи, системы преобразования электроэнергии для нужд потребления и т.д. В отсутствие воздействия, в отсутствие каких-либо потоков, элементы таких систем, соединенных между собой материально, или информационно, принято называть инфраструктурой.

Все эти системы мертвы, пока на них не оказано воздействие. Но вот произведен, например, пуск гидростанции – и падающая вода начинает вращать турбины, которые вырабатывают ток в генераторах. Подключаются системы трансформаторов и передачи энергии – потоки электрической энергии распространяются по проводам высоковольтных линий, преобразуются, и в домах загорается свет, в результате чего потоки лучистой энергии и тепла рассеиваются в пространстве. Или другой пример. Производство готово к пуску. Подводят энергию, подвозят сырье, материалы, комплектующие, расставляют работников на рабочие места, дают сигнал – машины и механизмы начинают работать; через определенный промежуток времени с конвейера сходят автомобили, самолеты, холодильники, химические удобрения и т.д. Или бурят скважины, создают напор, открывают заслонки – и нефть, газ, начинают поступать из глубин, наполняют хранилища, попадают в производства очистки, далее в сети трубопроводов, по которым поступают на нефтепереработку и производство готовой продукции топливной и нефтехимической промышленности.

Так системы мертвой инфраструктуры оживают, и через них начинают распространяться потоки энергии. В каждом случае есть воздействие – подача напряжения, напора воды в плотине, пластовое или нагнетательное давление в месторождении. И есть отклики в виде потока продуктов, потока энергии по сетевой структуре сложных технических или экономических систем. Потоки энергии, которые распространяются через возбужденные системы, могут меняться. Причинами изменений могут быть, как изменение

состояния невозбужденной системы, так и сами процессы, потоки энергии, приводящие систему в «живое», возбужденное состояние.

Бог слепил человека, а затем вдохнул в него жизнь. Благодаря этому заработали, пришли в возбужденное состояние сети нервной системы, лимфатической системы, мышечной и опорно-двигательной системы, кровеносной системы, системы пищеварения и т.д., включая душу, сетевое состояние которой описывается астральными конфигурациями. «Человек открыл глаза и спросил.

– А какой во всем этом смысл?

– А разве во всем должен быть смысл? – удивился Бог.

– А как же, – сказал Человек».

Впрочем, оставим пока героев Курта Воннегута в покое и рассмотрим обеспокоенные и возбужденные системы. В мертвом состоянии в системе может изменяться количество элементов, (это определяет размерность пространства системы) и качество элементов (материальные, инерционные характеристики определяют масштабы элементов). В возбужденном состоянии материя элементов определяет способность реагировать на воздействия, т.е. пропорции между воздействиями и откликами.

Итак, на невозбужденную систему оказано воздействие, в ней возникли процессы в виде проходящих по элементам, и преобразуемых элементами потоков энергии. Воздействия могут быть внешними, т.е. со стороны источников энергии, расположенных вне системы. При этом преобразование потоков энергии происходит в разомкнутых путях, которые являются переменными. Начало и конец разомкнутого пути могут играть роль входа и выхода для взаимодействия со средой вне системы. Тогда происходит взаимодействие системы с внешней средой, это *открытая система*.

Воздействия могут быть внутренними, т.е. со стороны источников энергии, расположенных внутри системы, в ее элементах. Тогда преобразования потоков энергии происходят в замкнутых путях, которые являются переменными, внутри системы. При этом не происходит взаимодействия системы с внешней средой, это *замкнутая система*.

Оказалось, что существует тесная зависимость между понятиями процессов и структуры систем, такими как:

- закрытость (внутренние воздействия) и открытость (внешние воздействия) системы;
- замкнутые и разомкнутые пути в структуре;
- характеристики потока энергии по отношению к способу измерения;
- ковариантность и контравариантность.

В 30-тых годах Файрстоун писал, что величины, которые характеризуют величину потока энергии, делятся на две группы по отношению к способу их измерения. Это продольные величины (*through variables* – сквозной, от начала до конца) и поперечные

величины (*across variables* – через, в поперечном направлении, на концах – о потенциалах). Одни измеряются в одной точке и называются *продольные* величины; это сила, ток, поток жидкости, поток тепла, поток массы. Другие – как разность измерений в двух пространственно различных точках и называются *поперечные* величины: скорость, напряжение, давление, температура и концентрация (химический потенциал) (*Firestone*, 1933).

Например, в электрической цепи ток измеряется в одной точке (амперметром), а напряжение – как разность потенциалов в двух точках. В механических системах сила измеряется в точке приложения, а скорость – как разность двух положений точки за единицу времени. В гидравлических системах: давление – в одной точке, а поток жидкости – как разность значений в двух точках. Физические размерности продольных и поперечных величин различны. При моделировании необходимо это учесть.

Введенные термины отражают суть этих двух типов величин по отношению к измерению. Измерение в одной точке характеризует одномерную линию движения, а измерение в двух точках соответствует двум поверхностям «поперек» к данной линии движения. В совокупности две такие величины характеризуют объемную величину в трехмерном пространстве – в данном случае поток энергии.

*Произведение каждой пары продольной и поперечной переменных имеет физическую размерность мощности, т.е. энергии в единицу времени, или потока энергии (Physical Structure..., 1974).*

Материя элементов имеет свойства сопротивления (проводимости); структура определяет замкнутые и разомкнутые пути. Поток определяют измеримые в элементах воздействия и отклики, их роль играют продольные или поперечные величины (измеряемые в одной точке или как разность значений в двух точках), в зависимости от типа структуры. Эти двойственности представлены на рис. 1.1.

Энергия – основная характеристика вещества, которая связана с массой соотношением Эйнштейна, т.е. энергия и масса связаны движением, которое представлено скоростью света в квадрате. Поток энергии измеряется как количество энергии в единицу времени через единичную площадь (сечение). Иначе можно сказать, что поток энергии измеряется как объем, проходимый единицей (плотности) энергии в единицу времени через единичную площадку в определенном направлении.

Необходимость включить понятие направления показывает, что само понятие потока энергии связано со структурой пространства, т.е. с выделенными в пространстве направлениями по которым происходит движение.

Потоки энергии предстают наблюдателю для измерения как сочетание двух величин – воздействия и отклика. Воздействие является причиной, побудительным мотивом, которая прикладывается к материи, веществу, чтобы вызвать изменение, движение.

Отклик является следствием реакции материи на приложенное воздействие. Материя оказывает сопротивление изменениям, т.е. возникновению и поддержанию движения, в меру своей инертности. Такая инерционность, различная для разных видов энергии, характеризует материальные, метрические свойства материи, определяет метрику (пространства, системы).

Отклик является следствием взаимодействия причины, т.е. воздействия, и материи вещества (обладающей свойствами инерционности, косности, как говорил В.И. Вернадский). Косная материя всегда оказывает сопротивление распространению потока энергии.

Стремление материи снизить общее воздействие и движение во Вселенной, выровнять потенциалы (в широком смысле), разность которых может создать воздействие и породить движение, выражается вторым началом термодинамики о неуминении энтропии. Само понятие энтропии имеет отношение к системе, т.е. к совокупности взаимодействующих тел, элементов. Для отдельных тел, которые не взаимодействуют друг с другом, оно не имеет смысла. Способ, порядок взаимодействия элементов друг с другом определяет понятие структуры их связей в системе. Это предполагает разделение среды обитания системы на одну часть, где есть элементы, и другую часть, где нет элементов. Заметим, что в термодинамике неравновесных процессов системы рассматриваются как непрерывные среды (см. ФЭС, с 753).

Описание потока энергии как отклика материи на воздействие можно записать соотношением (простейшая форма уравнения поведения):

$$\text{воздействие} = \text{сопротивление} * \text{отклик}.$$

Такой вид имеют все уравнения описания процессов в элементах. Для совокупности элементов получаем систему уравнений. Решением всегда считается получение обратного соотношения. Считается, что воздействие и сопротивление можно измерить, а отклик надо рассчитать, т.е.:

$$\text{отклик} = \text{воздействие} / \text{сопротивление}.$$

В случае многих взаимодействующих элементов составляется система уравнений, в которой воздействие и отклик представляют векторы, а сопротивление есть матрица, которую надо обратить; тогда это решение задачи принимает вид:

$$\text{отклик} = (\text{сопротивление})^{-1} * \text{воздействие}.$$

Величина потока энергии измеряется как произведение воздействия и отклика. Эту величину называют *мощность* и определяют в зависимости от ситуации, как: энергия,

потребляемая в единицу времени; или энергия, производимая в единицу времени; или энергия, рассеиваемая в единицу времени. Это можно записать так:

$$(\text{поток энергии}) = \text{мощность} = \text{воздействие} * \text{отклик}.$$

Такое соотношение переключается с представленной выше связью воздействия, отклика и метрики, выраженной сопротивлением материи, которую можно записать так:

$$(\text{метрика}) = \text{сопротивление} = \text{воздействие} / \text{отклик}.$$

Инвариантность, или постоянство мощности при изменении соединений элементов (структуры) систем; а также какую роль в этой закономерности играет двойственность структуры сетей, является предметом данной работы.

Выше отмечалось, что величины воздействия и отклика по способу их измерения делятся на два типа:

- величины, которые измеряют в одной точке (например, электрический ток), – продольные величины;
- величины, которые измеряют как разность значений в двух пространственно различных точках, (например, электрическое напряжение измеряется как разность значений потенциала между эквипотенциальными поверхностями); – поперечные величины.

Воздействие и отклик, составляющие вектор потока энергии, всегда представлены парой: продольной величиной и поперечной величиной.

Физико-геометрический смысл таких двойственных пар определяется природой потока энергии, как объема, движущегося в определенном направлении. Продольная величина измеряет составляющую потока в направлении движения – например, поток жидкости или электрический ток. Поперечная величина измеряет составляющую потока по сечению, перпендикулярному (ортогональному, в криволинейном случае) направлению движения. Такая парность характеристик потока (обычно речь идет о потоке энергии) определяется наличием трех измерений наблюдаемого пространства. Поперечная величина определяется как разность значений на плоскостях (поверхностях), перпендикулярных (ортогональных) направлению движения потока, и отстоящих друг от друга на единицу расстояния. Таким образом, поперечная величина как бы соответствует двум измерениям. Геометрический смысл состоит в том, что одномерное измерение продольной величины вдоль линии, умноженное на двумерное измерение поперечной величины соответствует объемному (трехмерному) течению потока, в данном случае – потока энергии.

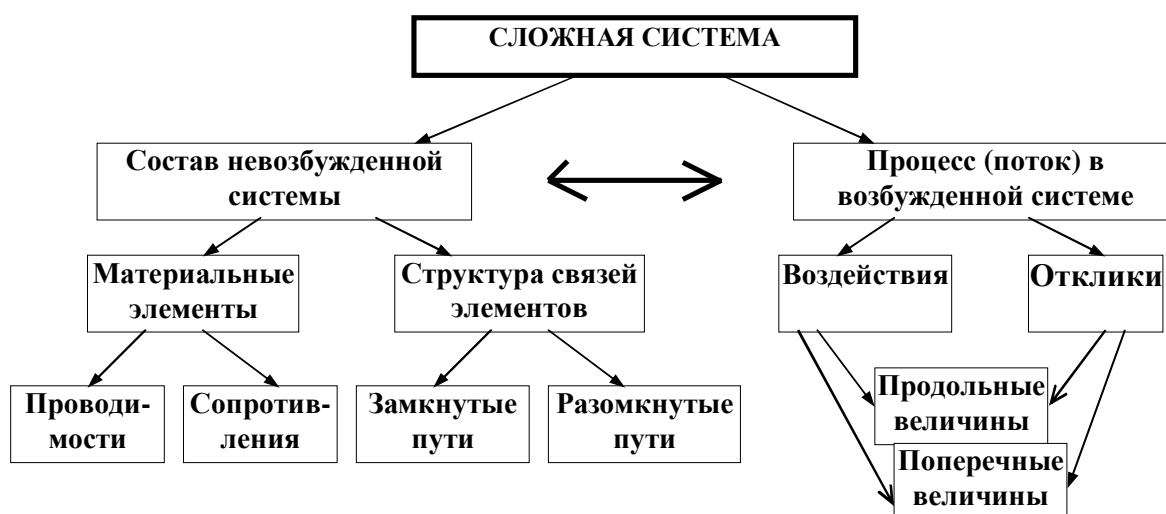
*Один процесс протекает в структуре из одномерных элементов*

Рис. 1.1. Отношения между понятиями невозбужденной и возбужденной системы

Физические величины воздействий и откликов, характеризующие потоки энергии, по типу измерения (продольные и поперечные) для открытых и закрытых систем меняются местами. Базисом для процессов в открытой системе являются разомкнутые пути. Базисом для процессов в закрытой системе являются замкнутые пути. Отношения между этими понятиями представлены в таблице.

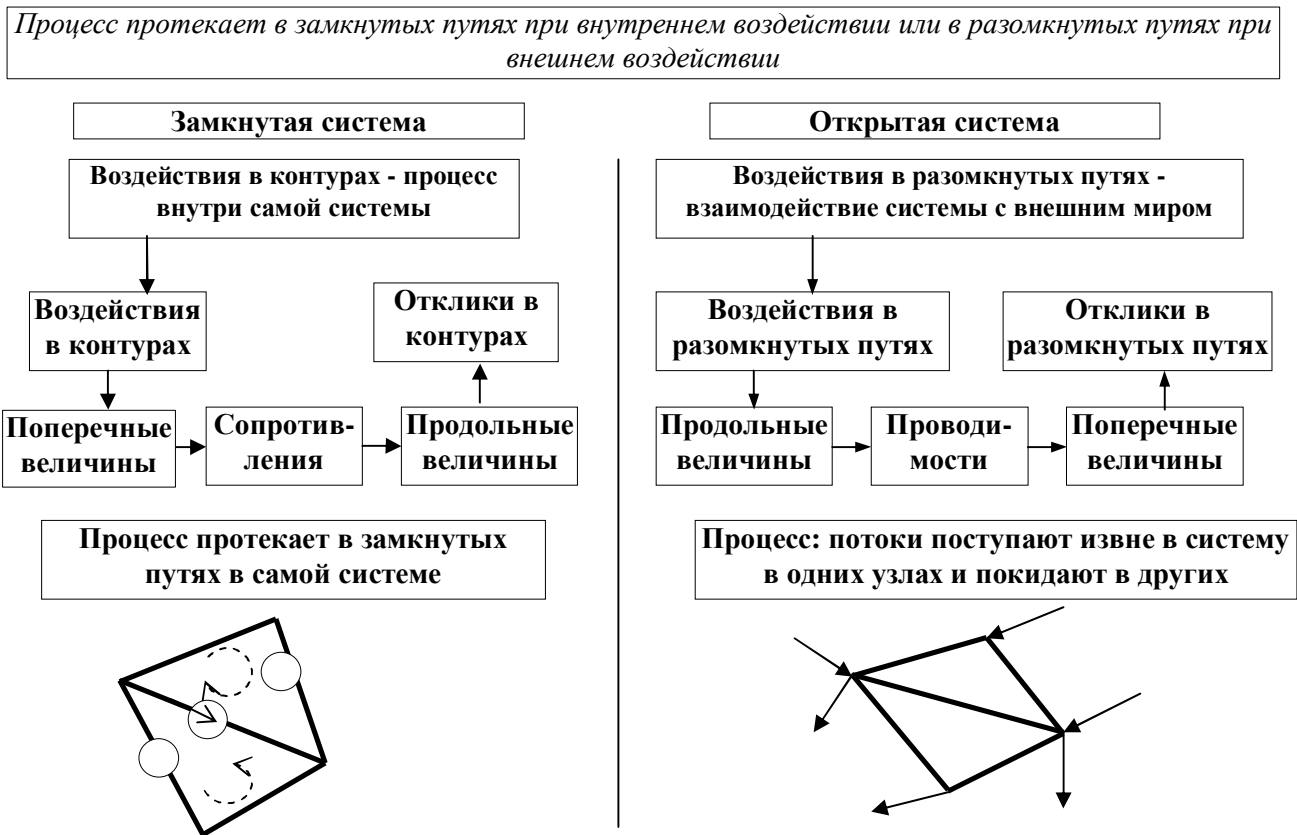
	Воздействие	Отклик
Закрытая система, базис определяют замкнутые пути	Поперечная величина	Продольная величина
Открытая система, базис – разомкнутые пути	Продольная величина	Поперечная величина

Например, для электрической цепи. Источники напряжения (поперечная величина) расположены в ветвях самой цепи, являются внутренними воздействиями. Отклики, токи (продольная величина) возникают в контурах, т.е. в замкнутых путях. Этому соответствует контурный метод расчета. Проводим расчет контурных токов (в независимых, базисных контурах), по ним – токи в ветвях и падения напряжения на ветвях. Токи и напряжения на ветвях в совокупности и являются решением задачи, описывают процесс – поток электрической энергии в цепи.

Источники тока (продольная величина) являются внешними воздействиями, они расположены вне цепи и действуют через узлы входа и выхода. Отклики, напряжения (поперечная величина) возникают на парах узлов, т.е. в разомкнутых путях. Этому виду воздействия соответствует узловый метод расчета. Независимые, базисные пары узлов соответствуют разомкнутым (открытым) путям базиса в данном случае. Проводим расчет напряжений между узлами (начало и конец разомкнутого пути), по ним – падения напряжений на ветвях и токи в ветвях. Напряжения и токи на ветвях в совокупности и являются решением задачи, описывают процесс – поток электрической энергии в цепи.

Продольные величины играют роль контравариантных компонент вектора, а поперечные величины – роль ковариантных компонент. Мощность представляет собой, таким образом, *квадрат величины вектора*, т.е. вектора потока энергии. Продольные и поперечные величины в описании процессов могут играть роль, как воздействий, так и откликов, но содержание этой роли зависит от структуры связей элементов системы, по которой распространяются и преобразуются потоки энергии. Произведение продольной и поперечной величин по физической размерности равно мощности (характеризует поток энергии, энергия в единицу времени). Геометрическая размерность произведения продольной и поперечной величин соответствует полному объему пространства.

Продольные и поперечные величины в этом отношении представляют компоненты вектора потока энергии в системах координат прямого базиса (вдоль линий координат) и взаимного базиса (на векторах, которые касательные к гиперплоскостям, которые ортогональны к линиям координат). Например, электрическое напряжение определяют как разность потенциалов между эквипотенциальными поверхностями, ортогональными проводнику с током.



Сетевая модель сложной системы: процессы и структура двойственных сетей

Рис. 1.2. Двойственность замкнутых и открытых сложных систем



Существуют системы размерностей физических величин, в которых все известные величины выражаются через ряд величин, принятых за основные. Это позволяет сопоставлять физические величины, которые относятся к разным предметным областям, с помощью анализа размерностей. Понятие размерности ввел в физику Фурье в 1822 году. Например, в системе СИ используют шесть основных величин, в системе СГС – три: длина, масса и время. Существует система, в которой все физические величины выражаются через две наиболее фундаментальные – пространство (длина) и время.

Возможность выразить все физические величины через длину и время отмечал Максвелл (Максвелл, 1954), а затем Кельвин, Эддингтон и другие. Разработал такую систему Б. Браун (Brown, 1941) и независимо от него в 1966 году Р.Л. Бартини (Бартини, 1965, Бартини, 1966). Система представлена таблицей, в клетках которой расположены физические величины соответствующей размерности по длине и времени. Фрагмент таблицы LT для размерностей физических величин (Бартини, Кузнецов, 1974; Большаков, 2002) представлен на рис. 1.3.

Время,  $T^{-1}$  (сек.)<sup>-1</sup>

					$L^3 T^{-6}$	$L^4 T^{-6}$	Изменение мощности	Скорость передачи мощности
$T^{-5}$			$L^1 T^{-5}$	Изменение давления $L^2 T^{-5}$	Поверхностная мощность $L^3 T^{-5}$	Скорость изменения силы $L^4 T^{-5}$	<b>Мощность</b> $L^5 T^{-5}$	Скорость передачи энергии
$T^{-4}$			Изменение плотности тока $L^1 T^{-4}$	Давление $L^2 T^{-4}$	Поверхн. натяжение $L^3 T^{-4}$	<b>Сила</b> $L^4 T^{-4}$	Момент силы Энергия $L^5 T^{-4}$	Скорость передачи действия
$T^{-3}$	Гидравлич. сопротивление $L^{-1} T^{-3}$	Изменение углового ускорения $T^{-3}$	Скорость массы Плотность тока $L^1 T^{-3}$	Напряженность электромагн. поля Вязкость $L^2 T^{-3}$	<b>Ток</b> Массовый расход $L^3 T^{-3}$	Скорость смещения заряда Импульс $L^4 T^{-3}$	Момент импульса Действие $L^5 T^{-3}$	Момент действия
$T^{-2}$	Изменение объемной плотности	Массовая плотность Угловое ускорение $T^{-2}$	Линейное ускорение $L^1 T^{-2}$	Напряженность (разность потенциалов) $L^2 T^{-2}$	<b>Масса</b> , Колич-во магнетизма Заряд $L^3 T^{-2}$	Магнитный момент $L^4 T^{-2}$	Момент инерции $L^5 T^{-2}$	
$T^{-1}$	$L^{-1} T^{-1}$	Частота $T^{-1}$	Скорость Электрич. сопротивл. $L^1 T^{-1}$	Скорость изменения площади $L^2 T^{-1}$	Скорость изменения объема $L^3 T^{-1}$	Скорость смещения объема $L^4 T^{-1}$	$L^5 T^{-1}$	
$T^0$	Изменение проводимости	Безразмерные константы	Длина Емкость Самоиндукция $L$	Площадь $L^2$	Объем $L^3$	4-Объем $L^4$	5-Объем $L^5$	
$T^1$	Изменение магнитной проницаемости $L^{-1} T^1$	Период	Длительность расстояния	$L^2 T^1$				
$T^2$	Магнитная проницаемость $L^{-1} T^2$	Поверхность времени	$L^1 T^2$					
$T^3$	$L^{-2} T^3$ Текучесть	$L^{-1} T^3$	Объем времени	Гидравлич. проводимость $L^1 T^3$				
	$L^{-2}$	$L^{-1}$	$L^0$	$L^1$	$L^2$	$L^3$	$L^4$	$L^5$

Длина L, м

Рис. 1.3. LT-таблица размерностей физических величин Бартини-Кузнецова

Выражение величин в данной таблице через длину и время предполагает тождество гравитационной и инерционной массы. «В принципе ниоткуда не следует, что масса, создающая поле тяготения, определяет и инерцию того же тела. Однако опыт показал, что инертная и гравитационная массы пропорциональны друг другу (а при обычном выборе единиц измерения численно равны). Этот фундаментальный закон природы называется принципом эквивалентности. Экспериментально принцип эквивалентности установлен с очень большой точностью» (ФЭС, с 393). *Существование самой LT таблицы можно считать важным теоретическим аргументом в пользу данного принципа.*

Принцип эквивалентности позволяет приравнять силу в уравнениях закона гравитации  $F = m^2/r^2$  и второго закона Ньютона  $F = m a$ . Тогда  $m = r^2 a$ . Обозначая длину  $L$ , а время  $T$ , и учитывая, что размерность обозначают квадратными скобками, получим, что  $[r^2] = L^2$ , а размерность ускорения  $[a] = L^1 T^{-2}$ . Отсюда размерность массы получим:  $[m] = L^3 T^{-2}$ , т.е. выражена через длину и время. Аналогично можно выразить электрический заряд и количество магнетизма, которые попадают в ту же клетку таблицы, что и масса. Например, количество движения (импульс), величина векторная, т.е. имеющая направление, имеет размерность в терминах пространства и времени как произведение массы и скорости

$$[p] = [m] [v] = L^3 T^{-2} L^1 T^1 = L^4 T^{-3}.$$

Клетки таблицы физических величин на рис. 1.3 содержат величины с одинаковой физической размерностью, выраженной через пространство (длину)  $L$  и время  $T$ . Каждую такую величину следует рассматривать как инвариант, постоянство которого относительно определенной группы преобразований соответствует физической теории или закону.

**Уравнение инварианта.** В каждой предметной области произведение соответствующих пар продольных и поперечных величин имеет физическую размерность мощности (потока энергии). В терминах таблицы размерностей физических величин Бартини-Кузнецова это  $[L^5 T^{-5}]$ . Например, электрические ток и напряжение; в механике сила в точке и скорость (как разность положения тела в двух точках в единицу времени); в гидродинамике поток жидкости (объем в единицу времени) и давление; в термодинамике поток тепла и температура; поток массы и концентрация (химический потенциал) и т.д. Распределение размерностей в каждой паре различное, но произведение величин имеет размерность  $[L^5 T^{-5}]$ . Например, ток имеет размерность  $[L^3 T^{-3}]$ , а напряжение –  $[L^2 T^{-2}]$ ; давление –  $[L^2 T^{-4}]$ , а поток жидкости (скорость изменения объема) –  $[L^3 T^{-1}]$ ; сила –  $[L^4 T^{-4}]$ , а скорость –  $[L^1 T^{-1}]$  и т.д. Образно говоря, если мир сложен из одинаковых кирпичей потока энергии, то в разных предметных областях эти кирпичи состоят из разных блоков.

С понятием потока энергии все не так просто, как можно было бы ожидать. Казалось бы, это понятие пронизывает все мироздание. Вместе с тем в физике понятие потока энергии

характеризуют мощностью. Мощность – физическая величина, измеряемая отношением работы к промежутку времени, в течение которого она произведена ( $\Phi ЭС$ , с. 440). В случае непрерывной среды или поля вводятся понятия плотности энергии, т.е. энергии в единице объема и плотности потока энергии, равной произведению плотности энергии на скорость ее перемещения ( $\Phi ЭС$ , с. 903).

В терминах  $LT$  таблицы плотность энергии имеет размерность  $[L^5 T^{-4}] / [L^3] = [L^2 T^{-4}]$ . Тогда плотность потока энергии имеет размерность  $[L^2 T^{-4}] [L^1 T^{-1}] = [L^3 T^{-5}]$ . Это означает, что энергия в единице объема движется с некоторой скоростью, т.е. в определенном направлении. Чтобы получить полный поток, необходимо умножить эту величину на площадь сечения (имеет размерность  $[L^2]$ ), через которое происходит движение. Тогда из плотности потока энергии получим размерность  $[L^3 T^{-5}] [L^2] = [L^5 T^{-5}]$ . Это и есть размерность мощности, или потока энергии.

Существует также понятие «поток излучения» – средняя мощность излучения за время, значительно большее периода колебаний; характеризуется количеством энергии, переносимой электромагнитными волнами в единицу времени через какую-либо поверхность ( $\Phi ЭС$ , с. 582). Строго говоря, потоки, процессы в системах обычно имеют колебательный характер, поэтому их можно характеризовать как поток излучения. Однако в данной работе ставится задача рассмотреть закономерности изменения структуры, а для этого все другие аспекты следует взять в наиболее простом виде, т.е. процессы предполагаются линейными, стационарными. Найденные законы изменения структуры далее предполагают обобщение и применение для колебательных, нелинейных процессов.

Не очень явное положение потока энергии в физике можно объяснить тем, что это понятие связано со структурой, поскольку предполагает направление и канал распространения, а физика не занимается структурой.

Существование открытых и замкнутых систем, а также различная роль в этих системах продольных и поперечных величин в качестве воздействий и откликов, придает  $LT$  таблице новое качество, связанное со структурой. Сама по себе структура в явном виде не входит в данную таблицу. Новое качество связано с пространствами замкнутых и разомкнутых путей, геометрическая размерность которых меняется при изменении структуры каждой сети, но остается постоянной в совокупности структур двух двойственных сетей. В двойственных сетях при изменении структуры остается постоянным поток энергии, характеризуемый мощностью.

Продольные величины в базисе путей играют роль контравариантных компонент вектора потока энергии, который обозначим  $\mathbf{d}$ . Это означает, что при изменении базиса путей, системы координат, они преобразуются с помощью матрицы, которая является

обратной к матрице преобразования векторов базиса<sup>2</sup>. Поперечные величины в базисе путей играют роль ковариантных компонент вектора потока энергии. Это означает, что при изменении базиса путей, системы координат, они преобразуются с помощью такой же матрицы, как матрица преобразования векторов базиса.

**Вектор потока энергии.** Скалярное произведение ковариантных и контравариантных компонент равно, как известно, квадрату величины вектора. Произведение продольных и поперечных величин по физической размерности и по величине равно мощности  $P$  (потоку энергии). Поскольку продольные и поперечные величины это и есть ковариантные и контравариантные компоненты вектора, то, следовательно, *квадрат величины* вектора потока энергии  $\mathbf{d}^2$  равен мощности, т.е. его физическая размерность есть

$$[P] = [\mathbf{d}^2] = [L^5 T^{-5}].$$

Тогда сам этот вектор должен иметь размерность, равную корню квадратному из размерности мощности, т.е. получается, что *вектор потока энергии имеет дробные степени физической размерности*:

$$[\mathbf{d}] = [L^{5/2} T^{-5/2}].$$

С точки зрения логики построения  $LT$  таблицы дробных степеней размерности быть не должно. Кроме того, это указывает на необычное положение вектора потока энергии по отношению к понятиям пространства и времени, по отношению к другим физическим величинам. Действительно, в основу построения таблицы взяты наиболее фундаментальные понятия – длина (протяженность)  $L$ , которая есть основная характеристика пространства, и время  $T$  (длительность). Остальные величины располагаются в таблице как та или иная степень этих основных величин, т.е. пространства и времени. Если говорить точнее, то наблюдаемого нами в настоящее время пространства, и измеряемого нами в данной точке времени. Такая странность в определении размерности вектора потока энергии может быть одной из причин того, что это понятие в физике применяется недостаточно широко. Другой причиной является то, что это понятие, помимо физической составляющей, имеет структурную составляющую.

Появление из приведенных выше рассуждений физической величины с дробной физической размерностью по отношению к пространству и времени расходится с предположением о неизменной фундаментальности этих основ. Или указывает на то, что принимаемое до сих пор предположение о незыблемой фундаментальности пространства и времени является необходимым, но не достаточным. Достаточность возникает из инвариантов двойственности, представленных в предыдущем разделе, и подробнее

---

<sup>2</sup> Речь идет о «прямом» базисе путей. По отношению к «взаимному» базису, который ортогонален прямому базису, ковариантные и контравариантные компоненты меняются ролями (см. гл.2).

рассмотренных в следующих главах. Мощность (поток энергии) остается постоянной (при заданных источниках энергии) при изменении структуры в двойственных сетях. При этом одна сеть располагается в наблюдаемом пространстве, а другая – в двойственном, дополняющем наблюдаемое пространство до целого, более общего пространства.

Расщепление единого пространства на два взаимно дополнительных, двойственных составляющих пространства, восстанавливает размерность потока энергии до целочисленных степеней. Поток энергии расщепляется между двумя такими пространствами, в которых при изменении структуры остается постоянной совокупность независимых замкнутых путей и разомкнутых путей. Одна часть потока располагается в соответствующих путях сети одного пространства, а другая часть – в дополняющих путях двойственного пространства. В каждой из частей поток имеет размерность с дробными степенями, а их единство, композиция дает размерность с целыми степенями.

Рассмотренные понятия (воздействия – отклики, продольные – поперечные, контравариантные – ковариантные величины, замкнутые и разомкнутые пути, открытые и закрытые системы, таблица  $LT$  для классификации измеримых величин) имеют значение для представления сетевыми моделями процессов и структуры сложных систем из разных предметных областей.

**Уравнения поведения.** Для примера рассмотрим задачу электротехники, когда заданы источники тока или напряжения, а найти надо отклики – ток и падение напряжения в каждой ветви. В обозначениях Крона контурные величины (действующие в замкнутых путях) принято обозначать малыми буквами, а узловые величины (действующие в разомкнутых путях) – заглавными буквами.

При внешнем воздействии заданы источники тока (размерность  $[L^3 T^{-3}]$ ), которые действуют через узлы входа и выхода (определяют разомкнутый путь). Откликами являются напряжения – размерность  $[L^2 T^{-2}]$ . Уравнение поведения такой цепи  $I = Y E$ , переменными являются независимые разомкнутые пути (определяемые независимыми парами узлов в узловом методе расчета цепи). Величины  $Y$  составляют матрицу проводимостей (комплексная проводимость – адмитанс). В зависимости от выбора координат (путей) это матрица проводимостей ветвей, или разомкнутых путей. Проводимость имеет размерность  $[L^1 T^{-1}]$ .

Таким образом, для открытой цепи с внешними воздействиями (продольные величины), откликами являются поперечные (ковариантные) величины, переменными – базис разомкнутых путей (матрица преобразования обозначается  $A$ ), а уравнение поведения в физических размерностях имеет вид:

$$I = Y E \qquad [L^3 T^{-3}] = [L^1 T^{-1}] * [L^2 T^{-2}]$$

При внутреннем воздействии заданы источники напряжения – размерность  $[L^2 T^{-2}]$ ; которые действуют в контурах внутри цепи (определяют замкнутый путь, контур). Откликами являются токи (размерность  $[L^3 T^{-3}]$ ). Уравнение поведения такой цепи  $e = Z i$ , переменными являются независимые замкнутые пути (определяемые независимыми контурами в контурном методе расчета цепи). Величины  $Z$  составляют матрицу сопротивлений (комплексное сопротивление – импеданс). В зависимости от выбора координат (путей) это матрица сопротивлений ветвей, или замкнутых путей. Сопротивление имеет размерность  $[L^{-1} T^1]$ .

Таким образом, для замкнутой цепи с внутренними воздействиями (поперечные величины), откликами являются продольные (контравариантные) величины, переменными – базис замкнутых путей (матрица преобразования обозначается  $C$ ), а уравнение поведения в физических размерностях имеет вид:

$$e = Z i \qquad [L^2 T^2] = [L^{-1} T^1] * [L^3 T^{-3}]$$

В цепи с двойственной структурой все происходит точно так же, но количество контуров равно числу разомкнутых путей в наблюдаемой цепи, количество разомкнутых путей равно числу контуров в наблюдаемой цепи.

Процессы в системе возникают при наложении воздействий на невозбужденную систему, возникающие отклики определяются отношениями системы с внешним миром, структурой связи элементов, характеристиками их материи, физической сутью потоков энергии. Вид потоков энергии определяется физической размерностью воздействий и откликов, которые приводят в действие соответствующие свойства материи элементов.

#### 1.1.4. Тензоры для моделирования процессов и структуры

Процессы и структура как понятия (характеристики) присущи всем сложным системам. Это основные свойства некоторой **обобщенной сложной системы всех систем**, категории системы. Задача исследования состоит в определении отношений между этими свойствами в их состоянии и изменениях состояния. Конкретные проявления категории абстрактной сложной системы в разных предметных областях определяются содержанием процессов (физической размерностью) и структуры (геометрической размерностью элементов). Системы различаются по физической сути процессов, по виду структуры связей элементов (точки, линии, плоскости и т.д.), что позволяет их классифицировать.

Обобщенная система рассматривается как абстрактный объект, а классы систем, определяемые типами и количеством процессов, размерностью и составом элементов структуры – как ее проекции в частные системы координат.

Таким образом, предполагается, что множество сложных систем можно разделить на классы, имеющие аналогии процессов и структуры, т.е. сходство двух характеристик:

- количество процессов и вид уравнений, которые эти процессы описывают,
- вид структуры, который определяет размерность элементов и преобразования соединения и разъединения, которые допускаются с ними проводить.

Все системы одного класса можно рассматривать как одну «обобщенную» систему, а разные конкретные системы – как проекции в частные системы координат, и применять для них один метод исследования, расчета, анализа. Процессы и структура являются неразрывными сторонами состояния сложных систем разных предметных областей. Структура играет роль пространства, в котором процессы являются объектами. Объект остается тождественным самому себе при любых его представлениях с разных точек зрения.

Среди систем каждого класса выделяется своя собственная эталонная система, в которой наиболее явно представлены соответствующие процессы и структура, т.е. конкретизация абстрактной категории системы. Такая система может служить эталонным представителем данного класса, использоваться для разработки эквивалентных моделей всех систем, относящихся к данному классу. Виды используемых моделей даны на рис. 1.4.



Рис. 1.4. Виды сетевых моделей, сферы их приложений

Для всех систем одного класса разрабатывается одна математическая модель, в которой отображены процессы и структура, т.е. абстрактное представление эталонной системы, обобщающей данный класс систем. Например, для класса систем, в элементах которых протекает один процесс, описываемый линейными уравнениями, а сами элементы можно представить одномерными отрезками (ветвями) в качестве математической модели должны использоваться двойственные сети.

Метод расчета изменения процессов при изменении структуры математической модели предназначен для исследования и расчета всех систем данного класса. Для этого описание каждой системы класса приводится к виду описания эталонной системы, т.е. выражается математической моделью, которая описывает все особенности ее структуры и протекающих в ней процессов. Исследование поведения конкретной системы производится как расчет и анализ вариантов откликов в математической модели для различных видов структуры и значений воздействий, характеристик элементов.

Результаты проведенных на модели исследований интерпретируются на самой реальной системе для определения изменения ее состояния и прогнозирования поведения при различных условиях. Анализ результатов является основой для принятия решений при проектировании и управлении реальной сложной системой.

Такой методологический подход, когда системы одного класса рассматриваются как «проекции», конкретизации обобщенной системы, а среди всех этих систем выбирается одна в качестве эталонной для моделирования остальных систем, составляет суть применения тензорного метода в теории систем.

Тензорный метод исследования технических и физических систем разрабатывал и демонстрировал его успешные применения Г. Крон. Он первым применял данный метод в большинстве тех областей, которые представлены на рис. 1.4, причем этот список далеко не полный. Он писал: «Удивительно, как мало существует первичных типов элементов, образующих строительные блоки всего разнообразия технических структур... Огромное разнообразие структур отличается только способом соединений, ... а многообразие теорий только типом рассматриваемой гипотетической системы отсчета» (*Kron G., 1942*).

В качестве эталонной системы для класса систем с одним процессом и структурой из одномерных элементов Крон использовал электрические цепи, т.е. одну из систем данного класса. Процесс прохождения электрического тока в цепи описывается законом Ома (с его обобщением на комплексные сопротивления). Структуру и ее преобразования описывают законы Кирхгофа. Крон применял одномерные цепи также для построения моделей электрических машин (электромеханических преобразователей), хотя в них протекают



потоки не только электрической энергии в одномерных проводниках, но и потоки магнитной энергии через поверхности, представленные обмотками.

Вместе с тем электрическая цепь сама является физической системой, а не абстрактной математической моделью, поэтому она не обладает достаточной общностью для адекватного представления других систем данного класса. Крон отмечал, что чем дальше он уходил от области электротехники, тем больше строгости и определенности ему приходилось вносить в применяемые понятия. В том числе такие, которые не требовались для решения задач электротехники. Например, узловый метод расчета цепи оперирует с узлами в цепи, один из которых принимается как базовый, т.е. здесь не требуется вводить разомкнутые пути. Сам Крон первоначально применял понятие «пара узлов», а не разомкнутый путь.

Двойственные сети как раз и являются эталонной системой для моделирования сложных систем широкого класса, они не привязаны к какой-либо конкретной предметной области, описывая на абстрактном уровне взаимодействие процессов и структуры. Метод двойственных сетей допускает (и требует) обобщения на многомерные структуры и системы с многими процессами. Первыми попытками движения в этом направлении были так называемые полиэдральные сети, которые Крон применял в 60-х годах для моделирования многомерных задач.

В теории систем тензорный метод стали трактовать более широко в методологическом, а также и в философском смысле. Прежде всего, это касалось введения структуры, что первоначально вызвало немало критики. Профессор Дж. В. Линн и его сотрудники писали, например: «...С точки зрения Крона тензор более не являлся тензорной величиной с компонентами, определяемыми локальными координатами. Для компонент тензоров Крона координатами являются пути и катушки цепей. Хотя использование им тензорного исчисления не было традиционным, справедливость этого была подтверждена профессиональными физиками и математиками» (*Balasabramanian N.* и др., 1970).

Дискуссии по этим вопросам продолжались десятки лет, на протяжении 30-70-тых годов прошлого века. Далее работы Крона были признаны классическими, растворились в многочисленных научных направлениях, однако стоящие за этими работами фундаментальные основы до сих пор мало известны, не полностью изучены, и не имеют соответствующего научного и практического применения.

Объекты, физические величины существуют и взаимодействуют независимо от наличия наблюдателя. Реальный объект, измеряемый с помощью введенной меры, существует в пространстве независимо от заданных наблюдателем субъективных систем координат, в которых объект представлен своими компонентами (измерен), и вообще независимо от измерений со стороны наблюдателя. Важную роль для исследования, в

частности, для применения тензорного метода в теории систем, играют измерения компонент объектов и преобразование их координат. Системы координат вводят с целью дать возможность наблюдателю определить, измерить объекты. Тем самым вводится субъективизм наблюдателя; для него объект предстает как совокупность компонент, измеренных в заданной системе координат. Разумеется, при переходе к другой системе координат, изменении точки зрения данного наблюдателя, или при переходе к точке зрения другого наблюдателя, необходимо сохранять уверенность, что наблюдаемый, обсуждаемый объект остается тем же самым, инвариантным.

Суть тензорного метода состоит в признании инвариантности объекта в пространстве (вектора, многомерного объема в геометрии; измеряемой величины в физике, технике или экономике). Тензор представляет собой геометрический объект, существующий вне координат, который, однако, измеряется значениями своих компонент в заданных системах координат. Значения компонент в разных системах координат, представляющие один объект, могут быть различными, по ним нельзя сказать, что они соответствуют одной и той же сущности.

Именно представление о существовании объекта-тензора вне субъективизма систем отсчета позволяет приравнять компоненты в разных системах координат. Это и есть основное свойство тензора, которое математически выражается как линейный характер преобразования его компонент при изменении системы отсчета. Если компоненты объекта при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по линейным законам, то это является признаком измеримости объекта и такой объект называется тензором.

Если тензор имеет ненулевые компоненты в одной системе координат, то он будет иметь ненулевые компоненты в любой системе координат. И, наоборот, если тензор имеет нулевые компоненты в одной системе координат, то он будет иметь нулевые компоненты в любой системе координат. Таким образом, реальный объект не исчезает при изменении координат, и не возникает из ничего.

При изменении системы координат, измеряемые компоненты объекта могут меняться по двум законам:

- по такому же закону, как векторы базиса системы координат – ковариантные компоненты (обозначают нижними индексами);
- по закону, противоположному закону изменения векторов базиса системы координат – контравариантные компоненты (обозначают верхними индексами).

Обобщенная абстрактная система может рассматриваться как тензор – представлять обобщенный «тензор» системы, конкретные системы разных предметных областей рассматриваются как ее проекции.

Такая трактовка тензора, как обобщенного понятия целого класса систем, понятий, объектов аналогична тому, как различаются в философии понятия абстрактного и конкретного. Например, есть обобщенное понятие Яблоко. Есть различные сорта яблок как понятия, но они являются сами лишь проекциями понятия Яблоко. Есть конкретное яблоко данного сорта, которое физически измеримо, съедобно, но является проекцией в реальность, представителем данного сорта яблок.

Координаты яблока на столе – в системе координат с началом в одном углу стола, или в другом углу стола, или в углу комнаты будут отличаться друг от друга. Однако преобразование значений этих координат при переходе от одной системы координат к другой системе координат позволяет рассматривать съедобное яблоко как тензор, инвариант относительно группы преобразований координат в пространстве комнаты (или всей планеты).

Кроме того, яблоко – это еще и процесс движения в пространстве и времени от семечка до яблочного джема и его употребления в пищу. В этом процессе есть циклы, связанные с посадкой семечка в землю и выращиванием яблони, на удобрение которой могут пойти результаты потребления джема.

Марина Цветаева в очерке «Борис Пастернак и Владимир Маяковский» пишет, что эти два имени поставлены рядом, потому что в истории поэзии России они стоят рядом. «...ибо поэзия не дробится ни в поэтах, ни на поэтов – она во всех своих проявлениях одна, одна, в каждом – вся, так же как по существу нет поэтов, а есть поэт, один и тот же с начала и до конца мира, сила, окрашивающаяся в цвета данных времен, племен, стран, наречий, лиц, проходящих через нее, силу, несущуюся как река теми или иными берегами, теми или иными небесами, тем или иным днем». То есть этот абстрактный поэт есть инвариант, проекции которого могут принимать разные значения в «системах координат» (или представителях данного класса) – конкретных поэтах.

Следующим этапом структурного обобщения является сама сеть или сетевая модель сложной системы. Сеть, как совокупность данных элементов (ветвей), представляет собой абстрактный объект, а соединения ветвей в различные структуры рассматриваются как проекции этого объекта в разные системы координат, базис которых определен количеством независимых замкнутых и разомкнутых путей. При заданной структуре соединения ветвей можно разными способами выбрать независимые пути в сети, что определит разные системы координат в подпространствах замкнутых и разомкнутых путей. При этом размерность таких подпространств не меняется.

Если структура соединения ветвей меняется так, что вводимые соединения и разъединения меняют число независимых замкнутых и разомкнутых путей, то размерность их подпространств меняется. При этом сам выбор базисных путей может не меняться, просто одни из них станут замкнутыми, другие разомкнутыми, но состав входящих в них ветвей

останется прежним. Однако замкнутые пути, которые разомкнулись, или разомкнутые, которые замкнулись, будут теперь принадлежать другим подпространствам, чем прежде. Конечно, в новой структуре можно выбрать в качестве базисных путей другие пути, чем прежде.

В двойственной сети изменение структуры будет происходить дополнительным, двойственным образом. В двойственной сети каждому замыканию соответствует размыкание, а каждому размыканию соответствует замыкание. Суммарная размерность замкнутых путей и разомкнутых путей в двойственных сетях остается постоянной, равной числу элементов-ветвей.

Таким образом, две двойственные сети вместе можно рассматривать как тензор, а различные структуры соединения их ветвей, сохраняющие свойства двойственности, – как проекции этого объекта в разные системы координат пространства сети. При таких преобразованиях координат величины процессов, характеристики материи элементов преобразуются по линейным законам, с помощью матриц преобразования путей. То есть объекты в сети являются тензорами. Их тензорный характер инвариантен относительно группы преобразования структуры двойственных сетей. Преобразования структуры сетей и объектов, расположенных в сети, наложенных на пространство сети, составляют тензорный анализ сетей.

Для приведения описания, уравнений сложной системы к тензорному виду, и построению сетевой модели, необходимо установить, как меняется каждый показатель при изменении структуры. Часто оказывается, что для приведения к тензорному виду необходимо расширить состав показателей, или объединить несколько показателей, которые в таком виде больше соответствуют представлению реальных измеримых величин. В постановке задачи, которая не учитывает структуру системы, такие изменения не всегда очевидны.

В монографии «Тензорный анализ сетей» Г. Крон рассматривал постулаты тензорного обобщения, которые соответствуют представленным выше уровням обобщения (*Крон, 1978*). Не была только выделена категория – тензор обобщенной системы. Однако он начинал с еще более простого постулата обобщения – от описания характеристик одного элемента к описанию характеристик многих элементов. То есть, от чисел к векторам, от векторов к двумерным матрицам, от двумерных матриц к трехмерным матрицам, и т.д. Такое обобщение носит числовой, матричный характер, оно не связано с преобразованием «изображения» объекта при изменении систем координат.

Таким образом, имеем следующий ряд тензорных обобщений.

Обобщенная система (категория или тензор) состоит из классов систем с различными видами процессов и структуры, которые рассматриваются как ее «проекции» в системах координат.

Класс – это тензор для совокупности систем данного вида. Классы состоят из систем разных предметных областей, имеющих аналогии процессов и структуры. Эталонная система может рассматриваться как представитель класса с наиболее явно выраженными свойствами процессов и структуры.

Математическая модель для тензорного представления систем одного класса отображает преобразования соединения и разъединения. Это тензор для совокупности структур. Совокупность элементов представляет объект, а разные структуры связи элементов – проекции объекта в разные системы координат.

Один элемент системы, который содержит все основные характеристики данной предметной области, рассматривается как «молекула», а совокупность элементов формирует матрицу самой системы.

Таким образом, тензорный метод двойственных сетей объединяет описание структуры и процессов сложных систем в пространстве-структуре. Новые инварианты двойственных сетей позволяют получать информацию о свойствах систем, которые не входили в исходную постановку задачи в описании систем. Тензорный метод обеспечивает моделирование процессов и структуры систем с помощью сетевых моделей. Инварианты двойственных сетей обеспечивают применение сетевых моделей для исследования, расчета, анализа и управления в сложных системах разных предметных областей.

### **1.1.5. Процессы и структура многомерных систем**

Результаты применения тензорного метода двойственных сетей показывают, что этот подход может применяться при исследовании взаимодействия процессов и структуры сложных систем, элементы которых имеют многомерную конфигурацию.

1. Поиск новых закономерностей преобразования структуры двойственных сетей и наложенных на сеть не только векторов, но и многомерных объектов (представляющих процессы). Для одномерных сетей такие закономерности выражаются совокупностью инвариантов, которые представлены в главе 2.

Дальнейшие исследования необходимо направить на анализ преобразования структуры многомерных сетей и связанных с ними многомерных объектов (представляющих сложные потоки в многомерных, полиэдральных сетях). Это позволит рассматривать электромагнитные системы, относящиеся к органической химии и биологии. В задачах экономики это позволит рассматривать совокупность сетей производства, потребления и

утилизации товаров и услуг, товарных рынков, сетей банков и фондовых рынков, других финансовых организаций в рамках единой информационно-аналитической системы.

2. Применение двойственных сетей к решению проблемы части и целого. Инварианты двойственных сетей, связывающие процессы и структуру, дали алгоритмы расчета сетевых моделей сложных систем при изменении структуры. В том числе и в первую очередь сюда относятся алгоритмы расчета сетей по частям. При этом сеть разделяется на подсистемы необходимого или произвольного размера, производится независимый расчет подсистем, а затем результаты расчета частей объединяются в решение всей системы. Инварианты двойственных сетей обеспечивают таким алгоритмам отсутствие итераций, связанных с необходимостью последовательного расчета взаимного влияния частей в целом, когда они влияют друг на друга, а затем расчет влияния этих дополнительных воздействий, и т.д., что приводит к резкому снижению эффективности вычислений.

При разделении на части сетей и сетевых моделей взаимное влияние подсистем «запасается» в двойственной сети в соответствии с инвариантом двойственных сетей. В двойственной сети производится расчет сети, состоящей только из ветвей тех путей, которые изменились при разделении на части. Результат расчета этой, сравнительно небольшой сети, сразу дает в полном объеме те дополнительные воздействия, которые возникают при соединении частей в целое. При этом не возникает итераций, повышается эффективность. Готовые результаты расчета подсистем можно использовать при компоновке частей в новые системы, с новой структурой связи подсистем.

Полученные алгоритмы для любых изменений структуры двойственных сетей, вместе с примерами расчета и оценкой эффективности расчетов, представлены в главе 3. Эти алгоритмы могут и должны применяться для организации параллельных вычислений на компьютерах с параллельной архитектурой, роль которых в исследовании, проектировании и управлении сложными системами постоянно растет.

3. В главе 4 рассмотрены физические аспекты закономерностей, связанных с двойственными сетями. Постоянство мощности при изменении структуры двух двойственных электрических цепей можно рассматривать как проявление закона сохранения потока энергии. Наличие потока предполагает существование канала его распространения. Совокупность каналов образует связанную структуру распространения потоков энергии. Таким образом, закон сохранения потока энергии является не просто физическим, а физико-структурным законом.

По этой причине данный закон не мог быть открыт в рамках только физики, которая не рассматривает структуру связей и закономерности ее изменения в изучаемых явлениях. Это позволяет предположить, что должна учитываться структура при исследовании законов

поведения физических объектов, размерность которых соответствует в  $LT$ -таблице Бартини – Кузнецова степени  $L^5T^{-5}$ , и более высоким степеням.

Такие объекты должны анализироваться не только по сути самого физического явления, в плане поиска закона изменения и постоянства одних физических величин в зависимости от изменения других величин, но также и во взаимодействии со структурой связей соответствующих уровней сложности (размерности). Это и есть физическое проявление полиэдральных сетей, которые в опытах Крона середины 60-х годов при возбуждении электромагнитными волнами демонстрировали свойства самоорганизации и адаптации к внешним воздействиям. Такие свойства можно рассматривать как простейшие проявления свойств искусственного мозга, или отличительную особенность поведения живого организма.

Данный подход является логическим развитием следствий известной первой теоремы Нётер, которая устанавливает связь между инфинитезимальными симметриями функционала и законами сохранения для соответствующей системы уравнений Эйлера-Лагранжа, дающей необходимые условия экстремума функционала.

Инвариантность функций Лагранжа различных физических полей относительно параллельных переносов и преобразований Лоренца (следствие однородности и изотропности пространства-времени Минковского) приводит, в соответствии с теоремой Нётер, к тензору энергии-импульса и тензору момента количества движения поля и к соответствующим им законам сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Инвариантность функционала действия электромагнитного поля относительно градиентных преобразований приводит к закону сохранения электрического заряда. Аналогично получаются законы сохранения различных зарядов (*Математическая энциклопедия*, т. 3, стб. 1021-1023, 1982).

Постоянство потока энергии при изменении структуры двойственных электрических цепей позволяет предположить, что кроме заданной наблюдаемой цепи существует и двойственная, ненаблюдаемая цепь. Можно предположить, что такая цепь располагается в некотором «параллельном», ненаблюдаемом пространстве, которое образует с наблюдаемым пространством единое целое. Разумеется, что закономерность постоянства мощности при изменении структуры двойственных электрических цепей является только *простейшим проявлением закона сохранения потока энергии, который должен иметь место и для преобразования других структур.*

В частности, необходимо найти форму проявления аналогичной закономерности при изменении структуры электромагнитных сетей. Заметим, что электрический ток распространяется через одномерные ветви. Постоянство потока энергии в структуре

двойственных электрических цепей выражается диаграммой «детского мячика», рассмотренной в главе 4. Для электрических цепей такая диаграмма фактически является плоской, а не объемной, как она представлена. Объемность данной диаграммы интуитивно следует из необходимости ее дальнейшего распространения на электромагнитные явления.

Постоянство потока электромагнитной энергии (выражаемое сохранением рассеиваемой мощности) при изменении структуры таких сетей должно выражаться объемной диаграммой «детского мячика».

Логика исследования не всегда бывает простой. На самом деле автор сначала обнаружил постоянство мощности в двойственных электрических цепях, пытаясь найти обоснование постулата Крона об инвариантности мощности. На этой основе затем были найдены выражения для абстрактных инвариантов двойственных сетей.

Вместе с тем существование физической закономерности сохранения потока энергии при изменении структуры двойственных сетей указывает на возможность существования другого пространства, двойственного, дополнительного к наблюдаемому нами пространству. То есть, пространства, дополняющего наше пространство до некоторой единой сущности. Это двойственное пространство взаимодействует с нашим пространством в процессе преобразования потоков энергии. С такой точки зрения можно иначе взглянуть, например, на изучение проблем сознания и подсознания, на вопросы существования души и ее взаимодействия с телесной материальной оболочкой. Все это может стать важным направлением дальнейших исследований. Такой подход дает физическое содержание понятию ноосферы, которое развито в работах В.И. Вернадского и его последователей. Это позволяет рассматривать явления жизни как двойственную систему концентрации потоков свободной энергии, связанную с процессами в ненаблюдаемой в настоящее время части Вселенной. Действие данной системы уравнивает тенденцию рассеивания свободной энергии в неживой части Вселенной.

4. Важным направлением развития является развитие технологии создания, построения эквивалентных сетевых моделей для разных предметных областей. Основные черты этой технологии рассмотрены в данной главе, а примеры применения, в том числе для экономических систем, рассмотрены в главе 5. Многомерные системы – это не только электрические машины, но и, например, социально-экономическая система. Сетевые потоки товаров, денежных средств (в обороте, в платежных системах, на фондовых рынках), информации – все они перемещаются в разных измерениях, образуют различные сети, но их состояние и поведение зависит друг от друга. Многоатомные молекулы, сложные органические соединения, живые клетки также представляют собой многомерные системы. Сетевые модели позволят объединить анализ их структуры и процессов.



## 1.2. Тензорный метод исследования систем

### 1.2.1. Состав тензорного метода

По своей сути тензорный метод обеспечивает расчет и анализ реальных объектов, измеримых величин, представленных своими компонентами в координатах, соответствующих тому или иному базису. Тензоры предназначены для представления и преобразования объектов в пространстве.

**Пространство** – совокупность одинаковых объектов-точек, между которыми есть определенные отношения, установленные системой аксиом и вытекающих из этих аксиом теорем. Абстрактному геометрическому пространству можно сопоставить физическое материальное пространство, если каждому объекту-точке соответствует какой-либо образ (измеряемый объект) физического пространства.

**Арифметизация пространства** (*Фридман, 1965*) состоит в приписывании различных наборов чисел точкам, которые отличаются друг от друга. Арифметизация позволяет одни точки выражать через другие точки с помощью линейных комбинаций с числовыми коэффициентами. Наименьшее число точек, которое необходимо для выражения любой точки с помощью линейной комбинации, представляет собой размерность пространства. Приписав каждой точке определенную тройку чисел и считая, что каждой тройке чисел соответствует одна и только одна точка, получим арифметизацию трехмерного пространства. Процесс арифметизации произволен, выбор чисел заранее ничем не ограничен, но, задав его, мы определяем некоторые координаты в пространстве. Переход от одного способа арифметизации пространства к другому называется преобразованием координат.

Независимое измерение является единицей размерности пространства. Каждое число в наборе, определяющем точку, соответствует одной координате, которая представляет одно независимое измерение. Задав координату, как независимое измерение, необходимо выбрать единичный масштаб по этому измерению, который позволит сравнивать точки. Совокупность координат, охватывающая все независимые измерения (направления) в пространстве, составляет систему координат. Базис определяет выбор независимых направлений и эталонного масштаба в каждом направлении системы координат.

**Объекты в пространстве** предстают как совокупность числовых значений в каждой точке пространства. Размерность объекта определяется количеством чисел, которые характеризуют его положение (состояние) по каждому измерению (направлению) в каждой точке. Если по каждому измерению пространства объект выражается (характеризуется) одним числом, то такой объект является одномерным (вектор). Вектор базиса имеет единичное значение вдоль выбранного для него направления и нулевые значения по остальным направлениям.

**Представление объектов** компонентами в системах координат. Компоненты объектов представляют измерением значения (состояния) объекта по данному направлению-измерению в сравнении с эталоном базиса.

**Измерения**<sup>3</sup>. Все измерения производятся сопоставлением по четырем точкам. Две точки определяют единичный масштаб и две точки – состояние объекта по каждой оси-направлению. Все измерения, в конечном счете, сводятся к измерению длины и измерению времени. Измерения длины определяют разомкнутые пути, а измерения времени определяют замкнутые пути.

**Для измерения длины** (протяженности) производится выбор направления (линии) и выбор двух точек на линии, расстояние между которыми равно единице. Процедура измерения: измеряемая длина, которая определяется двумя точками (начала и окончания) накладывается на линию с эталоном-масштабом и производится счет – на сколько измеряемый отрезок отличается от эталона.

Таким образом, *измерение длины, протяженности, обычно связано с разомкнутой линией-путем*. Только в проективной геометрии, где каждая прямая в положительной бесконечности замкнута на отрицательную бесконечность, возникает разомкнутая цикличность. Цикл (контур) проективной прямой можно также рассматривать как разомкнутый. Дело в том, что бесконечно удаленная точка (несобственный элемент в проективной геометрии) остается недоступна.

**Для измерения времени** (длительности) также сначала производится выбор эталона, т.е. периодически повторяемого события (движения небесных тел по орбитам, стрелки часов по циферблату, электрона в атоме и т.д.). Таким образом, всегда эталоном оказывается время полного оборота по окружности или иной замкнутой кривой. Следовательно, *измерение времени всегда связано с замкнутым путем*. Измеряется длительность движения (объекта) по замкнутому пути из начальной точки и возвращения в исходную точку. Таким образом, здесь две точки эталона совпадают. Измеряемый промежуток времени, имеющий две точки – начала и окончания – сравнивается с эталоном, т.е. производится счет, на сколько этот промежуток отличается от эталона.

Величина – это качество, определяемое физической размерностью. Измерение значений качества – численные значения компонент в системах координат.

Задав масштаб по каждому независимому направлению (измерению) в пространстве, получим базис. Каждый объект в каждом состоянии измеряется компонентами в базисе.

---

<sup>3</sup> Следует отличать понятие «измерение величины» в смысле замер величины, от понятия «измерение в пространстве» в смысле независимое направление многомерного пространства.

Значение компонента показывает, во сколько раз значение (состояние) объекта по данному направлению отличается от эталона-базиса.

**Изменение значений компонент объекта в системе координат** может означать осуществление одной из двух равноправных возможностей (или обеих вместе). Эти две возможности в математике формулируют как *активную* и *пассивную* точки зрения на преобразование координат.

	Система координат в пространстве	Положение (состояние) объекта в пространстве
Активная точка зрения на преобразование координат	Не меняется	Меняется
Пассивная точка зрения на преобразование координат	Меняется	Не меняется

Эти возможности равноправны. Более того, может одновременно происходить изменение системы координат и изменение положения (состояния) объекта в пространстве. *Тензорный метод основан на выборе пассивной точки зрения на преобразование координат.* Т.е. объект считается неизменным, инвариантным и рассматриваются изменения его компонент при изменении системы координат.

При изменении системы координат можно выразить компоненты нового базиса через компоненты старого базиса. Коэффициенты при старых векторах базиса, которые выражают значения векторов нового базиса, составляют квадратную таблицу (матрицу). Это матрица преобразования векторов базиса при изменении системы координат. Если размерности новой и старой систем координат различны (например, они представляют пространства разной размерности), то матрица преобразования не будет квадратной.

Компоненты объекта в пространстве изменяются при изменении системы координат. Компоненты объекта, которые меняются умножением на матрицу преобразования векторов базиса, называются ковариантными. Компоненты объекта, которые меняются умножением на обратную матрицу преобразования векторов базиса, называются контравариантными. Если преобразование компонент объекта происходит по линейному закону умножением на матрицу преобразования векторов базиса и/или обратную матрицу преобразования векторов базиса в соответствии с размерностью (валентностью) самого объекта, то такой объект называется *тензор*.

Линейность преобразований компонент тензора обеспечивает определенную свободу перехода между системами координат. Инвариантность тензора, его независимость от системы координат (и вообще от существования координат) состоит в том, что если тензор имеет ненулевые значения в одной (любой) системе координат, то он будет иметь ненулевые значения в любой другой системе координат. И наоборот, если тензор имеет нулевые значения в одной системе координат, то он будет иметь нулевые значения в любой другой

системе координат. Можно образно сказать, что не возникают из ничего «миражи», но никакая реальность при изменении координат не исчезает. Этот подход и соответствует выбору пассивной точки зрения на преобразование координат. Предполагается, что сам объект, тензор не меняется, а меняются только значения его компонент при изменении координат.

Заметим, что есть некоторое противоречие между элементами, составляющими пространство и объектами в пространстве, преобразование компонент которых представляет наибольший интерес с точки зрения моделирования процессов и структуры сложных систем.

Пространство традиционно представляется как совокупность однородных элементов. Независимые наборы элементов образуют базис. Элемент считается независимым, если его нельзя представить как линейную комбинацию других элементов с использованием операций сложения, вычитания и умножения на целые числа. При этом вычитание можно рассматривать как умножение на минус единицу. Это позволяет ввести направление ориентации элементов, или направление прохождения элементов-объектов.

В рамках пространства можно ввести преобразования элементов самого пространства – заменять одни базисные элементы на другие, выражать небазисные элементы через базисные элементы и рассматривать преобразование их компонент при переходе от одного базиса к другому базису.

Однако возникает необходимость рассматривать другие элементы-объекты, которые внедрены в среду элементов, составляющих само пространство. Такие наложенные, внедренные элементы-объекты соотносятся с элементами самого пространства, принимая некоторые значения, которые называют компонентами. Компоненты наложенных векторов при изменении базиса (в котором они представлены своими компонентами), меняются по другим законам, чем компоненты самих элементов пространства. Эти законы преобразования зависят от свойств и сложности наложенных объектов.

Такие особенности наложенных объектов особенно заметны при переходе от традиционного пространства геометрии, однородного и всюду плотного, а также изотропного, т.е. имеющего одинаковые свойства по всем направлениям к новому пространству, которое имеет другие свойства.

Например, пространство сети, в котором границы пространства заданы совокупностью ветвей. Вдоль ветвей пространство существует, а вне ветвей пространство не существует. Выбор и преобразование базисов в таком пространстве-структуре практически не отличается от аналогичных операций в обычном пространстве. Координатами являются независимые замкнутые и разомкнутые пути, которые определяют состав и порядок прохождения элементов сети.

Однако если возникает наложенный вектор, то оказывается, что он обладает разными свойствами, в зависимости от того, задан он в замкнутых путях или в разомкнутых путях.

Вектор, заданный в контурах (замкнутых путях), является внутренним вектором в сети. Это проявляется в том, что он может иметь компоненты только в замкнутых путях и не может иметь компоненты в разомкнутых путях.

Напротив, вектор, заданный в разомкнутых путях, является внешним вектором в сети. Это проявляется в том, что он может иметь компоненты только в разомкнутых путях и не может иметь компоненты в замкнутых путях.

Таким образом, в сети, в отличие от обычного пространства, появляются объекты, которые принимают значения только в одной части пространства, т.е. в подпространстве, и не принимают значений в другой части пространства. В двойственной сети подпространства замкнутых и разомкнутых путей дополняются до размерности полного пространства для путей каждого типа.

Из сказанного следует, что тензор является адекватным и удобным представлением измеримых величин (например, характеристик сложной системы), существование которых не зависит от самого факта проведения измерений, т.е. является инвариантом. Например, величина вектора является инвариантом и лишь выражается разными значениями компонент в разных системах координат.

В состав тензорного метода входят понятия пространства (тип которого зависит от той предметной области, где применяется данный метод), координат, базиса, преобразования координат, инвариантных (измеряемых) объектов в пространстве, компоненты которых при изменении систем координат преобразуются по различным законам. Основные области применения тензорного метода в различных областях и соответствующие им типы пространств рассмотрены в следующих разделах.

### **1.2.2. Тензоры в математике и физике**

Начнем с формальной сути тензорного метода в математике. В тензорном исчислении рассматриваются специальные математические объекты *тензоры*, задаваемые в каждой точке пространства и меняющиеся от точки к точке. Роль таких «точек» могут играть элементы различной природы, которые определяются набором чисел – «проекциями» в каждой системе координат. При этом в математике каждый объект должен определяться во всех системах координат *одинаковым числом компонент*. В физике значение каждой компоненты представляет собой обычно результат физического измерения. В теории систем при изменении структуры *количество компонент может меняться* и в этом главное отличие условий применения тензоров в разных предметных областях.

Тензорное исчисление представляет собой составную часть дифференциальной геометрии и делится на тензорную алгебру и тензорный анализ. Тензорная алгебра является обобщением теории векторных пространств, линейных алгебр, представляя собой наиболее важную составную часть полилинейной алгебры. Тензорный анализ изучает тензоры как функции точек (тензорное поле) и применяется в основном для описания пространства с кривизной и в физике (теория упругости, теория поля). Выражаясь терминами математики, тензорный анализ изучает дифференциальные операторы на алгебре тензорных полей.

Понятие тензора стали использовать, начиная с середины XIX века в механике при описании упругих деформаций (*Мат. энциклопедия*, т.5, стб. 330). Первоначально тензорный анализ называли «абсолютное исчисление». Как составная часть дифференциальной геометрии тензорное исчисление впервые было систематически изложено Г. Риччи и Т. Леви-Чивитой (*Ricci, Levi-Civita*, 1901). В те времена абсолютное исчисление часто называли также «исчислением Риччи». Сами термины «тензор», «тензорный анализ» появились позднее.

Термин «*тензор*» ввел В. Фойгт (*Voigt*, 1898). Позднее О. Веблен утверждал (*Веблен*, 1949): «удобное, хотя и не оправданное исторически название *тензор*, было введено Эйнштейном (*A. Einstein*, 1916) и распространилось благодаря теории относительности». С того времени «некоторые виды тензорного исчисления всегда являлись наилучшим инструментом для исследования анизотропных сред» (*Схоутен*, 1965). С начала XX века аппарат тензорного исчисления систематически используется в релятивистской физике (*A. Einstein, M. Grassmann*, 1914).

Под тензором порой понимают величину, которая имеет в каждой точке пространства произвольное количество компонент по каждой оси координат, и представляют такую величину матрицей. В теории упругости, например, тензор упругости в каждой точке вещества представляют *матрицей* третьего порядка: на главной диагонали – значения нормальных напряжений, действующих на элемент вещества в данной точке, а вне диагонали – значения касательных напряжений.

Вместе с тем главное качество тензора не только и не столько в этом. В широком смысле слова *тензором* называют инварианты или геометрические объекты, если их математические свойства можно описать в терминах операций, не зависящих от системы отсчета или даже вообще существования систем координат. Чтобы представить тензор аналитически или численно, вводят систему координат и записывают значения компонент тензора («проекции» на каждую ось). Аналитическое представление указывает на количество и тип компонент тензора.

Отличие тензора от других геометрических объектов состоит в том, что при изменении системы координат его компоненты преобразуются от старых координат к новым координатам по линейным законам, которые включают только матрицу преобразования координат базиса, т.е. при переходе от старого базиса к новому базису. Каждая компонента тензора умножается на эту матрицу, или обратную к ней матрицу, в зависимости от того, преобразуется данная компонента тензора так же, как вектор базиса, т.е. *ковариантно*, или наоборот, т.е. *контравариантно*.

В реальном физическом пространстве понятию тензора соответствует понятие измеримой величины. Именно измеримые величины преобразуются при изменении систем отсчета по линейным законам. На этом основаны приложения тензорного анализа в физике. Применения тензоров в технике, экономике, биологии и др. возможно в той степени, в какой применяемые там величины являются измеримыми.

Таким образом, основное свойство тензора – линейное преобразование его компонент при изменении системы координат. Пусть матрицей  $C_a^{\hat{a}}$  в пространстве  $n$  измерений задано преобразование старого базиса  $p_\alpha$  системы координат  $a = (a_1, \dots, a_n)$  в новый базис  $p_\alpha$  координат  $\hat{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)$  и старый базис преобразуется в новый по формуле  $p_{\hat{a}} = C_a^{\hat{a}} p_a$ .

Тогда *тензор* – это геометрический объект, величина, заданная в каждой точке пространства своими (в общем случае – многими) компонентами. При этом каждая из компонент имеет значения по каждой оси координат в данной точке пространства и при изменении системы координат преобразуется с помощью либо той же матрицы  $C_a^{\hat{a}}$ , что и вектор базиса  $p_a$  (ковариантная компонента), либо с помощью обратной  $C^{\hat{a}}_a = (C_a^{\hat{a}})^{-1}$  (контравариантная компонента).

Итак, тензором может быть и скаляр – 0-тензор (нулевого ранга), и вектор – 1-тензор (первого ранга), и матрица – 2-тензор, и трехмерная матрица – 3-тензор, и т.д. (*Кочин*, 1965). Каждый набор чисел представляет тензор, т.е. компоненты тензора в одной системе координат. Для определения тензора надо указать закон, правило составления матрицы преобразования этих компонент при изменении системы координат.

В общем виде *тензор* в математике – это геометрический объект в пространстве  $n$  измерений, который в каждой точке задан  $(p + r)$  параметрами-функциями, имеющими  $n$  проекций-компонент по каждой оси координат:

$$T_{b_1, \dots, b_p}^{m_1, \dots, m_r} \quad (1.1)$$

При этом  $p$  компонент преобразуются как ковариантные (обозначаются нижним индексом), т.е. матрицей  $C_a^{\hat{a}}$ , а  $r$  – как контравариантные (обозначаются верхним индексом) – обратной

матрицей  $C^a_a$ . Формула преобразования *тензора*  $T$ ,  $p$  раз ковариантного и  $r$  раз контравариантного, имеет вид:

$$T^{mn \dots w}_{ab \dots g} \quad (1.2)$$

Таким образом, при переходе от одной системы координат к другой компоненты тензора преобразуются линейно и однородно, при этом тип тензора определяется законом преобразования его компонент, а общее число индексов называется рангом (валентностью) тензора. Например, один раз контравариантный тензор имеет формулу преобразования:

$$T^a = C^a_b T^b, \quad (1.3)$$

а один раз ковариантный, и два раза контравариантный тензор преобразуется по формуле:

$$T^{a \ q}_{g} = C^a_a \cdot C^q_q \cdot C^g_g \cdot T^{aq}_g \quad (1.4)$$

Тензорный анализ называли также «*исчислением Риччи*», который ввел употребление верхних и нижних индексов для различения двух законов преобразования объектов при изменении системы отсчета (*Ricci J.*, 1889).

Важным свойством тензоров является сохранение результатов сложения, внешнего и внутреннего умножения, свертывания, а также равенство тензоров при любом допустимом преобразовании координат. В силу линейности формул преобразования, если компоненты любого тензора равны все сразу нулю в одной системе координат, то они должны равняться нулю в любой другой системе координат. И наоборот, если они не равны нулю в одной системе координат, то их нельзя обратить в нуль в другой системе координат. Это позволяет использовать тензоры для представления *физически измеримых величин*, абсолютные параметры которых не зависят от системы координат, связанной с наблюдателем.

Для приложений в теории систем важно то, что если компоненты тензора определены в одной системе координат, то в любой другой его компоненты можно получить преобразованиями по формуле типа (1.3). Часто это проще, чем получать новые компоненты заново.

Не все геометрические объекты, представимые значениями компонент в системе координат, являются тензорами. При изменении системы координат их формулы преобразования могут оказаться сложнее, чем линейные однородные, как (1.3 и 1.4). Известный пример геометрического объекта, который не является тензором - это дифференциал ковариантного вектора  $A_i$ , компоненты которого  $A_i$  являются функциями точки и преобразуются аналогично (1.4), по закону:  $A_i = C_i^j A_j$ . Составим полный дифференциал вектора:



$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k \quad (1.5)$$

При изменении системы координат получим формулу преобразования дифференциала:

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k \quad (1.6)$$

Эта формула, как можно видеть, отличается от линейной вторым слагаемым в правой части. Для приведения этой величины к тензорному виду используются дифференциальные уравнения геодезической линии, в которых появляются так называемые символы Кристоффеля –  $\Gamma_{i,ab}$ . Символы Кристоффеля – это линейные комбинации производных по разным координатам метрического тензора, но сами они не тензоры. Таким образом, сложение объектов, *не тензоров*, приводит понятие дифференциала к *тензорному* виду, что позволяет затем определить ковариантную производную для тензорного анализа в римановом пространстве.

Величины, составляющие уравнения поведения сложных систем, также не всегда имеют тензорный характер преобразования при изменении структуры. Однако привлечением таких дополнительных величин и соотношений, которые дополняют описание структуры полным представлением отношений между потоками, можно привести все величины и уравнения системы к тензорному виду. Как правило, в других методах исследования таких систем эти величины и соотношения не используются, поскольку оказываются избыточными или тривиальными. Они становятся необходимы при рассмотрении структуры системы.

В современной геометрии роль тензоров растет. Изложение геометрии без понятия тензора является, по существу, искусственным, во многом неправильно трактуя методы и идеи современной геометрии (*Мантуров О.В.*, 1991). Как отмечено выше, в физике и геометрии величина тензоров не меняется при изменении координат, является инвариантом, а преобразования координат образуют группу.

Но на пути применения тензорного метода в новом, ранее не известном пространстве структур технических систем оказались теоретические препятствия. Не просто так критиковали Крона. Ключевым понятием тензорного анализа сетей является постулат Крона об инвариантности мощности при изменении структуры сетей, например, при соединении ветвей. Вывод тензорных формул преобразования требует *предположения*, что мощность в электрической цепи при соединении отдельных ветвей остается постоянной.

Однако при наложении связей мощность меняется. Электрические токи всегда меньше (не больше) токов в источниках энергии (напряжения или тока). Этот физический факт ясен интуитивно. Он доказывается в теории графов теоремой Волавера (*Свами*, 1884, с. 241) о не усилении мощности при наложении связей в графе сети (на основании леммы Минти).

Автор обнаружил новую закономерность, которая показывает, что инвариант мощности существует только для *двух двойственных* сетей. Постоянство мощности при изменении структуры двойственных электрических цепей является частным случаем приложения математического свойства данного инварианта к конкретной физической проблеме.

### **1.2.3. Тензорный метод в технике и экономике**

Сложные технические, экономические системы состоят из элементов, схема соединения которых образует структуру. В элементах протекают процессы - потоки одних измеримых величин под действием других измеримых величин. Задача расчета состоит в определении откликов в элементах системы на приложенные воздействия с учетом инерции, сопротивления материи элементов. Особенности природы исследуемой системы учитываются при построении сетевой модели с использованием аналогий их процессов и структуры. Расчеты сетевой модели производятся для любой системы данного класса одним методом, основанным на свойствах двойственных сетей.

*Геометрический объект*, например вектор, задают набором компонент в некотором базисе, связанном с системой отсчета. *Физическую величину* можно задать набором показаний приборов (например, токи в ветвях электрической цепи – показаниями амперметров в контурах, потоки денежных средств на предприятии – показателями бухгалтерской отчетности). При изменении системы отсчета значения компонент меняются, но сам объект инвариантен. Например, приборы можно расположить в других контурах, их показания изменятся, но токи в ветвях останутся прежними. Можно перейти на новый План счетов бухгалтерского учета, но экономические показатели не изменятся.

Тензор представляет собой инвариантный объект, существующий вне зависимости от систем координат. Его компоненты в разных системах координат принимают разные значения, подобно тому, как фотографии показывают один и тот же объект с разных точек съемки. Разные наборы компонент можно приравнять друг к другу через преобразования координат именно потому, что они представляют один и тот же объект, но с разных точек зрения.

Тензоры, введенные в геометрии, нашли применение в физике, где одно и то же физическое явление, процесс, описывается через измерение разными приборами и в разных условиях измерения, которые играют роль координат. При этом известные применения в физике относятся к непрерывному, изотропному и всюду плотному пространству, с которым соотносится физическое пространство. Теорией таких пространств являются, например, геометрии Евклида, Лобачевского, Римана.

Применение тензоров для сложных технических и экономических систем относится к пространству другого типа. Это неоднородное пространство-структура, которое

расположено только вдоль выделенных линий, ветвей, а в общем случае – многомерных гиперплоскостей, которые могут соединяться друг с другом. Изменение соединений рассматривается как преобразование координат. При таком преобразовании меняются не только параметры *структуры*, но также значения всех величин, характеризующих воздействия, отклики, метрику, т.е. *процессы*, происходящие в системе.

Совокупность систем, где потоки энергии одного типа протекают в сети из 1-мерных ветвей, можно рассматривать как одну одномерную *обобщенную систему*, частными проявлениями которой являются электрические цепи, транспортные, трубопроводные системы, электроэнергетические и гидравлические сети и т.д.

Совокупность систем, в которых процессы двух типов протекают в сетях из двумерных поверхностей и одномерных ветвей (к ним относятся электромеханические преобразователи энергии – электрические машины – и другие аналогичные системы), можно рассматривать как двумерную *обобщенную систему*. И так далее – до многомерных сетей.

**Сетевые модели систем.** Применение математики предполагает, что любую систему можно представить математической моделью, которая представляет ее с тем или иным уровнем точности и соответствия. В дальнейшем можно совершать все действия с полученной моделью по правилам математики, которым она подчиняется. Результаты таких действий – преобразование, расчет модели, анализ ее поведения в различных условиях и режимах – переносятся на реальную систему с учетом степени достоверности.

«Общая идея современной науки состоит в том, чтобы построить формальную систему столь общую, чтобы она охватывала все возможные системы, давая возможность провести их анализ, решение и т.д. ... Будучи сделанной, формальная модель уже интересует нас только сама по себе, безотносительно к реальным процессам, которые в ней протекают, и для которых сделана сама модель. Так, например, построив систему дифференциальных уравнений, описывающих некоторую реальную систему, мы более не интересуемся этой реальной системой, исследуя только полученные дифференциальные уравнения как таковые. Даже сам процесс моделирования всегда оставался вне рамок науки». Так говорил проф. Д.А. Поспелов в докладе, сделанном в Институте проблем управления 13.04.1976. При этом он отмечал: «однако для решения больших и сложных систем необходимо учитывать их структуру, т.е. физическую, реально существующую структуру, которая не входит в уравнения, описывающие протекающие процессы».

Для решения этой проблемы в данном докладе предлагалось описание связей и отношений реального мира (представляющих его структуру) на естественном языке, с помощью семантических сетей или путем расширения некоторой формальной модели, т.е. методами семиотических моделей, так, как эта задача решается при построении модели

внешнего мира в системах искусственного интеллекта. Вместе с тем естественный язык, связанные с ним методы, не подходят, когда для решения задач необходимы расчеты изменения процессов при изменении структуры, поскольку при этом требуется формализация описания структуры. Для этого и применяется тензорная методология в теории систем.

Процесс моделирования для этого необходимо попытаться ввести в рамки науки. Тензорный метод дает путь для формализации процесса моделирования систем. Для применения тензорного метода сложная система должна быть представлена сетевой моделью, которая использует свойства и инварианты преобразования структуры двойственных сетей. Такая модель с единых позиций отображает одновременно процессы и структуру любой системы, относящейся к данному классу систем (по количеству процессов, размерности структурных элементов).

Сеть – совокупность соединенных элементов (ветвей), в которых протекают процессы. Сеть определяется набором ветвей, а *число узлов* (вершин) *может меняться*. В этом отличие сети от графа, который задан двумя наборами: *ветвей* (ребер) и *вершин*.

Замкнутые и разомкнутые пути, образованные ветвями, составляют системы координат пространства сети. Независимые наборы замкнутых и разомкнутых путей образуют базисы. Объектами такого пространства являются параметры процессов (воздействия и отклики, материальные характеристики ветвей), заданные компонентами в путях. Для построения сетевой модели необходимо установить аналогии между процессами сети и системы, структурой сети и системы.

Инвариант двойственных сетей, который связывает *процессы* и *структуру*, обеспечивает возможность *расчета систем по частям* с использованием параллельных вычислений в компьютерах с параллельной архитектурой. Для этого *сетевая модель* системы разделяется на подсистемы, которые рассчитывают отдельно, а затем их решения объединяют. Алгоритмы расчета по частям методом двойственных сетей представлены в главе 3. Данные алгоритмы обеспечивают сокращение объема вычислений (который растет как третья степень числа переменных). При разделении на части *систем уравнений* в традиционных численных методах особенности изменения структуры не учитываются, поэтому надо проверять сходимость итераций при расчете взаимного влияния подсистем, точность получаемого решения и т.д., что резко снижает эффективность расчетов.

Для построения сетевой модели все величины исследуемой системы необходимо привести к тензорному виду. Тогда при изменении структуры системы, в сетевой модели аналогии таких величин (компоненты измеряемых объектов) преобразуются линейно,

умножением на матрицу преобразования путей, аналогично тому, как преобразуются компоненты тензоров в геометрии при изменении системы координат.

Однако важное свойство преобразования координат в геометрии состоит в том, что они образуют группу. «Результат применения одного за другим двух преобразований координат есть также преобразование координат; каждое преобразование координат имеет обратное (закрывающееся в переходе от координат  $x$  к координатам  $x'$ ). Следовательно, совокупность всех допустимых преобразований координат образует *группу*» (Веблен О., 1949, с 25). Далее Веблен замечает: «На языке аксиоматической теории не подлежащими определению элементами являются у нас: 1) класс объектов, называемых точками, и 2) класс взаимно однозначных соответствий между точками и упорядоченными системами  $n$  чисел, называемых системами координат; наше недоказываемое предложение состоит в том, что преобразования координат образуют группу».

В геометрии при изменении системы координат величина тензора, геометрического объекта, не меняется. Меняются только значения его компонент. Если компоненты известны в одной (любой) системе координат, то можно получить компоненты в любой другой системе координат, поскольку их преобразования образуют группу.

Основная проблема расчета сетевых моделей состоит в том, что преобразования координат, связанные с изменением структуры (при изменении числа узлов) *не образуют группу*. Дело в том, что при изменении числа узлов меняется количество независимых замкнутых и разомкнутых путей. Следовательно, меняются размерности базисов замкнутых и разомкнутых путей, меняются размерности соответствующих подпространств.

По этой причине при изменении структуры сетевой модели системы меняется сама величина объекта пространства сети, например, величина вектора, представляющего процесс в системе (обычно это поток энергии). Это связано с изменением размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей при изменении структуры в одной сети.

При изменении размерности подпространств можно найти решение, если мы переходим от подпространства с большим числом измерений к подпространству с меньшим числом измерений. Например, можно все точки плоскости спроектировать на прямую линию, расположенную в этой плоскости. При этом теряется вся информация о значениях компонент этих точек по второму измерению плоскости. Если переходить от подпространства с меньшим числом измерений к пространству с большим числом измерений, то решение получить нельзя. Например, нельзя из значения одной компоненты точки на прямой линии, определить две компоненты, которые она должна иметь на плоскости. Аналогично, по круговой проекции сферы на плоскость нельзя определить, как были расположены точки на сфере.

Двойственные сети позволяют решить эту проблему. Двойственная сеть дополняет подпространства сетевой модели, представленной одной сетью, до более полного пространства. Увеличение размерности подпространства, например, замкнутых путей в одной сети компенсируется уменьшением размерности этого подпространства в двойственной сети. При этом в двойственной сети происходит увеличение размерности подпространства разомкнутых путей, но оно компенсируется уменьшением размерности этого подпространства в данной сети. Переход от одной сети к двойственной и обратно позволяет решить все проблемы, связанные с изменением величины вектора (представляющего процессы) при изменении структуры сети (системы). Более того, величина вектора остается постоянной в совокупности двух двойственных сетей. Совокупная размерность базиса замкнутых путей, разомкнутых путей остается постоянной в двойственных сетях.

Две двойственные сети обладают свойствами единого пространства, т.е. соответствуют одному пространству в геометрии. Однако это придает двойственным сетям особые свойства, выраженные инвариантом, который рассмотрен ниже. Этот инвариант имеет три уровня обобщения – для двойственных сетей, ветви которых не имеют весов (единичная метрика). Для двойственных сетей, ветви которых имеют веса (сети с метрикой). Для двойственных сетей, на ветви которых «наложен» внешний вектор (или более сложный геометрический объект), компоненты которого представляют воздействия и отклики, определяющие потоки энергии. Это определяет двойственные сети как следующий уровень обобщения в геометрии, следующий шаг в классификации геометрий, например, в соответствии с Эрлангенской программой Ф. Клейна.

В теоретико-множественном подходе сложную систему рассматривают как множество, которое состоит из отдельных первичных элементов, но обладает целостными характеристиками, причем свойства целого должны выводиться из свойств элементов. В сложных системах не всегда возможно все свойства целого вывести из свойств отдельных элементов. Так, молекула обладает свойствами, которых нет у составляющих ее атомов, атом обладает свойствами, которых нет у составляющих его частиц. При соединении элементов здесь добавлена только структура связей, которая и определяет новые свойства системы.

Более адекватные аналогии для представления сложных систем дает геометрия, где есть инвариантные объекты, а их проекции преобразуются при изменении координат. В геометрии совокупность одинаковых элементов – «точек» наделяется свойствами измерений, далее рассматриваются их преобразования при изменении координат. В Эрлангенской программе Феликса Клейна геометрии классифицируются по типу инвариантов относительно группы допустимых преобразований координат. Например,

геометрия Евклида допускает преобразования вращения, переноса, отражения, масштаба, но при сохранении прямых углов и прямых линий. *Аффинная* геометрия допускает изменение углов, но прямые должны остаться прямыми, а параллельные – параллельными; в *проективной* геометрии остается прямолинейность, но параллельные могут стать не параллельными. В *топологии* допустимо произвольно деформировать линии и фигуры, но сохраняется принадлежность одних элементов к другим, например, точек линиям, линий – плоскостям и т.д. Веблен (*Веблен*, 1948) рассматривал геометрию как пространство с инвариантом.

Следующим логическим шагом по изменению свойств геометрии является введение разрывания и соединения, при которых допускается менять принадлежность одних элементов к другим. Первым такие преобразования ввел Г. Крон для расчета по частям эквивалентных электрических цепей – сетевых моделей сложных систем. Однако в его работах нет инварианта двойственных сетей. В тензорном методе *двойственных сетей* допустимо менять принадлежность точек линиям, при изменении соединений; разделении на подсети. Проблема состоит в том, что при изменении соединений меняется число замкнутых и разомкнутых путей в одной сети (переменных, составляющих базис), поэтому матрицы преобразования прямоугольные, не образуют группу. При изменении размерности базиса меняется также величина вектора процесса в системе.

Автор нашел новый инвариант, который связывает матрицы преобразования путей при изменении структуры *двойственных сетей* (замкнутому пути в одной сети соответствует разомкнутый путь в другой, и наоборот). Данный инвариант придает матрицам преобразований двойственных сетей  $C$  и  $A$  свойства группы в отношении преобразований структуры, которые становятся аналогичными преобразованиям координат. Это свойство двойственных сетей обеспечивает связь параметров процессов и структуры при расчете сложных систем. Инвариант выражается соотношением между матрицами преобразования:

$${}^m C ({}^m C_t {}^m C)^{-1} {}^m C_t + {}^j A ({}^j A_t {}^j A)^{-1} {}^j A_t = I. \quad (1.7)$$

Это равенство аналогично сумме проекторов в линейной алгебре. Особенности данного инварианта, его обобщения при введении «весов», характеризующих метрические свойства ветвей, рассмотрены в главе 2.

Примеры преобразований структуры сетей даны на рис. 1.5, где показаны переходы от сетей из свободных замкнутых и разомкнутых ветвей к сетям, состоящим из соединенных между собой ветвей, которые образуют как замкнутые, так и разомкнутые пути. Также представлен простейший пример сетей с двойственной по отношению друг к другу структурой.

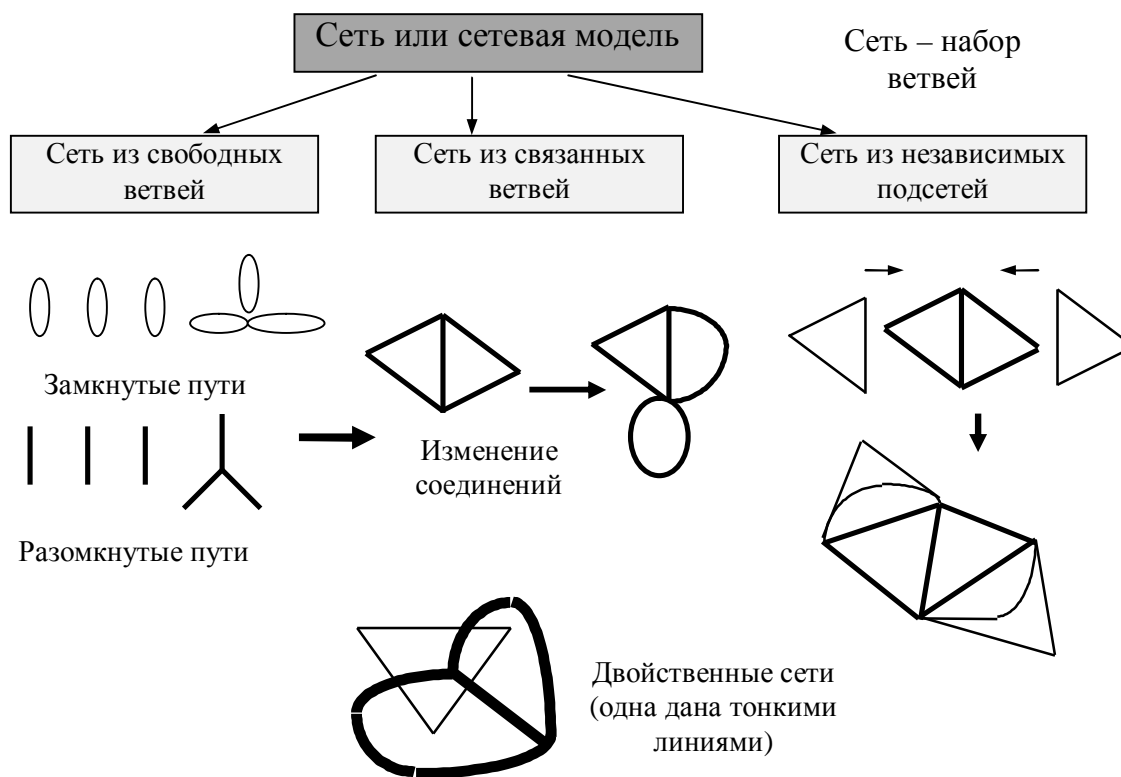


Рис. 1.5. Преобразования структуры в сети из заданных ветвей

Новый инвариант обеспечивает преобразования координат (путей в сети) при изменении структуры. В двойственных сетях при изменении соединения ветвей сумма замкнутых путей и сумма разомкнутых путей всегда остаются постоянными.

Таким образом, в результате проведенных исследований автор обнаружил новые свойства сетей, сетевых структур, не зависящие от их физической природы и связанные с математическими свойствами двойственности. Эти свойства применяются для расчета технических, экономических систем. Существование инварианта двойственных сетей обеспечивает возможность получить алгоритмы расчета сетей при изменении связей, отделении или подключении к сети ветвей, подсетей; разделении на подсистемы или соединении подсистем. Такие алгоритмы позволяют рассчитать изменение процессов при изменении структуры как преобразование координат, и обладают высокой эффективностью, многократно снижая объем вычислений. Дело в том, что обычные итерационные процессы по расчету влияния друг на друга частей при их соединении в целое (сходимость таких итераций еще нужно доказывать), заменяются расчетом сети, двойственной к сети ветвей, разрываемых при разделении, или вводимых при соединении подсистем. Точнее, это сравнительно небольшая сеть путей, которые изменили свой тип при изменении в структуре. То есть замкнутые пути, которые оказались разомкнутыми, или разомкнутые пути, которые оказались замкнутыми.



Сетевые модели обеспечивают применение единых алгоритмов для расчета разных сложных систем. Анализ особенностей структуры сетевой модели позволяет найти новые свойства исследуемой системы, которые не рассматривались в существующих математических моделях, но которые играют важную роль для анализа и управления. Например, сетевая модель межотраслевого баланса показывает не только потоки продуктов в системе производств, но также и пропорции потоков денежных средств, которые не рассматривались в исходной постановке задачи. Это дает путь решения задачи расчета объединенного материально-финансового баланса, которая остается важной проблемой современной экономической науки.

Таким образом, тензорный метод в теории систем, включая его применения в технике и экономике, имеет две особенности:

- *Аналогии* процессов и структуры различных систем позволяют объединить их и представить сетевыми моделями как «*проекции*» обобщенной системы.
- Один метод, алгоритм применяется для расчета всех систем такого класса, представленных сетевыми моделями.

Основные двойственные пары понятий для описания сложных систем следующие:

- воздействия и отклики – по их роли в поддержании процесса;
- продольные и поперечные величины – по способу измерения величины в одной точке, или как разность измерений в двух точках;
- контравариантные и ковариантные величины – по типу изменения при изменении системы координат, преобразованию базиса;
- материальные характеристики метрики, материи элементов системы – по их роли в качестве «сопротивления» или «проводимости»;
- замкнутые и разомкнутые пути;
- открытые и замкнутые системы.

Кроме того, принципиальным категориальным понятием является таблица  $LT$  для классификации измеримых величин по их отношению к пространству и времени.

### 1.3. Области применения тензорного метода

Тензорный метод нашел применение во многих областях, хотя и в различном объеме. Полнота применения свойств тензоров зависит от типа пространства, представляющего данную предметную область. «Тензорный анализ позволяет отделить субъективное в изучении явления, связанное с позицией ученого, с выбором той или иной системы координат, от объективного, объективной реальности, которая не зависит от точки зрения, от системы координат» (Афанасьев, 1981).

#### 1.3.1. Применение тензоров в науке и технике

В данной работе рассмотрены системы, в которых один процесс протекает в структуре из одномерных отрезков-ветвей. Для моделирования и расчета таких систем применяются двойственные сети.

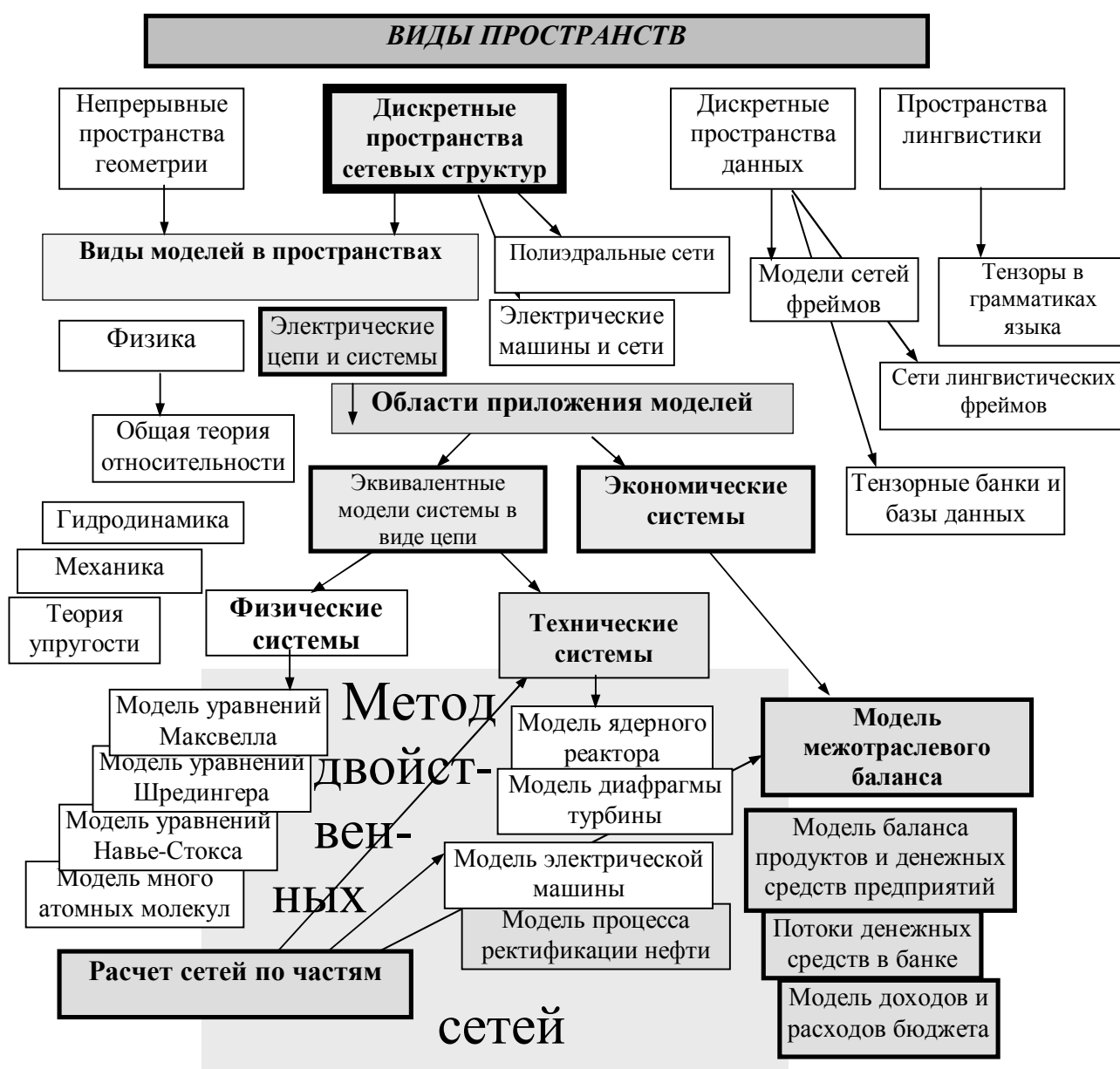


Рис. 1.6. Области применения тензорного метода в науке и технике

Основные направления развития и применения тензорного метода в науке и технике, виды используемых пространств и моделей даны на рис. 1.6. Темным фоном выделены результаты, полученные автором. Эти направления применения тензорного метода отличаются свойствами пространства, в котором располагаются объекты и производятся преобразования их компонент при изменении систем координат.

В физике основой применения тензорного метода, как отмечалось, были и остаются *непрерывные пространства* геометрии с различными инвариантами и группами преобразования в соответствии с классификацией Эрлангенской программы Ф. Клейна.

В технике основой применения тензоров стало *пространство-структура*, в котором непрерывность сохраняется только вдоль элементов сетевой структуры (ветвей, поверхностей, объемов, многомерных гиперплоскостей). Клейн не рассматривал таких пространств. В пространстве нового типа инварианты группы преобразований координат непрерывных пространств заменяются инвариантом преобразования структуры двойственных сетей. Таким образом, для сохранения алгебраической полноты в пространстве-структуре сетей должна существовать двойственная структура (где каждому замкнутому пути соответствует разомкнутый путь, и наоборот). Именно «двойка» двойственных сетей сохраняет свойства полного пространства, допускающего преобразование структуры (и объектов, заданных на структуре), подобно преобразованию координат. Эти свойства позволили использовать сети, сначала в виде электрических цепей, в качестве эквивалентных (по сути математических) моделей в различных технических областях техники, представленных на рис. 1.6.

Более того, Крон сделал шаг к применению таких моделей в физике. При построении эквивалентных цепей для основных уравнений физики использовались характеристики структуры предметных областей. Важность структуры особенно наглядно проявилась после построения эквивалентной цепи для уравнений Максвелла; самим физикам не удалось построить такую модель в рамках механики, несмотря на многочисленные попытки. В частности, для Кельвина основным препятствием на этом пути стала невозможность представить гироскопом ток смещения. В настоящее время роль структуры в физике, включая физику атома, осознается во все большей степени. Показано, что орбиты электронов в атоме обладают структурой, похожей на сетевую структуру (*Грызинский, 2001*). Большую роль в этой области играет принцип резонансной синхронизации Гюйгенса (*Гареев, 2001*), для применения которого пространства двойственных сетей могут получить дальнейшее развитие при рассмотрении колебательных процессов.

Впервые свойства структуры системы по отношению к электрической цепи рассмотрел Кирхгофф, (*Kirchoff G., 1847*). Он установил два известных закона поведения токов и

напряжений в элементах структуры – в узлах и контурах. М. Фарадей рассматривал силовые линии (трубки) для наглядного представления электрического и магнитного потока. На основании этих представлений о разомкнутых силовых линиях электрического тока и замкнутых силовых линиях магнитного потока, Дж. Максвелл, начиная со статьи 1854 года «О Фарадеевых силовых линиях» (Максвелл, 1954), получил свои уравнения электромагнитного поля. Герман Вейль первым предложил рассматривать токи и напряжения как контравариантные и ковариантные векторы (Weyl, 1923). Это стало первым шагом к применению геометрического подхода в технических системах.

В информационных системах *пространства данных* становятся полностью дискретными, т.е. состоящими из отдельных точек конкретных данных, расположенных в доменах, которые характеризуют качества этих данных, играя роль независимых измерений. Здесь возможна реализация преобразования структуры данных, реализация запросов к данным, и другие действия, свойственные базам данных, подобно преобразованиям координат. Сложнее ввести такие понятия, как метрика, ковариантность, контравариантность, инварианты преобразования базы данных. Во всяком случае, для этого необходимы специальные ограничения и соглашения (Кузина, Петров, 1976).

Еще экзотичнее выглядит применение тензоров в лингвистике, где вводится *пространство естественного языка*. Объектами такого пространства становятся грамматические формы с их свойствами. Системы координат задают различные языки народов мира. Инвариантом является реальный смысл, заложенный в тексте, фразе. Смысл по разному выражается в разных языках письменно и фонетически, и эти выражения являются компонентами смысла в координатах каждого языка. Смысл должен сохраняться при переводе, «преобразовании» с одного языка на другие языки (Сухотин, 1978).

В следующих разделах более подробно рассмотрены особенности и пути применения тензорного метода в технике, экономике, других областях. Дан также обзор основных работ и направлений деятельности по развитию и применению тензорного метода.

### **1.3.2. Тензорный метод Крона**

При развитии техники усложняется структура связей элементов, составляющих сложные системы. Реализация физического процесса для технических применений различается способом соединения элементов для различных вариантов конструктивных решений технической системы.

Основополагающий вклад в создание тензорного метода исследования сложных систем сделал Габриэль Крон, который с начала тридцатых годов применял тензоры для исследования и проектирования технических систем. В то время, первоначально применительно к электротехническим системам и электрическим машинам, возникла

необходимость создания единого метода моделирования, расчета и анализа технических систем, которые для разных целей реализуют одни и те же физические процессы путем изменения конструкции, т.е. соединения элементов.

Таким образом, исторически применение тензорного метода к моделированию и исследованию процессов и структуры сложных систем началось с создания единой теории электрических машин. В 30-ые годы прошлого века электрические машины были настолько сложными техническими системами, что для каждого типа создавалась своя теория и методы расчета. Для некоторых типов машин существовало несколько теорий. Крон разработал теорию обобщенной электрической машины, т.е. такого устройства, которое в минимальной форме реализует основной физический процесс электромеханического преобразования потока энергии. Конструкция любой другой электрической машины (двигателя или генератора) отличается от обобщенной машины только количеством элементов, осуществляющих этот физический процесс, и количеством связей между ними. Переход от одной к другой можно задать матрицей преобразования, которая показывает, как структуры соединения этих машин отличаются друг от друга.

Любая электрическая машина может рассматриваться как проекция единого «тензора» обобщенной машины в систему координат конкретной конструкторской реализации. Обобщенная машина стала эталонной системой для данного семейства технических систем, электрических машин. Это как бы «молекула» данного физического процесса – если убрать любой элемент из этой абстракции, то тогда не будет представлен процесс электромеханического преобразования энергии. Но из таких «молекул» можно конструировать «вещество» реальных машин, или систем, представляющих собой совокупность машин, которые предназначены для решения конкретных задач.

Первой работой, которая способствовала подготовке к применению тензорного метода в технике, стала статья Крона «Единая теория электрических машин» (*Kron, 1930*). В этой работе все электрические машины, которые до этого считались различными и несопоставимыми, исследовались с единой точки зрения построения диаграмм, *которые показывают величину и направление потоков энергии между различными частями сложной машины*. Для этого было применено понятие «свободная энергия» из термодинамики. Тензоров здесь еще нет, хотя к ним, как отмечалось, относятся все измеряемые величины.

Основы тензорной теории электрических машин были представлены в статье «Нериманова динамика вращающихся электрических машин» (*Kron, 1934*). В 60-тых годах в трудах Японской ассоциации прикладной геометрии данная статья была охарактеризована как «сделавшая эпоху» (*Memoirs RAAG, 1968*). Было введено понятие простейшей (обобщенной) электрической машины из двух элементов – обмоток (*Kron, 1934*).

Обобщенная машина, как отмечалось, в простейшем виде реализует процесс электромеханического преобразования энергии. Уравнения поведения обобщенной машины Крон получил из уравнений Лагранжа. Тогда уравнения любой другой машины (с другим числом и соединением элементов) получаются умножением каждой величины в уравнениях простейшей системы координат (обобщенной машины) на матрицу преобразования  $S$ , которая показывает, как соединены обмотки в исследуемой машине. Оказалось, что уравнения электрических машин при стационарном режиме имеют такой же вид, как для неподвижных сетей, при условии, что обычное дифференцирование в уравнении

$$e_a = R_{ab} \cdot i^b + \frac{dj_a}{dt} \quad (1.7)$$

заменяется ковариантным дифференцированием,  $d/dt$ , при котором учитывается изменение вектора при его параллельном переносе вдоль кривой в римановом пространстве:

$$e_a = R_{ab} i^b + \frac{dj_a}{dt}, \quad (1.8)$$

где  $e$  – напряжение,  $R$  – сопротивление (резистанс),  $i$  – ток,  $j$  – магнитный поток,  $t$  – время, а  $dj_a/dt$  – ковариантная производная, учитывающая изменение вектора при параллельном переносе в криволинейном римановом пространстве. При малых колебаниях около стационарного вращения – качаниях, это уравнение принимает вид:

$$de_a = R_{ab} di^b + L_{ab} \frac{d(di^b)}{dt} + K_{dgb a} i^d i^b dx + R_{abg} i^b dx^g, \quad (1.9)$$

где  $R_{abg}$  – тензор третьего ранга, определяемый сопротивлениями, а  $K_{dgb a}$  – тензор кривизны Римана – Кристоффеля, наличие которого показывает, что поведение вращающейся электрической машины в режиме качания описывается как движение представляющей точки в неримановом пространстве с асимметричной связью (с кручением). Форма уравнений для всех режимов – стационарного режима, ускорения и качаний остается одна и та же, но само пространство усложняется за счет все большего искривления.

Такое искривление пространства, представляющего поведение машины, подобно искривлению физического пространства вблизи большой тяготеющей массы, которое искривляет луч света (поток фотонов) проходящий мимо поля солнечного тяготения. А. Эйнштейн считал, что Крон распространяет в область техники идеи общей теории относительности. Н. Винер отметил, что Крон ввел новый язык, который позволяет не только поставить задачи расчета машин единым образом, но и дать новые методы решения таких задач (Wiener, 1936).

В электрических машинах взаимодействуют два типа физических процессов в двух видах элементов структуры: поток электрической энергии (ток в одномерной ветви под

действием напряжения) и магнитный поток через двумерную поверхность, представленную обмоткой. Это усложняет картину взаимодействия процессов и структуры.

Для исследования общих закономерностей, связанных с преобразованиями структуры, развития единого метода создания и применения математических моделей сложных систем разных предметных областей необходимо абстрагироваться от использования конкретной физической системы (например, электрической цепи) в качестве эталона для построения моделей. Однако первоначально тензорный анализ был подробно разработан для электрических цепей. Далее, в 40–70-тые годы, Крон и его последователи использовали эквивалентные электрические цепи в качестве эталонной системы для представления, моделирования процессов и структуры физических, технических и экономических систем из разных предметных областей. В настоящее время для моделирования может использоваться абстрактный аппарат двойственных сетей.

Крон в 1939 году опубликовал обширную монографию «Тензорный анализ сетей», где систематически применил понятия инвариантов и группы матриц преобразования для расчета электрических цепей и других электротехнических систем (*Kron, 1939, Крон, 1978*). Употребление термина «сеть – network» показывает, что Крон понимал возможность применения тензорного метода не только в электротехнике.

В качестве простого примера связи структуры и процесса Крон исследовал преобразования токов и напряжений при изменении соединений одномерных проводников электрического тока. Для этого он ввел понятие *простейшей* (из отдельных ветвей) сети (primitive network), как эталонной сети для множества всех сетей, составленных из данных ветвей. Остальные сети являются вариантами соединений ветвей простейшей сети (*Крон, 1978*). Для получения уравнений *соединенной* сети из уравнений простейшей сети использовались матрицы преобразования, которые связывают токи в контурах простейшей сети с токами в контурах соединенной сети (или напряжения на свободных ветвях с напряжениями в разомкнутых путях связанной сети). Эти матрицы соответствуют матрицам цикломатической и разрезающих множеств в теории графов и представляют собой матричную запись законов Кирхгофа.

Здесь возникли проблемы, которые вызвали серьезную критику. Главная проблема состояла в постулате Крона об инварианте мощности. Он утверждал, что при соединении ветвей рассеиваемая мощность в сети не меняется – поскольку остаются прежними источники тока и напряжения, которые задают в сети поток энергии. Вывод тензорных формул преобразования требует признания или предположения, что мощность в электрической цепи при соединении отдельных ветвей остается постоянной. Постулат

мощности позволял получить формулу преобразования напряжения – ключевой момент тензорного анализа для сетей.

Однако известно, что *мощность меняется при изменении связей*. Изменение мощности является следствием хорошо известного в теории цепей факта, что для заданной цепи состоящей из резисторов и источников, величина напряжения на всех резисторах не выше суммы величин напряжений на источниках. Этот факт доказан в теории графов теоремой Волавера о неусилении мощности в резистивной сети на основе специального случая леммы Минти о раскраске дуг графа. Доказано, что в ориентированном графе каждое ребро находится либо в ориентированном цикле, либо в ориентированном сечении, либо отсутствует в обоих (Свами, 1984, с. 241). Заметим, что в теории графов под ориентированным циклом и сечением понимаются такие, в которых все ребра ориентированы одинаково с ориентацией цикла и сечения.

Под расчетом цепи понимается вычисление электрических величин или их отношений при заданных схеме и параметрах цепи (Атабеков, 1969, с. 80). В частности, эта задача состоит в определении *откликов* в *соединенных* ветвях  $\alpha = 1, \dots, n$  при заданных *воздействиях* в *отдельных* ветвях, причем должны удовлетворяться законы Кирхгофа о равенстве нулю суммы токов в каждом узле и равенстве нулю суммы напряжений в каждом контуре.

**Тензорный метод Крона для решения задачи цепи.** Если воздействия – источники эдс (напряжения)  $e_\alpha$ , то откликами (переменными) являются токи  $i^\alpha$ , для которых уравнения составляют по выбранным независимым контурам – замкнутым путям (остальные токи являются линейными комбинациями выбранных токов):

$$e_1 = z_{11} i^1 + z_{12} i^2 + \dots + z_{1m} i^m \quad \dots \dots \dots (1.10)$$

$$e_m = z_{m1} i^1 + z_{m2} i^2 + \dots + z_{mm} i^m,$$

где  $m$  – число независимых контуров,  $z_{kk}$  – собственное сопротивление контура  $k$ , равное сумме комплексных сопротивлений (импедансов) входящих в контур, а  $z_{kl}$  – взаимное (общее) сопротивление, принадлежащее одновременно контурам  $k$  и  $l$ . Эту систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$e_a = z_{a \cdot b} i^b, \quad (1.11)$$

решение которой достигается обращением матрицы  $y^{a \cdot b} = (z_{a \cdot b})^{-1}$ , тогда:

$$i^b = (z_{a \cdot b})^{-1} e_a = y^{a \cdot b} e_a, \quad (1.12)$$

и по этим  $m$  токам в контурах  $i^b$  можно определить  $n$  токов в ветвях  $i^b$ , а затем и  $n$  напряжений в ветвях  $e_a = z_{ab} i^b$ , что является решением задачи цепи. Проверкой правильности решения является выполнение законов Кирхгофа для токов и напряжений.



Если воздействия – источники тока  $I^a$ , то отклики (переменные) – напряжения  $E_a$ , для которых уравнения составляют по выбранным независимым парам узлов – разомкнутым путям (остальные напряжения – их линейные комбинации). Можно записать, как в (1.10), систему уравнений для этих  $j = n - m$  пар узлов (разности потенциалов между узлами отсчитывают относительно одного, базисного узла) в матричном виде (1.11):

$$I^{a\wedge} = Y^{a\wedge b\wedge} E_{b\wedge}. \quad (1.13)$$

Решение этой системы также достигается обращением матрицы:

$$E_{b\wedge} = (Y^{a\wedge b\wedge})^{-1} I^{a\wedge} = Z_{a\wedge b\wedge} I^{a\wedge}. \quad (1.14)$$

Полученные так  $j$  напряжений в разомкнутых путях  $E_{b\wedge}$  позволяют определить  $n$  напряжений в ветвях  $E_b$ , а затем и  $n$  токов в ветвях  $I^{a\wedge} = Y^{a\wedge b\wedge} E_{b\wedge}$ , что является решением задачи цепи. Проверкой правильности решения является выполнение законов Кирхгофа для токов и напряжений.

Эти два алгоритма определяют контурный метод и узловый метод расчета цепи. Крон представил оба метода расчета как преобразования тензоров в пространстве сети, где сопротивление играет роль метрического тензора, а токи и напряжения – контравариантные и ковариантные векторы.

Однако при выводе формул преобразования токов и напряжений («проекции» вектора потока энергии в замкнутых и разомкнутых путях) возникло противоречие. В основе тензорного анализа сетей Крона лежит преобразование токов  $i$  при соединении ветвей простейшей сети в связанную сеть. Если выразить токи в отдельных (свободных) ветвях  $i^a$  через токи в независимых контурах связанной сети, то коэффициенты такого разложения составят матрицу  $C^a_a$ :

$$i^a = C^a_a i^{a\wedge}. \quad (1.15)$$

Строки данной матрицы показывают, токи каких контуров составляют ток в данной ветви, а столбцы – из каких ветвей состоит данный контур. Токи  $i^a$  и напряжения  $e_a$  на свободных ветвях связаны законом Ома:

$$e_a = z_{ab} i^b, \quad (1.16)$$

где  $z_{ab}$  – матрица комплексных сопротивлений (импедансов), которая при индуктивном взаимодействии ветвей может и не быть диагональной. Рассеиваемая в сети мощность  $P$  равна сумме мощностей на ветвях, т.е. произведений напряжения и тока в каждой *свободной* ветви:

$$P = e_a i^a, \quad (1.17)$$

и аналогично для напряжений и токов в контурах связанной сети:

$$P^{\wedge} = e_{a\wedge} i^{a\wedge}, \quad (1.18)$$

где по одинаковым верхним и нижним индексам предполагается суммирование. Если *постулировать*, что  $P^{\wedge} = P$ , т.е., что мощность при изменении соединений не меняется (согласно теореме Волавера она меняется), и подставить сюда (1.15), то получим закон преобразования для напряжения:  $e_{a^{\wedge}} i^{a^{\wedge}} = e_a i^a = e_a C^a_{a^{\wedge}} i^{a^{\wedge}}$ :

$$e_{a^{\wedge}} = e_a C^a_{a^{\wedge}} = C^a_{a^{\wedge}t} e_a, \quad (1.19)$$

где индекс  $t$  означает транспонирование матрицы.

Чтобы получить формулу преобразования импеданса  $z_{ab}$ , необходимо подставить (1.15) и (1.19) в (1.16):

$$e_a = z_{ab} i^b = z_{ab} C^a_{a^{\wedge}} i^{a^{\wedge}}, \quad (1.20)$$

но для этого надо в (1.19) получить обратное преобразование  $e_a = (C^a_{a^{\wedge}t})^{-1} e_{a^{\wedge}}$ . Это возможно только тогда, когда сеть состоит из одних контуров; в этом случае матрица  $C^a_{a^{\wedge}}$  квадратная, и может иметь обратную матрицу. В общем случае, когда число контуров меньше числа ветвей, это невозможно, поскольку тогда матрица  $C^a_{a^{\wedge}}$  не квадратная, а прямоугольная, для нее не существует обратной матрицы. Однако если закрыть на это глаза (что и делает Крон) и чисто формально подставить в (1.20), то:

$$e_a = (C^a_{a^{\wedge}t})^{-1} e_{a^{\wedge}} = z_{ab} C^a_{a^{\wedge}} i^{a^{\wedge}}, \quad (1.21)$$

а затем умножить обе части уравнения на матрицу  $(C^a_{a^{\wedge}t})_t$  то получим:

$$(C^a_{a^{\wedge}t})_t (C^a_{a^{\wedge}t})^{-1} e_{a^{\wedge}} = ((C^a_{a^{\wedge}t})_t z_{ab} C^a_{a^{\wedge}}) i^{a^{\wedge}} = e_{a^{\wedge}}, \quad (1.22)$$

откуда, сравнивая с (1.16), и используя постулат второго обобщения Крона (*Крон*, 1978) о том, что вид уравнений поведения не меняется при соединениях, получим формулу преобразования матрицы импеданса:

$$z_{a^{\wedge}b^{\wedge}} = (C^a_{a^{\wedge}t})_t z_{ab} C^b_{b^{\wedge}}. \quad (1.23)$$

В этой формуле нет обратных матриц преобразования, а значит и не надо пытаться «обращать» прямоугольные матрицы. Далее расчет производится контурным методом.

Точно также, но с двойственными заменами всех величин, получаются формулы расчета цепи узловым методом. Если выразить напряжения в свободных ветвях  $E_a$  через напряжения в связанной сети в независимых разомкнутых путях, то коэффициенты разложения составят матрицу  $A_a^{a^{\wedge}}$ :

$$E_a = A_a^{a^{\wedge}} E_{a^{\wedge}}, \quad (1.24)$$

и далее, как в (1.17–1.22), при выводе также используется постулат об инвариантности мощности, который не выполняется, и обращение прямоугольной матрицы, которой не существует. Таким образом, вывод формул тензорного анализа сетей Крона содержит недопустимые действия, поскольку он основан на обращении прямоугольной матрицы.

Матрицы преобразования  $C$  и  $A$  ортогональны друг к другу в силу независимости замкнутых и разомкнутых путей, т.е.  $C_t = A^{-1}$ . Если их записать, как состоящие из подматриц замкнутых путей  ${}^m C$  и  ${}^m A$ , и разомкнутых путей,  ${}^j C$  и  ${}^j A$ , то окажется, что подматрица  ${}^m C$  соответствует цикломатической матрице, а подматрица  ${}^j A$  – матрице разрезающих множеств графа данной сети (цепи). Тогда из их ортогональности получим, что

$$C_t A = I =$$

$$m \begin{array}{c} n \\ \begin{array}{|c|} \hline {}^m C_t \\ \hline \end{array} \\ j \end{array} \begin{array}{c} m \quad j \\ \begin{array}{|c|c|} \hline {}^m A & {}^j A \\ \hline \end{array} \\ n \end{array} = m \begin{array}{c} m \quad j \\ \begin{array}{|c|c|} \hline {}^m C_t {}^m A & {}^m C_t {}^j A \\ \hline \end{array} \\ j \end{array} = m \begin{array}{c} m \quad j \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ j \end{array} \quad (1.25)$$

Учитывая, что матрица цикломатическая и матрица разрезающих множеств ортогональны друг другу, а напряжения преобразуются по формуле (1.24), можно избежать обращения прямоугольной матрицы при выводе тензорных формул преобразования измеримых величин цепи. Для этого надо подставить (1.24) в (1.20), тогда получим:

$$e_a = {}^m A_a^{a'} e_{a'} = z_{ab} {}^m C_a^{a'} i^{a'}, \quad (1.26)$$

умножая обе части уравнения на  ${}^m C_t$  и принимая во внимание (1.25):

$${}^m C_t {}^m A_a^{a'} e_{a'} = e_a = {}^m C_t z_{ab} {}^m C_a^{a'} i^{a'}, \quad (1.27)$$

получим формулу преобразования матрицы импеданса  $z_{ab}$  (1.23).

Однако ортогональность матриц преобразования не делает мощность постоянной, поскольку значение мощности зависит не от выбора путей в сети, определяющих матрицы преобразования, а от числа узлов (которое определяет размерность базисов замкнутых и разомкнутых путей). Проблему постулата об инвариантности мощности это не решает.

Обосновать это положение (постулат об инвариантности мощности) пытались как физики, так и математики. Б. Гоффман посвятил анализу понятий тензорного метода ряд статей, в том числе и постулату об инвариантности мощности (*B. Hoffmann*, 1944, 1949, 1957). Американский тополог Дж. Рот в ряде работ в 50-е годы рассматривал преобразования Крона как гомологическую последовательность (замкнутые пути) и когомологическую последовательность (разомкнутые пути) симплексов, которые сцеплены метрикой (тензором импеданса), и на этой основе доказывал с помощью комбинаторной топологии существование решения задачи сети (*Roth*, 1955). Он применял этот подход также для обоснования метода расчета сетей по частям (диакоптика) (*Roth*, 1959).

Крон полагал (*Крон*, 1972, с. 45), что применение топологического описания доказывает инвариантность мощности. Однако замена терминов электрических на термины топологические также не решает проблему – мощность меняется при изменении количества замкнутых или разомкнутых путей в сети.

Дискуссия по возможности применения тензоров в технике растянулась на десятки лет. Одни успешно применяли результаты тензорного метода в различных областях физики и техники. Другие отвергали сами попытки использовать прямоугольные матрицы, которые не образуют группу. Несмотря на проблемы, «эти работы, несомненно, оказали глубокое влияние на развитие многих областей знания и способствовали прогрессу в разработке методов решения системных задач с помощью цифровых вычислительных машин» (Веников, 1985).

Полученные результаты показали практическую применимость тензорного метода, основанных на этом методе алгоритмов для расчета отдельных систем, однако указанные теоретические проблемы препятствовали развитию и применению метода. Вместе с тем проблема расчета процессов и структуры единым методом становится все более актуальной. Это необходимо, в частности, для разработки алгоритмов расчета систем по частям и параллельных вычислений. Но злоключения постулата об инвариантности мощности – это одна проблема.

Другая проблема состояла в том, что сложные системы представляли электрическими цепями, а не математическими моделями. Это делало применение тензоров инженерным подходом, а не математическим методом и ограничивало возможности применения. Важный шаг от применения электрической цепи к абстрактному представлению сделал Х. Хэпп (Хэпп, 1974). Он показал, что матрицы соединения преобразуют базисы *путей*, т.е. наборов ветвей в сети. Преобразование электрических токов и напряжений (компонент вектора потока энергии в базисе путей) является следствием преобразования путей. Матрицы преобразования путей транспонированы по отношению к матрицам преобразования токов и напряжений Крона. В данной работе именно матрицы *преобразования путей* являются основой метода двойственных сетей.

Крон применял разработанный им метод, хотя и содержащий указанные противоречия, для моделирования эквивалентными цепями и расчета технических, физических систем, которые имели аналогии процессов и структуры. Были построены модели в виде эквивалентных электрических цепей для уравнений поля Максвелла (Крон, 1944), Шредингера (Крон, 1945), Навье-Стокса, модели упругих систем (строительные конструкции, разрезные диафрагмы турбин), модели электронных ламп, электрических машин, сетей передачи электроэнергии, ядерного реактора, транспортной задачи и другие. Эти модели представлены в книге по диакоптике, переведенной на русский язык (Крон, 1972), как основа алгоритмического обеспечения расчета систем, сложность которых как целого превышает возможности наличной вычислительной техники.

До появления ЭВМ Крон в 40-е годы применял физические реализации моделей как аналоговые машины для решения задач, например, распространения электромагнитных волн в полых резонаторах (*Carter, Kron, 1944, 1945*). С появлением цифровых ЭВМ матричное представление задач и структуры систем применялось для расчета эквивалентных моделей предметных областей (*Крон, 1972*). С развитием ЭВМ с параллельной архитектурой расчет сетей по частям стал одним из методов организации (на уровне математической модели) параллельных вычислений (*Петров, 1991*), в том числе для транспьютеров (*Bowden K., 1988, 1989*). Расчет больших эквивалентных цепей на сети транспьютеров с помощью диакоптики в параллельной форме рассматривали Фуско и Меругу (*Fusco V. F., Merugu L.N., 1991*).

В перспективе представляют интерес работы Крона по многомерным (полиэдральным) сетям. Полиэдральные сети, рассмотренные в статьях 1958-1968 гг., состоят не только из одномерных ветвей, но также из плоскостей, точек, объемов, многомерных элементов и проводят не только электрический ток, но и потоки энергии других видов. Например, магнитные и диэлектрические силовые линии определяются через поверхностные интегралы по некоторым плоскостям графа, ограниченными контурами. Магнитный поток распространяется через двумерные поверхности (представленные обмотками в электрических машинах). Таким образом, электромеханические преобразователи (электрические машины) являются простейшим примером полиэдральных сетей, в данном случае двумерных сетей.

Совокупность сетей из точек, отрезков, плоскостей и т.д., или 0-, 1-, 2- и т.д. – вплоть до  $n$ -мерных симплексов<sup>4</sup>, при возбуждении электромагнитными волнами Крон назвал волновым автоматом (*Kron, 1960*). Он применял такой волновой автомат в качестве многомерного пространственного фильтра (*Kron, 1958*), для проведения многомерных кривых по экспериментальным данным методом наименьших квадратов в регрессионном анализе (*Kron, 1962*). Двойственными к  $p$ -сетям рассматриваются  $(n - p)$  – сети в  $n$ -мерном пространстве (*Kron, 1965*).

Крон утверждал, что полиэдральные волновые автоматы обладают свойствами самоорганизации в смысле изменения их параметров в ответ на внешние воздействия. В Англии Дж. Линн рассматривал тензорные методы расчета электрических машин (*Lynn J., 1963*), связь электромагнитных моделей с понятиями дифференциальной геометрии и комбинаторной топологии (*Balasubramannian, Lynn, ..., 1970*), свойства полиэдральных сетей. Собственно метод и технологию приведения полиэдра и двойственного к нему полиэдра, возбуждаемых в среде магнитогидродинамической плазмы к режиму самоорганизации Крон

---

<sup>4</sup> Совокупность симплексов в комбинаторной топологии составляет  $n$ -мерный комплекс, различные пересечения в котором, разбиения, и представляют полиэдр. Отсюда название – полиэдральные сети.

не опубликовал. Воспроизвести режим самоорганизации полиэдральной сети последователям Крона в дальнейшем не удалось (*Lynn J.*, 1974). Линн только повторил расчеты Крона с помощью волнового автомата.

Вместе с тем опубликованные статьи Крона содержат таблицы с результатами конкретных расчетов, выполненных с помощью многомерной сетевой модели, которая ведет себя при возбуждении как самоорганизующийся автомат. «Существование таких работ манит исследователя, как неразгаданные секреты старых мастеров, ушедшие вместе с ними» (*Петров*, 1985, с.6). Работа по поиску и исследованию свойств самоорганизации полиэдральных сетей может оказаться полезной для развития математических основ теоретической и практической биологии. Целесообразны эксперименты по изучению закономерностей изменения потоков энергии при изменении структуры среды. В частности, мозг – электромагнитная система; возможное существование двойственной структуры при инвариантности потока энергии позволяет с новой позиции взглянуть на проблемы сознания и подсознания.

Анализ работ Крона, как всеобщей инженерной науки, с акцентом на особенности полиэдральных сетей, представлен также в работе В.В. Попкова (*Попков*, 2001). Продолжение исследований в этой области представляется перспективным. При этом определяющую поддержку работам по исследованию поведения многомерных сетей в режиме самоорганизации окажет найденный автором инвариант преобразования структуры двойственных сетей. Хотя Крон использовал понятие двойственного полиэдра, однако инвариант двойственных сетей в его работах не присутствует.

### **1.3.3. Развитие тензорного метода исследования систем**

Тензорная теория электрических машин (электромеханических преобразователей) Крона, с его понятиями обобщенной машины, из уравнений которой уравнения поведения конкретных машин получаются как преобразования координат к новой структуре, признана классической и заняла свое место в учебниках. В своем учебнике «Электрические машины» для высшей школы И.П. Копылов в обзоре истории развития электрических машин отмечает следующее. «Важной вехой в развитии теории электрических машин является появление в 30–40-х годах работ Г. Крона по общей теории электрических машин. Г. Крон предложил модель и уравнения обобщенной машины, из которых могут быть получены уравнения всех видов индуктивных машин. Обобщения, сделанные Г. Кроном, значительно продвинули теорию электрических машин». (*Копылов*, 2000).

С применением тензорного метода Крона в теории систем связан ряд направлений, которые его развивают, но ни одно из них не охватывает полностью вопросов взаимодействия процессов и структуры сложной системы. Например, в сборнике работ по

графам связей «Физическая структура в теории систем» (*Physical Structure...*, 1974) проведен анализ работ Крона по сетевому моделированию сложных систем. Графы связей применяют для наглядного представления физической структуры потоков энергии (механической, электрической, тепловой), преобразуемых в технической системе. Однако при этом в графах связи не рассматривают *матрицы преобразования путей* для расчета изменения таких потоков при изменении связей системы.

А. Брамеллер применял диакоптику для расчета сетей (*Brameller*, 1969), а затем разрабатывал методы вычислений разреженных матриц, содержащих много нулей (*Брамеллер*, 1979). В плане экономии вычислений эти методы решают те же задачи, что и диакоптика, но на уровне матриц, а не сетевой модели, которая дает новые матрицы для новой структуры, а не просто убирает нули. Работы по методу конечных элементов также опираются на диакоптику, поскольку техническая система делится на множество небольших элементов – подсистем.

В Японии под руководством К. Кондо в 50-60-тых годах проведены работы по развитию и применению тензорного метода, результаты которых изданы в четырех томах Мемуаров Японской ассоциации прикладной геометрии (*Memoirs RAAG*). При исследовании устойчивости электрических машин для учета движения контактов Кондо ввел разделение системы на бесконечно малые элементы риманова пространства и соединения их в нериманово пространство, применял для расчета пластических деформаций в теории упругости, к аэродинамическим системам.

В компании Дженерал Электрик Х. Хэпп развил метод расчета цепей по частям (*Хэпп*, 1974) и применял для расчета сетей передачи электроэнергии в США (*Happ*, 1980). Хэпп сделал шаг к отказу от электрической цепи как средства моделирования систем, и отделил пути в структуре от физического содержания ветвей сети. Однако Хэпп не использовал тензорных понятий в цепи: ковариантность, контравариантность, двойственность, метрический тензор, ограничившись приложениями в области электротехники.

Были попытки обосновать диакоптику. Одни ученые доказывали, что основой расчета является разделение на части физической сети (электрической модели). К этой группе ученых относился сам Крон, его ученик и сотрудник по Дженерал Электрик Хэпп, а также Амари (*Amari*, 1962), Бранин (*Branin*, 1962). Другие ученые доказывали возможность получить решение путем линейных алгебраических преобразований – это Ву, Шуа и Чен. Делались попытки обобщения диакоптики Крона на нелинейные сети (*Shua, Chen*, 1975), на введение двойственных понятий кодиакоптики (*Onodera*, 1958). Шуа и Чен пытались объединить эти подходы с позиций гибридного анализа сети. При этом происходит размен структуры на физику, поскольку связь при разрывании заменяют эквивалентным источником

тока или напряжения, расчет их величины определяет взаимодействие частей в целой системе. Для разработки общего метода расчета систем по частям не хватало инварианта преобразования структуры двойственных сетей.

В нашей стране первой работой по применению тензорного метода для расчета асинхронной машины с конденсаторами была кандидатская диссертация А.С. Шаталова (Шаталов, 1941). После успешной защиты соискатель ушел на фронт, прошел войну, а по возвращении в 1945 году получил кандидатский диплом. В 40-50-тых годах на семинарах А.А. Андропова были выполнены работы по применению тензорного метода для расчета задач в области электромеханики, в частности А.В. Гапоновым-Греховым. Тензорный метод расчета задач электромеханики развивали В.А. Веников, И.П. Копылов.

Как отмечалось, работы Крона вызвали острые дискуссии, которые продолжались в 30–70-тых годах не только за рубежом, но и у нас. Обзор этих дискуссий был сделан в работе автора (Петров, 1985). Вместе с тем в 1955 г. на русский язык была переведена книга Крона «Применение тензорного анализа в электротехнике» (Крон, 1955). В 1969 г. в журнале *Электричество* была опубликована памятная статья, посвященная Г. Крону (Веников и др., 1969), где высоко оценивались его работы. В 1972 г. издан перевод монографии «Диакоптика» (Крон, 1972).

Выдающийся отечественный ученый-энциклопедист Побиск Георгиевич Кузнецов, разработчик систем управления научными разработками СПУТНИК и СКАЛАР, подчеркивал, что только у Крона удалось найти математические основы анализа иерархических и сетевых структур, которые играли, и продолжают играть возрастающую роль в управлении. На работы Крона ему указал Г.Н. Поваров, который перевел на русский язык работы «Кибернетика» Н. Винера и «Теория множеств» Н. Бурбаки. В 60–70-тых годах на семинарах П.Г. Кузнецова, в том числе в ВЦ Академии наук, рассматривались преимущества тензорной методологии. Особое внимание уделялось применению тензорного метода Крона для проектирования экономических систем (Кузнецов П.Г., 1975).

В 1978 г. вышел перевод фундаментальной работы Крона «Тензорный анализ сетей» (Крон, 1939, 1965, Крон, 1978). Работа над переводом, в которой участвовал автор, проходила под руководством П.Г. Кузнецова при поддержке Л.Т. Кузина, и продолжалась несколько лет. Научной проблемой перевода был анализ сути новых понятий (простейшей сети, матриц преобразования, инварианта мощности, постулатов обобщения), которые вводил Крон, их отличия от существующих подходов. Организационной проблемой была необходимость убедить научную общественность в целесообразности перевода старой, 1939 года работы. Проблема разрешилась, когда нашли издание 1965 года, точную копию прежнего, но с новым предисловием, где речь шла о многомерных сетях.



В 70–80-тые годы тензорный метод применялся для расчета технических систем в ряде вузов. В Москве – в МИФИ, МИЭМ, МЭИ. На семинарах Л.Т. Кузина на кафедре Кибернетики в МИФИ обсуждались приложения тензоров для проектирования технических и информационных систем (Кузин Л.Т., 1994). В МИЭМ на протяжении 70–80-тых годов выполнены работы по развитию тензорных методов расчета электромеханических преобразователей (Арменский Е.В., Кузина И.В., 1975), методов автоматического получения математических моделей механических подсистем электроприводов (Кузина И.В., Таран А.Н., 1989), построения уравнений обобщения для математических объектов электромеханики (Кузина И.В., Тимофеева В.В., 1986) и т.д.

В Ивановском государственном университете, на кафедре теоретической физики и сложных систем, под руководством Г.А. Зайцева, в 80-тых годах был проведен ряд семинаров по развитию тензорных методов, их обобщению с точки зрения теории категорий (Математические основания..., 1989). Г.А. Зайцев и его сотрудники в ИвГУ для обоснования топологии разрывания исследовали математические основы метода диакоптики Крона с помощью теории категорий и алгебраической физики.

На основе обобщения алгебраических диаграмм Роса и теории категорий в МЭИ были разработаны алгоритмы диакоптики для распределенных вычислительных систем, в которых подзадачи решаются на отдельных ЭВМ с минимальным обменом данными между ними (Котарова И.Н., Шамаева О.Ю., 1979). Сформулированы критерии эффективности применения моделей вычислений, которые определяют связь параметров задачи и вычислительной системы (Шамаева О.Ю., 1991). Тензорный метод применен для моделирования и проектирования режимов линейных двигателей транспорта на магнитном подвесе (Сохор Ю.Н., 1991, 1997); для расчета вибросостояния газотурбинных двигателей (Деглин Э.Г., Петров А.Е., 1991).

Исследования по развитию и применению тензорной методологии осуществлялись в Ижевске, где под руководством В.А. Кутергина и Н.Н. Непейвода на базе Удмуртского государственного университета, в 80–90-тых годах был проведен ряд конференций и семинаров, изданы сборники докладов. В работах В.А. Кутергина на базе геометрических методов и тензорной методологии разработаны общие подходы к моделированию, анализу и синтезу систем различной природы. Представлены практические приложения для систем механических, тепломеханических, человеко-машинных, робототехнических. Для каждой технической системы разрабатывалась своя теория пространства моделирования на базе римановой и неримановой геометрии (Кутергин, 2007).

Результаты развития тензорного метода применялись также для анализа транспортных систем с точки зрения физической экономики, основанной на измеримых, тензорных

величинах (*Образцова Р.И., Кузнецов П.Г., Пиеничников С.Б., 1996*). В этой работе в качестве инварианта транспортировки грузов введена новая единица «тран», которая учитывает скорость перевозки грузов заданной массы на заданное расстояние. Таким образом, физическая размерность этой величины соответствует потоку энергии, мощности.

Вместе с тем ни в одной из указанных работ не решена проблема расчета изменения процессов при изменении структуры, а в более широком смысле – проблема взаимодействия процессов и структуры в сложных системах.

**Пространство данных.** Следующим этапом в отношении применения пространств нового типа, представленных на рис. 1.6, стало применение тензорного метода в дискретном пространстве данных. Пространство сети существует и непрерывно вдоль ветвей и в этом смысле анизотропное в сравнении с обычным изотропным пространством. В пространстве данных объекты дискретны: точки-данные существуют вдоль выделенных осей – типов данных, а вне осей точки представляют собой отношения данных на осях. Это позволило ввести понятия инварианта, преобразования координат и др.

Автор предложил использовать матричное представление реляционного языка базы данных (*Кузина И.В., Петров А.Е., 1976*). Этот подход в МИФИ развивали А.Е. Арменский и его сотрудники для проектирования банков данных и систем управления базами данных (*Арменский А.Е. и др., 1983, 1986*). Тензорные понятия применялись для разработки информационных систем, методов анализа программ (*Арменский А.Е., 1989*). Диакоптика программно реализована для расчета газотранспортных сетей (*Милославская, 1989*).

Тензорные методы нашли также применение в лингвистике. Для этого вводится *пространство лингвистики* (или пространство естественного языка), заданное именами, частота появления которых в анализируемом тексте служит координатами (*Сухотин, 1978*). Предикаты при этом ведут себя как ковариантные, а имена – как контравариантные компоненты относительно преобразований, изменяющих степень грамматической однородности. При этом возникает проблема введения базиса. Такая геометрическая модель применяется при анализе текстов и позволяет в принципе изучать смысловые инварианты, сохраняющиеся при переводах и пересказах. Разные языки при этом служат «системами координат» для представления (проектирования) в них инвариантного смысла, который содержится в авторском тексте.

**Сетевые модели.** В наименьшей степени получила развитие та составляющая тензорного метода, которая связана с построением эквивалентных (сетевых) моделей для систем из предметных областей, не относящихся к области электротехники. Вместе с тем создание единым методом эквивалентных моделей для предметных областей науки и техники – путь к построению единой теории систем. Одна из причин такого положения

связана не столько с проблемами тензорного метода Крона, сколько с требованиями к способностям разработчика. Необходимо было не только владеть основами тензорного метода, но и достаточно глубоко понимать законы электротехники (если строить эквивалентную электрическую цепь, как это делал Крон). А помимо этого необходимо профессионально разбираться в особенностях моделируемой системы, т.е. быть специалистом в этой предметной области. Соединить вместе такой набор способностей, или создать коллектив ученых-аналитиков, который в состоянии обеспечить все необходимые качества, не всегда возможно. По этой причине возникло несколько отмеченных выше направлений, использовавших только те элементы тензорного метода, которые позволяли решать соответствующие конкретные задачи.

Тензорный метод двойственных сетей может облегчить задачу освоения технологии построения эквивалентных моделей, поскольку не требуется дополнительная понятийная «прослойка» в виде электротехники. Сам Крон также отмечал, что электрические аналогии налагают ограничения на применение тензорного метода в других предметных областях. Он писал, что «...чем дальше автор уходил от электротехники, к исследованию других систем, тем больше чувствовал необходимость более строгого формулирования и применения тех правил и законов, которые действуют в самой электротехнике» (Крон, 1972).

Автор также начал с того, что разработал новую сетевую модель в виде электрической цепи для межотраслевого баланса в экономике, которая обеспечивает расчет всей системы по частям и объединение потоков продуктов и денежных средств (Петров, 1984, 1985, 1998, 2002). Показано, что применение такой модели обеспечивает значительное сокращение вычислений при расчете баланса продуктов при заданном плане или ожидаемом спросе. Потоки продуктов в сетевой модели представлены контурными и узловыми токами электрической цепи, а напряжения представляют пропорции распределения денежных средств, обеспечивающих выпуск продуктов. Это обеспечивает расчет изменения потоков денежных средств в системе выпуска продукции при изменении структуры производства.

В этой работе впервые экономическая система, способная накапливать энергию, представлена с помощью технической системы, которая только рассеивает энергию. Это обеспечивает двойственность замкнутых и разомкнутых путей, которые как независимы друг от друга, так и взаимно дополняют друг друга. Таким образом, отклики-напряжения в разомкнутых путях (на воздействия – узловые токи, представляющие план выпуска или конечный спрос), сами используются как источники воздействия в контурах, (они представляют межотраслевые поставки). Комбинация двух типов воздействия в замкнутых и разомкнутых путях создает в ветвях сети контурные и узловые токи и напряжения. Сумма

токов соответствует потокам продуктов, а сумма напряжений соответствует потокам денежных средств. Подробнее данная модель рассмотрена в главе 5.

Сетевая модель для процесса массообмена (ректификации) при переработке нефти (Петров, 1998) построена на основе метода двойственных сетей. Данная модель применяется в подсистеме прогноза пожароопасных ситуаций АСУ ТП объектов нефтепереработки. Температура и давление в потоках низкокипящих и высококипящих компонент преобразуемого потока нефти были представлены как ковариантные и контравариантные компоненты вектора, наложенного на структуру сети, которая отображает конструкцию ректификационной колонны. Электрические аналогии уже не использовались.

Тензорный подход автор применил при создании и внедрении методики анализа состояния банков и банковской системы России в целом (Петров, система «Банки и финансы», 1995 – 2007 гг.). В данной методике банк представлен моделью по аналогии с трансформатором, который по одной группе циклов привлекает средства (и платит за пользование ими), а под другой группе циклов размещает средства, и получает прибыль от этих активов. Информационной основой системы «Банки и финансы» является база данных балансов банков по счетам второго порядка. Данная система обеспечивает производство ряда информационных продуктов в печатной и электронной форме, которые пользуются спросом. Однако эта система не использует возможности модели по расчету и анализу потоков денежных средств, которые протекают в банковской системе в динамике их изменений в процессе взаимодействия с реальным сектором и под влиянием внешних воздействий.

Тензорная модель производственных и финансовых показателей предприятия, созданная на основе измеримых величин потоков продуктов и денежных средств, применялась для анализа динамики состояния ряда отраслей и предприятий промышленности России (Петров, журнал «Промышленность России», 1997–1998 гг. «Наука и промышленность России», 2000–2003). Информационной основой модели предприятий являлась база данных производственных и финансовых показателей базовых предприятий промышленности России.

Метод двойственных сетей, основанный на использовании измеримых величин, позволяет получить по единой технологии математические модели и алгоритмы расчета процессов и структуры сложных систем, относящихся к разным предметным областям. Более того, высокий динамизм изменения структуры при проектировании, создании и функционировании любой сложной системы делает необходимым создание таких общих методов расчета и анализа изменения поведения системы при изменении связей элементов, которые применимы на всех этапах жизни системы. Новые возможности, которые дает этот

метод, основаны на применении инварианта двойственных сетей, который в физике соответствует закону сохранения потока энергии.

Более того, моделирование исследуемой системы двойственными сетями часто позволяет найти существующие в самой системе новые, но неочевидные при исследовании другими методами, связи и соотношения. Это происходит потому, что двойственные сети связывают описание процессов с описанием структуры. Такое сочетание обеспечивает описание и расчет изменений, которые происходят в процессах не только при изменении источников воздействия или состояния (характеристик) самих элементов, но также и при изменении структуры связей. Таким образом, двойственная сеть, как математическая модель обеспечивает больше возможностей для представления (расчета, анализа) реальной сущности сложных систем, чем те модели, которые могут отражать только процессы или только структуру таких систем.

Например, сетевая модель потоков продуктов для задачи межотраслевого баланса дает полное описание потоков ресурсов, производства товаров и услуг, потоков взаимных поставок и конечных продуктов для удовлетворения спроса, что обеспечивает, в частности, расчет и решение задач экологии в единой системе взаимных потоков природы и общества. Помимо этого, двойственные величины в такой сетевой модели генерируют также значения ковариантных величин, которые можно интерпретировать как пропорции распределения финансовых ресурсов и потоков, обеспечивающих движение товарных ресурсов и потоков.

**Параллельные вычисления.** Применение метода двойственных сетей для повышения эффективности вычислений, как отмечалось, связано с новыми возможностями декомпозиции и агрегирования исследуемых систем. Применение двойственных сетей с новым инвариантом позволило получить алгоритмы расчета систем по частям для любого вида заданных источников воздействия. Уравнения расчета сети при изменении соединений в сети, при разделении сети на части, произвольные подсистемы, или при соединении целой системы из частей получены в общем виде, т.е. прямым выводом из тензорных уравнений сети с учетом специфики соответствующих матриц преобразования. Таким образом, получены полные уравнения обобщенной диакоптики, которые решают задачу взаимодействия частей и целого для одномерных сетей и сетевых моделей систем.

Алгоритмы декомпозиции сетевых моделей сложных систем на подсистемы для расчета по частям, с последующим объединением результатов в решение полной системы, обеспечивают организацию параллельных вычислений. Это возможно потому, что инвариант двойственных сетей позволяет осуществлять расчет сложной системы по частям, причем без итераций, которые возникают при расчете взаимодействия соединяемых подсистем. Дело в том, что все изменения связей в сетевой модели системы сразу же отображаются в

двойственной сети. Такие алгоритмы необходимо применять для организации вычислений в компьютерах с параллельной архитектурой. Алгоритмы расчета сетей с переменной структурой, в том числе по частям, рассмотрены в главе 3.

**Аналогии между системами и сетями.** Важнейшим элементом построения эквивалентных моделей являются аналогии между величинами предметной области и величинами двойственных сетей. Для классификации и установления аналогий физических величин, характеризующих поведение реальных систем различной природы, все большую роль играет *LT*-таблица, которая рассмотрена в разделе 1.1.2. Возможности широкого применения для исследования сложных систем, заложенные в данной таблице, получили свое развитие в работах А.С. Чуева (*Чуев, 2002*) и Б.Е. Большакова (*Большаков, 2002*). Тензорный метод двойственных сетей играет важную роль в качестве математического аппарата при создании систем для управления устойчивым развитием (*Кузнецов О.Л., Кузнецов П.Г., Большаков Б.Е., 2000; Кузнецов О.Л., Большаков Б.Е., 2002*).

В работах И.П. Копылова окружающий мир с точки зрения энергетика представляется состоящим из преобразователей энергии. Вселенная рассматривается с точки зрения электромагнитной модели тороидальной конфигурации, на замкнутый «бублик» которой нанизаны галактики. Движения галактик аналогичны замкнутым потокам магнитного поля, силовые линии которого уходят в бесконечность. Галактики существуют парами, одна из них, например, в наблюдаемом мире, а другая – в антимире, причем взаимодействовать они могут через черные дыры. Жизненный цикл галактик происходит от одного большого взрыва до другого, когда состояние материи переключается двойственным образом в свою противоположность. Например, протоны становятся заряженными отрицательно, а электроны – положительно, и т.д. (*Копылов, 1999, с. 25–27*). Основой такой сетевой модели Вселенной являются потоки электромагнитной энергии в структуре.

**Сетевые структуры** становятся привычными, и все более проникают в общественное сознание не только благодаря Internet. Транспортные сети перемещают энергоносители, грузы, людей по земле, под землей, по воде, по воздуху. Сети финансовых потоков, которые благодаря сетям телекоммуникаций приобрели огромную мобильность, определяют состояние экономики стран и регионов. В сетевом государстве решения могут приниматься не только в узлах, отождествляемых с властью, при этом реализация принятых решений оказывает влияние на жизнь людей и состояние экономики не только данного государства, но и других стран и регионов (*Арменский, Гусев, Петров, 2003*).

Необходимость управления устойчивым развитием определяется значительной неустойчивостью мирового хозяйства, а также хозяйственных систем отдельных стран и регионов. Подъемы и спады конъюнктуры на мировых рынках показывают актуальность

расчета вариантов возможных изменений в условиях постоянной динамики мировой экономики. Отсутствие единой информационно-аналитической системы мониторинга и анализа рынка энергоносителей во взаимодействии с другими отраслями мирового хозяйства является одной из причин финансово-энергетических кризисов. Например, не были предсказаны ни резкое падение цен на нефть в 1997–1998 годах, ни последовавший затем резкий рост цен в условиях изменений спроса и предложения, критической зависимости производства в одних странах от уровня спроса и потребления в других странах.

Причинами начавшегося в 2007 году глобального экономического кризиса стали провал систем учета и контроля рисков; дисбалансы, сложившиеся между масштабами финансовых операций и фундаментальной стоимостью активов; противоречия между ростом фондовых индексов и повышением производительности, реальной эффективности компаний. Такие проблемы возникали, возникают и могут возникнуть в будущем, из-за отсутствия методов расчета отношений между потоками продуктов и денежными потоками. Основы такого подхода к построению модели социально-экономической системы методом двойственных сетей рассмотрены в главе 5.

Вопросы применения методов физической экономики, основанной на использовании измеримых величин, обсуждались на Международных симпозиумах «Пространство и время в эволюции глобальной системы природы, общества и человека» в 2001 и 2002 гг. Тензорный метод занимает важное место в системе методологических и математических средств создания систем управления устойчивым развитием. Данное направление поддерживается и развивается в Российской академии естественных наук, в Международном университете природы, общества и человека «Дубна».

#### 1.4. Технология применения тензорного метода

Рассмотрим последовательность основных этапов применения тензорного метода для исследования систем, которые существуют в различных предметных областях.

Возможность применения тензорного подхода в качестве общего метода моделирования физических, технических и экономических систем обеспечивают аналогии, которые обнаруживаются при сравнении уравнений поведения сложных систем разных предметных областей. Именно аналогии позволяют исследовать различные по своей природе системы единым методом. В качестве математического аппарата будем применять двойственные сети, обладающие тензорными свойствами, которые связывают описание процессов и структуры.

Основная проблема моделирования технических, физических, экономических систем сетями состоит в том, что не существует общего метода установления аналогий одновременно как структуры, так и уравнений поведения. Двойственные сети дают путь к решению этой проблемы благодаря соединению процессов и структуры в едином описании. Вместе с тем сам процесс установления аналогий между какой-либо системой и сетевой моделью требует определенного творческого воображения и не может быть полностью автоматизирован. В этой части тензорная методология остается скорее искусством, чем наукой. Впрочем, создание математической модели в любой области всегда было творчеством, которое требовало воображения и определенной фантазии. Есть легенда, что Гаусс сказал про Гете: «Он стал поэтом. Для математики у него не хватало воображения».

Рассмотренные выше направления, развивавшие тензорный подход, не охватывали, как отмечалось, в полном объеме все составляющие тензорной методологии исследования систем. Вместе с тем, очевидно, что данная методология стремится к наиболее полному отражению реальности. В данном разделе рассматривается технология применения тензорной методологии для создания сетевых моделей исследуемых систем разных предметных областей. Такие модели позволяют проводить единым методом двойственных сетей расчет, анализ и управление поведением систем при разных вариантах изменения структуры и протекающих процессов.

Технология применения тензорного метода для моделирования, расчета, анализа, прогнозирования и управления сложными системами включает в себя следующие основные этапы:

- Установление и анализ аналогий между предметной областью и сетью, включая анализ необходимой для моделирования размерности элементов сети
- Определение источников информации и формирование баз данных, которые способны описать поведение исследуемой системы в терминах измеримых величин



- Приведение уравнений поведения исследуемой системы к тензорному виду по отношению к изменению ее структуры
- Построение сетевой модели, т.е. установление соответствия между величинами и структурой исследуемой системы и параметрами и структурой сети
- Расчет сетевой модели и анализ полученных результатов для различных вариантов изменения воздействий и вариантов структуры связей
- Применение полученных результатов к исследуемой системе для анализа ее состояния, прогнозирования поведения, выработки управляющих воздействий
- Формирование заданных критериев, которые должна обеспечивать система и применение сетевой модели для синтеза вариантов структуры, обеспечивающих выполнение этих критериев.

#### **1.4.1. Аналогии между процессами в системах и сетях**

Основой моделирования сложных систем являются *аналогии* и подобие величин, уравнений процессов, структурных связей. Для этого сопоставляют понятия в исследуемой системе и в сети. Это необходимо для установления сходства и различия в системе и модели, чтобы представить ее в терминах модели (сети). Для этого сравнивают виды потоков энергии, которые имеют различия по *физической сути* (электрическая, тепловая, кинетическая) и по виду *структуры* (сети линий, поверхностей, объемов).

Подобие, аналогии внешне различных явлений, позволяют по частному делать выводы о целом по законам преобразования (*Циолковский К.Э.*, 1964). Подобие в механике, моделирование по теории физической размерности исследовали Л.И. Седов (*Седов*, 1981), в электроэнергетических системах – В.А. Веников (*Веников* 1984), другие ученые. Эти аналогии связаны не со структурой системы, а с процессами. Двойственные сети позволяют моделировать как процессы, так и структуру сложных систем.

Аналогии отражают фундаментальное единство природы процессов и структуры, присущее внешне различным системам. Такие аналогии обеспечивают сопоставление процессов и структуры систем разных предметных областей с векторами и структурой двойственных сетей. Это является необходимым условием для создания и применения технологии построения сетевых моделей, в которых одновременно представлены и процессы, и структура сложных систем.

Понятия геометрической размерности и физической размерности отчасти взаимосвязаны. Видов энергии и видов структуры немного, что позволяет сопоставлять технические и экономические системы. «Удивительно, как мало существует первичных типов элементов, образующих строительные блоки разнообразных технических структур... их разнообразие отличается только способом соединений, ... а многообразие теорий только

типом рассматриваемой гипотетической системы отсчета» (*Kron*, 1942). В.И. Ленин писал: «Единство природы обнаруживается в поразительной аналогичности дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений» (*Материализм и эмпириокритицизм*).

Установить аналогии между электрическими и неэлектрическими величинами пытались многие. В частности, Кельвин строил механическую модель уравнений Максвелла, но не смог представить ток смещения гироскопом. Первым установил аналогии электрических и неэлектрических систем Никель (*Nickle*, 1925). В работе «Динамические аналогии» (*Olson*, 1943) аналогии связаны с линейными описаниями, а механические движения ограничены переносами.

Использование эквивалентных электрических цепей в качестве моделей систем ограничивало возможности применения тензоров в технике. С точки зрения практики цепь удобна, поскольку в ней явно представлены и процессы (поток электричества описывает закон Ома) и структура (баланс токов в узлах и напряжений в контурах описывают законы Кирхгофа). Но цепь не есть математическая модель. Она сама только отражает и реализует абстрактные отношения, закономерности, которые существуют вне зависимости от физической реализации. Эти общие закономерности лишь по-разному проявляются для разных предметных областей. Применение цепей оставляло тензорный метод в рамках инженерного подхода; по сути дела это являлось признанием его недостаточной строгости, что проявлялось в теоретических проблемах, рассмотренных в разделе 1.3.2.

Применение двойственных сетей, в которых группа преобразований структуры имеет новый инвариант, позволило решить эту проблему. Процессы и структура представлены векторами и путями сети. Структура представлена замкнутыми и разомкнутыми путями, которые образуют базисы и вместе составляют векторное пространство. Процессы представлены векторами (или другими объектами), наложенными на это пространство сети. Векторы, заданные внешними источниками воздействия, имеют независимые компоненты в разомкнутых путях. Векторы, заданные внутренними источниками воздействия, имеют независимые компоненты в замкнутых путях.

Двойственные сети позволяют заменить физическое моделирование систем электрическими цепями математическим моделированием. Электрическую цепь также можно представить сетевой моделью. Например, двойственные электрические цепи, при согласованном изменении структуры которых остается постоянным поток энергии (измеряемый рассеиваемой мощностью), можно представить моделью в виде двойственных сетей. Таким образом, электрическая цепь – это физическая система, а двойственная сеть – математическая абстракция, математическая модель. В главе 3 в таблице 3.1 показано соответствие между понятиями двойственных сетей и электрических цепей.

Предполагается, что все процессы в системах осуществляют преобразование потоков энергии. Анализ исследуемой системы начинается с определения соответствия величин их физическому содержанию в качестве соответствующих компонентов описания процесса (потока энергии). Например, необходимо определить, что является воздействием, откликом, а также материальной характеристикой элемента, определяющей метрику системы. Какие величины по способу их измерения являются продольными, а какие поперечными. Какой поток они характеризуют – поступающий в систему из внешней среды, или возникающий и преобразуемый внутри самой системы. Виды энергии определяют физические свойства системы, а направления потоков энергии определяют ее функциональное состояние как замкнутой или открытой системы.

Аналогии между такими параметрами систем и моделирующими понятиями сетей были рассмотрены в разделе 1.1.2. Основные понятия описания систем: воздействия – отклики, продольные – поперечные, контравариантные – ковариантные величины, материальные характеристики метрики, замкнутые и разомкнутые пути, открытые и закрытые системы, таблица  $LT$  для классификации измеримых величин. Эти понятия используются для создания сетевых моделей процессов и структуры систем из разных предметных областей.

Вместе с тем нельзя автоматически перенести установленные аналогии и соотношения между, например, продольными и поперечными величинами, воздействиями и откликами, определяющими потоки энергии, на любую систему, в которой распространяются потоки энергии данного вида. Для каждой системы надо на основе аналогий конструировать соответствующую сетевую модель, свойства которой будут адекватны свойствам исходной системы. В качестве примера рассмотрим отношения между воздействиями и откликами (продольными и поперечными величинами) в некоторых системах, из состава перечисленных в разделе 1.1.2: электротехнике, механике, гидродинамике. Возникающие при этом ограничения связаны с тем, что речь пойдет, соответственно, о постоянных токах, равномерном движении и ламинарном течении, чтобы не усложнять рассмотрение.

**1. Электротехника.** Произведение пары продольных и поперечных величин в каждой предметной области имеет физическую размерность мощности, т.е.  $[L^5 T^{-5}]$ . Например, в электрических системах продольная величина *ток* (имеет размерность  $[L^3 T^{-3}]$ ), измеряется в одной точке; и поперечная величина *напряжение* (имеет размерность  $[L^2 T^{-2}]$ ), измеряется как разность значений потенциала в двух точках. Их произведение имеет размерность *мощности*  $[L^5 T^{-5}]$  и характеризует поток электрической энергии. Уравнения поведения для внутреннего воздействия (источники напряжения) и внешнего воздействия (источники тока) рассмотрены в разделе 1.1.2.

Полученное описание в терминах  $LT$ -таблицы, воздействий и откликов, продольных и поперечных величин позволяет построить сетевую модель для систем, реализующих процесс передачи электрической энергии. В  $LT$ -таблице получаем четверку клеток-величин, определяющих потоки энергии в данной предметной области, которые образуют две тройки «воздействие – сопротивление – отклик» для замкнутых систем и для разомкнутых систем.

Воздействие-ток  $[L^3 T^{-3}]$ , отклик-напряжение  $[L^2 T^{-2}]$ , мера инерции (метрика) – проводимость  $[L^1 T^{-1}]$  – для открытых систем.

Отклик-ток  $[L^3 T^{-3}]$ , воздействие-напряжение  $[L^2 T^{-2}]$ , мера инерции (метрика) – сопротивление  $[L^{-1} T^1]$  – для замкнутых систем.

**2. Механические системы.** В механике сила  $F$  (продольная величина, измеряется в точке приложения) имеет размерность  $[F] = [L^4 T^{-4}]$ , а скорость  $v$  (поперечная величина, измеряется как разность положения тела в двух точках в единицу времени), имеет размерность  $[v] = [L^1 T^{-1}]$ . Их произведение имеет размерность *мощности*  $[L^5 T^{-5}]$  и характеризует поток кинетической энергии.

Уравнение поведения открытой механической системы, по аналогии с электротехникой, может иметь вид  $F = X v$ , где  $X$  – коэффициент пропорциональности, связывающий силу и скорость, должен иметь размерность

$$[X] = [F] / [v] = [L^4 T^{-4}] / [L^1 T^{-1}] = [L^3 T^{-3}].$$

Такой коэффициент пропорциональности не может быть массой  $m$ , поскольку масса участвует в уравнении второго закона Ньютона:

$$F = m a,$$

где ускорение имеет размерность  $[a] = [L^2 T^{-2}]$ , а масса  $[m] = [L^3 T^{-2}]$ . Таким образом, коэффициент  $X$  имеет размерность «масса в единицу времени», т.е. скорость течения массы. Предметная область, в которой сила и скорость связаны с течением массы, известна – это реактивное движение, которое используется в ракетной технике.

Любой ракетный двигатель тем или иным способом выбрасывает из ракеты некоторую массу, запас которой (так называемое рабочее тело) находится внутри ракеты (*Левантовский В.И.*, 1980, с. 22–23). На выбрасываемую массу со стороны ракеты действует некоторая сила, и такая же сила, но в противоположном направлении, действует на ракету; она называется силой тяги, которую обозначим  $F$ . Сила тяги пропорциональна скорости выбрасываемой массы и величине массы, расходуемой в единицу времени. Скорость выбрасываемой массы, скорость истечения по отношению к ракете, обозначим  $v$ . Секундный расход массы, который обозначим  $q$ , это и есть в данном случае наш коэффициент  $X$ . Его размерность масса в единицу времени, т.е.  $[L^3 T^{-3}]$ .

Таким образом, роль материальной характеристики, метрики в данной предметной области играет секундный расход массы. Заметим, что воздействием является сила, т.е. продольная величина, следовательно, речь идет об открытой системе. Действительно, ракета выбрасывает массу в окружающую среду, следовательно, оказывает на нее воздействие. Для замкнутой системы воздействием является скорость. Уравнения должны быть записаны в обратном порядке, а метрической характеристикой будет величина, обратная по размерности секундному расходу массы, т.е.  $[L^{-3} T^3]$ .

Полученное описание в терминах  $LT$ -таблицы, воздействий и откликов, продольных и поперечных величин позволяет построить сетевую модель для систем, реализующих принцип реактивного движения. Интересно, что величины одной размерности в терминах  $LT$  могут в одной предметной области быть метрической характеристикой, а в другой играть роль воздействий – откликов. Например, величина  $[L^3 T^{-3}]$ : здесь это секундный расход массы, метрическая мера связи силы и скорости; а в электротехнике это величина тока, который может быть воздействием или откликом.

В  $LT$ -таблице получаем четверку клеток-величин, определяющих потоки энергии в данной предметной области, которые образуют две тройки «воздействие – сопротивление – отклик» для замкнутых систем и для разомкнутых систем.

Воздействие-сила  $[L^4 T^{-4}]$ , отклик-скорость  $[L^1 T^{-1}]$ , мера инерции (метрика)  $[L^3 T^{-3}]$  – для открытых систем.

Отклик-сила  $[L^4 T^{-4}]$ , воздействие-скорость  $[L^1 T^{-1}]$ , мера инерции (метрика)  $[L^{-3} T^3]$  – для замкнутых систем.

**3. Гидродинамические системы.** В гидродинамике воздействиями и откликами являются поток жидкости (объем в единицу времени) и давление (сила, оказывающая воздействие на единицу площади). Давление  $p$  является продольной величиной, измеряется в каждой точке приложения, имеет размерность  $[p] = [L^2 T^{-4}]$ . Поток жидкости (скорость изменения объема)  $q$  является поперечной величиной, измеряется как разность положения тела в двух точках в единицу времени, имеет размерность  $[q] = [L^3 T^{-1}]$ . Размерность произведения давления и потока жидкости имеет размерность *мощности*  $[L^5 T^{-5}]$ , и характеризует поток энергии, связанный с течением жидкости.

Уравнение поведения открытой гидродинамической системы, по аналогии с электротехникой, может иметь вид  $p = X q$ . Здесь  $X$  – коэффициент пропорциональности, связывающий давление и поток жидкости, т.е. играющий роль «сопротивления», который должен иметь размерность:

$$[X] = [p] / [q] = [L^2 T^{-4}] / [L^3 T^{-1}] = [L^{-1} T^{-3}].$$

Такой коэффициент пропорциональности мог бы быть вязкостью  $\eta$ , поскольку вязкость характеризует внутреннее трение в жидкости, и, таким образом является «мерой инерции», сопротивления потоку, метрической характеристикой. Однако вязкость имеет другую размерность, которая следует из основного закона вязкого течения, установленного Ньютоном в 1687 году (ФЭС, 1984, с. 99):

$$F = h (v_2 - v_1) S / (z_2 - z_1),$$

где

- $F$  – тангенциальная (касательная) сила, вызывающая сдвиг слоев жидкости (газа) друг относительно друга;
- $S$  – площадь слоя, по которому происходит сдвиг;
- $(v_2 - v_1) / (z_2 - z_1)$  – градиент скорости течения (быстрота изменения от слоя к слою);
- $h$  – коэффициент пропорциональности, который называется коэффициентом динамической вязкости, или просто вязкостью.

Таким образом, вязкость численно равна тангенциальной силе, приходящейся на единицу площади, необходимой для поддержания разности скоростей, равной единице. Отсюда следует, что размерность вязкости равна  $h = [L^2 T^{-3}]$ , а это совсем не та размерность, которая должна была бы связывать давление и поток жидкости в качестве «сопротивления».

Уравнение поведения замкнутой гидродинамической системы, по аналогии с электротехникой, может иметь вид  $q = X^{-1} p$ . Здесь  $X^{-1}$  – коэффициент пропорциональности, связывающий поток жидкости и давление, т.е. играющий роль «проводимости». Это величина, обратная метрическому коэффициенту в уравнении разомкнутой гидродинамической системы.

$$[X^{-1}] = [q] / [p] = [L^3 T^{-1}] / [L^2 T^{-4}] = [L^1 T^3].$$

Величина, обратная вязкости, которая могла бы играть здесь роль коэффициента пропорциональности, называется текучесть  $j = 1/h$ , она имеет размерность  $j = [L^{-2} T^3]$ , а это совсем не та размерность, которая должна связывать поток жидкости и давление.

Отсюда следует, что уравнение описания ламинарного течения, где имеется прямая пропорциональная зависимость между давлением и потоком жидкости, должно иметь другую форму, и удовлетворять некоторым ограничениям. Эти ограничения показывают, что не всякую задачу течения жидкости можно представить прямой связью давления и потока жидкости, а только достаточно простые задачи, которые вместе с тем могут представлять теоретический и практический интерес. Прямая пропорциональность между давлением и потоком жидкости есть в законе Пуазейля, который справедлив для нормальных вязких жидкостей, протекающих через капилляр (тонкую цилиндрическую трубку, в которой течение ламинарное).

$$q = k d^4 (p - p_0) / l = p/128 * (d^4 / h) * (p - p_0) / l,$$

где

- $d$  – диаметр трубки, размерность  $[d] = L^1$ ;
- $l$  – длина трубки, размерность  $[l] = L^1$ ;
- $p$  – давление, размерность  $[p] = [L^2 T^{-2}]$ ;
- $h$  – коэффициент вязкости, размерность  $[h] = [L^2 T^{-3}]$ .

Если подставим все размерности в уравнение закона Пуазейля, то получим, что уравнение полностью удовлетворяется по балансу размерностей, а размерность коэффициента  $X^{-1}$ , связывающего поток жидкости и давление, включает в себя не только вязкость, но и объем.

$$[X^{-1}] = [q] / [p] = [d^4 / (h l)] = [L^4] / ([L^2 T^{-3}] [L^1]) = [L^3] / [L^2 T^{-3}] = [L^1 T^3].$$

Этот коэффициент можно рассматривать как новую физическую величину, которая выражает «объемную текучесть», т.е. совокупную текучесть всего объема трубки, и удовлетворяет всем условиям связи потока жидкости с продольными и поперечными величинами. Записав закон Пуазейля в обратном порядке, получим аналогичную «объемную вязкость»  $X$ , размерность которой равна

$$[X] = [p] / [q] = [L^{-1} T^{-3}].$$

Такое описание, в терминах  $LT$ -таблицы, воздействий и откликов, продольных и поперечных величин в гидродинамике позволяет построить сетевую модель для систем, реализующих процесс передачи потоков жидкости, например нефти, и нефтепродуктов. Одна из предметных областей, в которой жидкость движется через капилляры, известна – это движение нефти в месторождениях через пористую породу к области забора добывающей скважины (или движение жидкости в породе от нагнетательной скважины). В  $LT$ -таблице можно выделить четверку клеток-величин, определяющих потоки энергии в данной предметной области, которые образуют две тройки «воздействие – сопротивление – отклик» для замкнутых систем и для разомкнутых систем:

Воздействие-давление  $[L^2 T^{-2}]$ , отклик-поток  $[L^3 T^{-1}]$ , мера инерции (метрика) – «объемная вязкость»  $[L^{-1} T^{-3}]$  – для открытых систем

Отклик-давление  $[L^2 T^{-2}]$ , воздействие-поток  $[L^3 T^{-1}]$ , мера инерции (метрика) – «объемная текучесть»  $[L^1 T^3]$  – для замкнутых систем.

Рассмотренные примеры показывают реализацию основных принципов сетевого моделирования. Большинство сложных систем соединяет в единой конструкции несколько сетей преобразования и передачи потоков энергии разного вида. Потоки электромагнитной и механической энергии соединены в конструкции электрических машин, которые называют

электромеханическими преобразователями. Потоки химической, тепловой и механической энергии связаны в конструкции различных систем стрелкового оружия.

Каждой предметной области в *LT*-таблице соответствует «пятерка» клеток-величин. Две из них определяют воздействия и отклики, которые меняются местами в замкнутых и открытых системах. Две другие представляют *отношения* между воздействиями и откликами; продольными и поперечными величинами, которые являются обратными для замкнутых и открытых систем. Пятая величина – мощность, *произведение* продольных и поперечных величин, которая характеризует потоки энергии через систему в данной предметной области. Можно классифицировать все предметные области по «структуре» их представления в таблице *LT*. Более того, для многомерных процессов возникают свои конфигурации величин, которые взаимодействуют между собой, а также с одномерными процессами. Их также надо включить в классификацию. Такая таблица с конфигурацией отношений между величинами воздействий – сопротивлений – откликов в замкнутых и открытых системах для одномерных и многомерных процессов может применяться не только для классификации известных систем, но и для предсказания, прогнозирования новых видов систем, которые еще неизвестны в настоящее время.

Вместе с тем для процессов всех систем, а также их подсистем характерны понятия «воздействие – сопротивление – отклик», которые соответствуют физически измеримым продольным и поперечным величинам, в зависимости от замкнутого или открытого характера системы (подсистемы). Это позволяет моделировать системы любой структурной сложности измеримыми величинами с помощью представления потоков энергии, протекающих через сетевые конструкции. Каждой подсистеме с потоком энергии одного вида соответствует своя сетевая конструкция. Эти сетевые конструкции, представленные соответствующими сетевыми моделями, структурно соединены между собой и обмениваются потоками энергии.

#### **1.4.2. Аналогии между структурой систем и сетями**

Аналогии между структурой различных систем основаны на том, что везде существуют замкнутые и разомкнутые пути распространения потоков энергии. Замыкание разомкнутого пути создает замкнутый путь, и наоборот. Таким образом, замкнутые и разомкнутые пути двойственны и дополнительны по отношению друг к другу. С этими понятиями связаны законы сохранения потока в узлах или в конурах, которые находят свое выражение в разных предметных областях, разных науках. Например, первый закон Кирхгофа в электротехнике похож на принцип Даламбера в механике, установленный на основе второго закона Ньютона: сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, подобно тому, как сумма токов в узле равна нулю.



Сети связей элементов, в которых протекают потоки, представляют структуру. Для сети из одномерных элементов, ветвей, которые и рассматриваются в основном в данной работе, понятие *сети* является изменением и обобщением понятия *граф*. Основные отличия графов и сетей состоят в том, что граф определяется дугами (ветвями) и вершинами (узлами); сеть определяется только ветвями, число узлов может меняться.

При изменении структуры (изменении числа узлов) меняется граф сети, материальные характеристики ветвей остаются прежние. Таким образом, при изменении числа узлов в сети меняется один из двух инвариантов, определяющих граф, поэтому данный математический объект нельзя использовать для моделирования систем с переменной структурой. Инвариант сети – количество ветвей – дополняется тем, что существует ранее неизвестный новый инвариант двойственных сетей. Двойственная сеть дополняет исходную сеть так, что при всех изменениях структуры количество узлов, замкнутых и разомкнутых путей остается постоянным. В этом состоит суть данного инварианта, это обеспечивает отличие свойств сети и графа. Вместе с тем этот инвариант допускает естественное обобщение на сети из многомерных элементов.

Инвариант двойственных сетей обеспечивает алгебраическую полноту допустимых преобразований и выражается соотношением, связывающим матрицы преобразования структуры и материальных (метрических) характеристик ветвей сетей. Этот инвариант связывает двойственные преобразования структуры и является основой применения тензорного метода расчета сетей для моделирования, расчета и управления в сложных системах. Двойственная сеть увеличивает, расширяет структуру исходной сети, что придает этой совокупности двух сетей новые свойства, которые не использовались в других методах. Эти новые свойства обеспечивают преимущество при создании и расчете моделей сложных систем, позволяют извлечь дополнительную информацию о системе, не заданную в исходной постановке задачи.

Ключевыми понятиями для графа являются циклы и разрезы, а для сети – замкнутые пути (контур) и разомкнутые пути. Циклы и контур, как понятия, по своей сути практически совпадают, а разрезы и разомкнутые пути – нет. Однако понятие разреза полезно для сети, поскольку позволяет дать геометрическую интерпретацию матрицы  $A$ , показывающей преобразование ковариантных компонент вектора (в электрической терминологии – напряжений на разомкнутых путях).

Циклы и разрезы графа предполагают, что каждая ветвь входит в них один раз, и нет самопересечений. Пути в сети в общем виде – это набор ветвей, которые связаны общим направлением, отличаясь тем, что для контура узлы начала и конца совпадают, а для разомкнутого пути указаны узел начала и узел конца, что важно в отношении линейной

зависимости путей. Для понятий циклов и разрезов доказана связь матриц цикломатической и разрезов для двойственных графов.

Для графа вводится понятие базиса циклов и базиса разрезов отдельно. Матрицы цикломатическая и разрезов ортогональны, но прямоугольны, поэтому не образуют группу (нет обратных матриц). Для сети базис путей включает как контуры, так и разомкнутые пути, матрица преобразования квадратная; эти матрицы образуют группу, обратное преобразование всегда возможно. Это допускает преобразования между базисами и произвольными векторами путей в сетях с разным числом узлов.

Для введения базисов в полном пространстве двойственной сети и разложения по нему произвольного вектора (и других геометрических объектов), вводится понятие взаимного базиса  $p^a$ . Он связан с прямым базисом  $p_a = g_{ab} p^b$  через метрический тензор (Корн, 1977, с. 507). При всех преобразованиях в геометрии, размерность пространства или подпространств не меняется, матрицы преобразования образуют группу. *Преобразования координат не меняют величины вектора.*

В сетях меняются размерности подпространств циклов (контуров) и разрезов (разомкнутых путей) при изменении структуры. *Преобразования координат, изменяющие число контуров, изменяют величину вектора* в одной сети. В двойственных сетях базис замкнутых путей рассматривается как единое целое, состоящее из двух частей, при этом в такой базис входят контуры обеих сетей. Аналогично, базис разомкнутых путей составляет единое целое из разомкнутых путей обеих сетей. Базисы замкнутых путей (контуров) и базисы разомкнутых путей ведут себя при преобразованиях подобно прямому и взаимному базисам.

При построении сетевой модели системы необходимо установить структурные аналогии, и определить, какие потоки в системе относятся к замкнутым путям, а какие относятся к разомкнутым путям. В соответствии с этим будут установлены аналогии для воздействий и откликов, метрических характеристик, в исследуемой системе и соответствующими понятиями в модели.

Структура сетей, вместе с описанием процессов, является основной составляющей применения тензорного метода двойственных сетей для моделирования систем из различных предметных областей. Более того, новые инвариантные закономерности структурных отношений двойственных сетей позволяют получить больше информации об исследуемой системе, чем это предполагается в исходной постановке задачи. Это обеспечивает описание в единой модели процессов и структуры, что позволяет привлечь свойства структуры для расчета и управления процессами в системе. В этом состоит преимущество применения тензорного метода.

### 1.4.3. Построение сетевых моделей сложных систем

Математические модели всегда имеют ограничения в полноте и достоверности представления реальных систем. Однако модели являются необходимым инструментом применения математики для анализа, управления, проектирования реальных объектов. Наилучшие результаты дают модели, которые наиболее полно отражают содержание моделируемого объекта.

Сам факт возможности построения сетевой модели является критерием правильности, адекватности понимания исследуемой предметной области. Понимания, а значит возможности проектирования и управления процессами в системах, относящихся к данной предметной области. Поскольку это означает, что все измеримые величины, составляющие существо данной системы, получили свое место на структурной схеме, описывающей связи между элементами системы. Количественные отношения между величинами задают уравнения поведения в связях каждого типа сетевой модели.

Моделирование сложных систем с помощью потоков в сетях пытались применить многие исследователи. Решение задач о потоках в сетях для транспортной задачи линейного программирования рассматривали Л. Форд и Д. Фалкерсон (*Форд*, 1966). Это подкласс задач о потоке, когда из предположения о том, что исходные данные целочисленные, вытекает существование и целочисленного решения. Однако в общем случае исходные данные в сети произвольны, а решение тем более.

Дж.Б. Деннис (*Деннис* 1961) построил электрические цепи для ряда задач оптимизации, используя их в качестве аналоговых машин для решения задач небольшой размерности. Модели транспортной задачи состоят из источников и диодов, а для описания процесса движения по кривой критических состояний используются также сопротивления и идеальные трансформаторы.

Распределение токов в ветвях, которое минимизирует мощность, рассеиваемую на сопротивлениях, удовлетворяет законам Кирхгофа. Такое распределение токов составляет решение задачи сети и удовлетворяет принципу наименьшего действия, поскольку законы Кирхгофа связаны с минимизацией рассеиваемой в электрической цепи энергии. Эти модели не используют изменений структуры. Значения токов и напряжений на входе изменяются до тех пор, пока распределение токов и напряжений не удовлетворит законам Кирхгофа. Поэтому нет матриц преобразования, нет инвариантов. Эти модели реализуют с помощью электрических понятий метод Форда и Фалкерсона, симплекс-метод и т.д.

Для построения сетевой модели исследуемой системы с помощью двойственных сетей, уравнения поведения этой системы необходимо привести к тензорному виду.

В необходимости приведения уравнений поведения моделируемой системы к тензорному виду убедился Крон при построении эквивалентных моделей в виде электрических цепей для уравнений Максвелла, Шредингера, Навье-Стокса. Крон писал, что для приведения уравнений и всех величин в них к тензорному виду бывает необходимо ввести некоторые новые отношения, которые существуют в системе, но обычно не используются. Например, ввести в обе части уравнений одинаковые слагаемые, или умножить обе части уравнений на одни и те же величины. Только при таких дополнениях уравнения и величины в них приобретают тензорные свойства относительно преобразования структуры связей. Обычно такие дополнения необходимы для достижения полноты описания потоков в структуре системы, включая описание баланса потоков в тех узлах и контурах, где они представляются тривиальными и обычно не используются.

В тензорных уравнениях при изменении связей все величины и параметры преобразуются линейно, умножением на матрицу преобразования путей (и/или обратную к ней), столько раз, сколько необходимо в соответствии с валентностью каждой величины. Этого достаточно для построения эквивалентных сетевых моделей физических и технических систем. Однако для экономических систем этого недостаточно. Электрические аналогии для модели задачи баланса продуктов пытался построить Авондо-Бодино (*Авондо-Бодино* 1963). Внешне потоки токов и продуктов похожи, но на деле это не так. Все технические системы рассеивают энергию. Экономические системы накапливают часть проходящей через них энергии и, в этом смысле, развиваются в противоположность техническим системам. Количество энергии на человека в год не убывает, это является общим свойством, как эволюции живого вещества, так и законом развития человечества (*Подолинский*, 1880; *Кузнецов*, 1975).

В этой связи моделирование экономических и технических систем отличается. При построении сетевых моделей технических систем первая проблема – сопоставить величины процессов с разной физической размерностью. Вторая – для приведения уравнений системы к тензорному виду надо восстановить те отношения между параметрами потоков в структуре, которыми обычно пренебрегают.

При построении сетевой модели для задачи межотраслевого баланса, как отмечалось выше, возникла новая проблема. Эта задача состоит в расчете валовых объемов производства отраслей, выпускающих продукты, которые обеспечивают спрос (план) и межотраслевые поставки. Оказалось, что недостаточно просто найти соответствие между воздействиями и откликами, а также отраслями и ветвями сети, чтобы токи представляли продукты. Сами продукты и токи ведут себя в этих системах противоположным образом.

При соединении ветвей независимых контуров становится меньше, и токи взаимно «подавляют» друг друга, сталкиваясь в меньшем числе контуров. Таким образом, при наложении связей величины токов уменьшаются – в соответствии с теоремой Волавера о неусилении мощности в цепи при наложении связей. При соединении отраслей потоки продуктов, наоборот, возрастают, поскольку отрасли не только обеспечивают выпуск продукта для удовлетворения спроса, но и обмениваются своими продуктами (межотраслевые поставки). Благодаря этому, в связанной сети производств реализуется свойство усиления, а в связанной электрической цепи – свойство неусиления.

При моделировании экономической системы технической системой пришлось учесть различие механизмов протекающих процессов. Оказалось, что сеть (цепь), благодаря своей двойственности, обеспечивает адекватное сопоставление этих разнородных процессов. В главе 5 показано, что благодаря наличию двух источников – тока и напряжения – можно однозначно «дополнить» узловые токи двойственными к ним контурными токами до значений потоков продуктов в отраслях. Это уменьшает возможность расчета по частям без итераций, поскольку для каждого значения узлового тока приходится определять «шлейф» значений контурных токов. Однако это позволяет извлечь из такой модели новую информацию, которая расширяет возможности управления.

Сетевая модель обеспечивает получение информации, которой нет в постановке задачи, вскрывая новые закономерности. Дело в том, что модель представляет потоки продуктов комбинациями контурных и узловых токов, но в сети есть и напряжения, которые не представляют потоки продуктов: напряжения на ветвях, вызванные источниками тока; источники эдс, «генерируемые» источниками тока, для приведения в соответствие токов и продуктов; напряжения на ветвях от источников эдс. Каждый вид напряжения имеет свою экономическую интерпретацию, двойственную к потокам продуктов, и соответствует потокам денежных средств. Это обеспечивает возможность расчета материально-финансового баланса, который связывает производство продуктов с необходимыми для этого потоками денежных средств.

#### **1.4.4. Технология расчета систем методом двойственных сетей**

Для моделирования, расчета и анализа сложных технических, экономических систем в данной работе применяются одномерные двойственные сети.

Процессы представлены в сетевой модели как объекты, заданные значениями воздействий и откликов в путях. Соответствие модели и системы определяет тензорный характер преобразования величин, характеристик элементов при изменении структуры. При переходе от одного соединения элементов к другому, новые компоненты получаются

умножением старых на матрицу преобразования базисов путей, или обратную к ней, в зависимости от сложности объекта.

Технология применения тензорного метода основана на существовании единого объекта (точки, вектора, элемента, воздействия или отклика в системе) независимо от координат. Проекция объекта в разных координатах различны, сам объект не меняется. Это обеспечивает преобразование его компонент по линейным формулам.

*В геометрии* объекты не меняются при изменении координат. Меняются значения их проекций, а объекты (например, вектор, квадрат его длины) инвариантны. Преобразования координат образуют группу.

*В пространстве сети* объекты (потoki) в системе меняются при изменении структуры. Изменяются значения продольных и поперечных величин, не только в элементах, но и в сумме по всей сети, т.е. для одной сети нет инварианта преобразования параметров процессов при переходе от одной структуры к другой.

*В методе двойственных сетей*, отражающем реальное изменение потоков в системах при изменении структуры, ситуация меняется. Вектор при изменении структуры связей ветвей меняется в каждой из сетей, но остается постоянным в двух двойственных сетях. Это обеспечивает инвариантность объектов, представляющих процессы и тензорный характер их преобразований при изменении структуры.

Таким образом, технология применения тензорного метода включает в себя следующие основные этапы.

- Определение класса систем, к которому относится исследуемая система по размерности и количеству протекающих процессов, размерности и виду элементов ее структуры.
- Приведение уравнений поведения исследуемой системы к тензорному виду, используя все соотношения между потоками, включая те, которыми обычно пренебрегают. При изменении структуры параметры процессов должны меняться линейно, умножением на матрицы преобразования. В модели потоков продуктов это обеспечивает соотношение баланса потоков на входе отраслей, что не используется в межотраслевом балансе.
- Использование аналогий между процессами и структурой исследуемой системы и сети для построения сетевой модели. Сложность исходной системы может потребовать использования многомерных сетей для моделирования.
- Применение двойственных сетей для расчета и анализа сетевой модели – при изменении соединений элементов, при подключении или отсоединении элементов или подсистем, при разделении на части или соединении из частей целого.
- Преобразование, интерпретация полученных результатов расчета и анализа модели в терминах и понятиях исходной исследуемой системы для проектирования и управления.

- Результаты проведенных на модели исследований интерпретируются на исследуемой системе для определения изменения ее состояния и поведения при различных условиях.
- Анализ поведения системы. Анализ результатов используется для принятия решений при проектировании и управлении реальной сложной системой. Прогнозирование возможных вариантов поведения системы требует новых расчетов, совокупность которых обеспечивает возможность выработки управляющих воздействий. Такие воздействия должны привести режим поведения и развития системы к заданным критериям.
- Синтез заданной структуры. Формирование заданных критериев, которые должна обеспечивать система и применение сетевой модели для синтеза вариантов структуры и параметров процессов, обеспечивающих выполнение этих критериев.

Полученные управляющие воздействия должны привести, например, экономическую систему к режиму управляемого устойчивого развития, удовлетворяющего заданным критериям. Например, при котором количество энергии на человека в год будет возрастать с заданным темпом на произвольном промежутке времени, т.е. в краткосрочной, среднесрочной и долгосрочной перспективе.

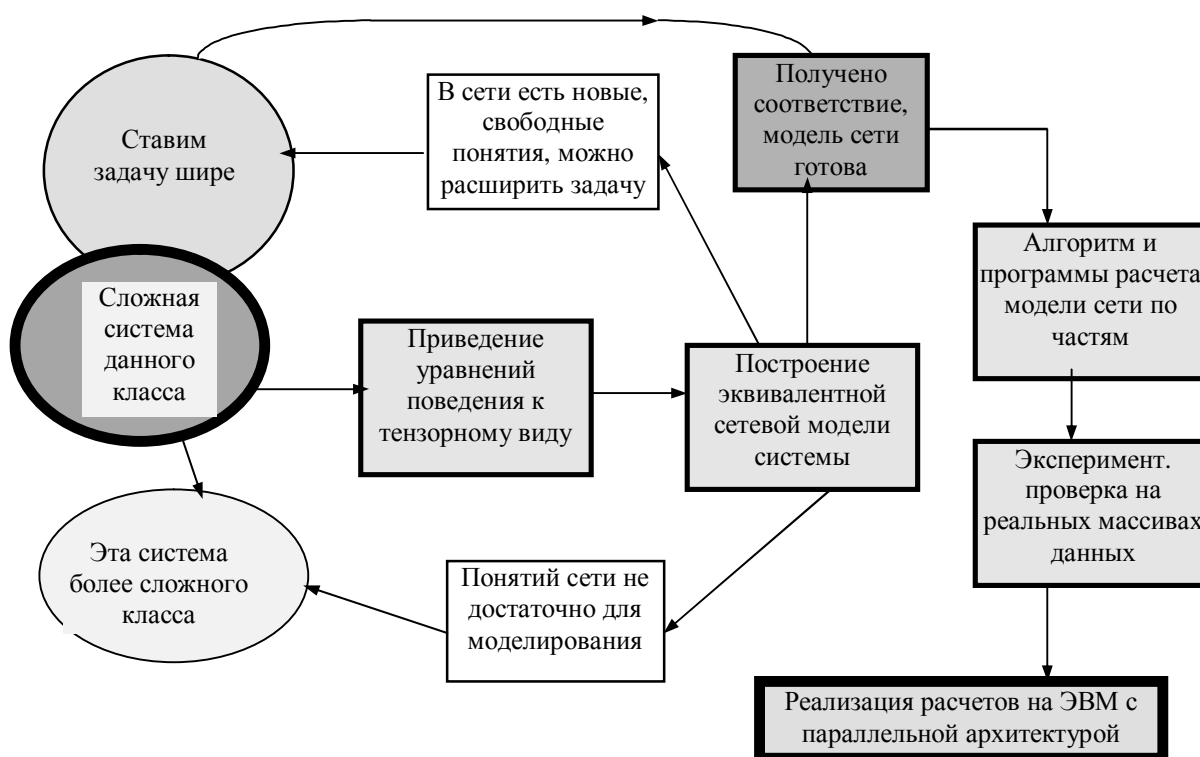


Рис. 1.7. Технология расчета сложных систем тензорным методом

Технология применения тензорного метода расчета сложных систем представлена на рис. 1.7, и может осуществляться, например, по следующему алгоритму:

- Определить класс исследуемой системы.

- Привести уравнения поведения системы к тензорному виду, используя все отношения между потоками и проверяя тензорный характер преобразования величин при изменении координат.
- Установить соответствие между величинами (продольными и поперечными) системы, ее материальными (метрическими) характеристиками и соответствующими параметрами сети для построения модели. Анализ – все ли понятия сети использованы в модели. Если да, то идем дальше.
- Если нет (как в задаче баланса, когда напряжения не имели экономической аналогии в исходной постановке задачи), то определить наличие понятий, которые не попали в постановку задачи. Пополнить исходное представление новыми понятиями и сопоставить с моделью.
- Если понятий сети недостаточно для представления системы, то модель не построена, надо выбрать для моделирования эталонную сеть другого класса.
- Для сетевой модели разработаны алгоритмы расчета, в том числе по частям. Программы используются для тестов и проверки на соответствие результатов расчета реальным данным из предметной области.
- Если полученная модель показала адекватность предметной области, то производятся расчеты на реальных массивах данных, (при этом базы данных растут в динамике по мере обновления) для получения практических результатов расчета сети с различной структурой, как целого, так и по частям.

При расчете по частям сетевая модель системы разделяется на подсети. Уравнения для подсетей получаются с помощью тензорных преобразований. Алгоритмы диакоптики позволяют исключить итерации при расчете по частям. Это снижает объемы, время и стоимость вычислений. Можно одновременно применять и другие методы распараллеливания. Применение новых алгоритмов сократит разрыв между ростом сложности задач и производительности вычислительной техники.

Диакоптика применялась при расчетах ядерных реакторов, строительных конструкций, для проектирования электроэнергетических систем США (*Happ Н.*, 1980), а также для физических задач. Элементы тензорного метода легли в основу методов графов связей и конечных элементов. В Англии метод разрывания Крона применялся для расчетов с помощью сетей транспьютеров (*Bowden К.*, 1988, 1989).

Результаты данной работы показывают, что параллельные вычисления на сетях обеспечивает инвариант изменений структуры двойственных сетей. При разделении сети на подсети параметры взаимодействия подсетей сохраняются в двойственной сети связей и поэтому восстанавливаются при соединении решений подсетей в целое. Это исключает



итерации при расчете по частям и повышает эффективность. Схема основных этапов параллельного расчета сетей (сетевых моделей сложных систем) тензорным методом представлена рис. 1.8 (более подробно – на рис. 3.25).

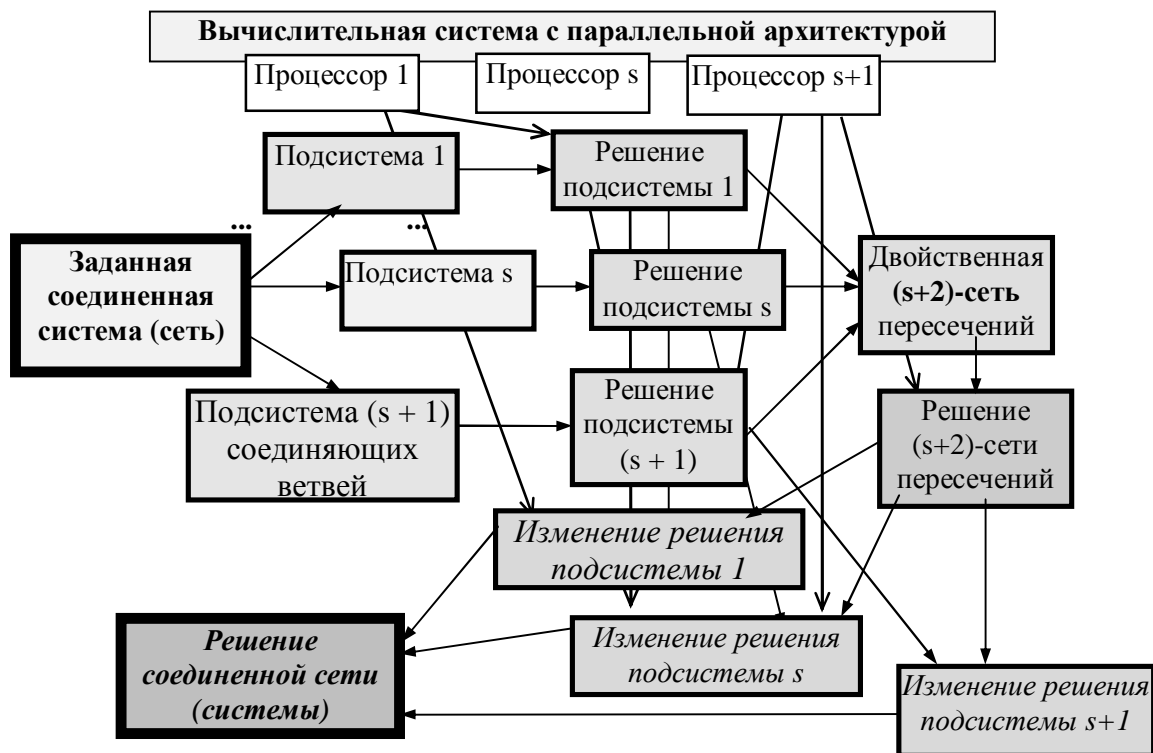


Рис. 1.8. Схема алгоритма расчета сетей по частям тензорным методом

Расчет сети по частям состоит из следующих этапов:

1. разделение сети на  $s$  произвольных подсистем; ветви, связывающие подсистемы, образуют отдельную  $(s+1)$ -сеть;
2. расчет всех подсетей  $1, \dots, s$  и  $(s+1)$  на параллельных процессорах;
3. формирование из решений подсистем воздействия на сеть  $(s+2)$ , которая двойственна к  $(s+1)$ -ой сети и ее расчет; это двойственное решение изменяет решения отдельных подсистем в те значения, которые они должны иметь в соединенной системе;
4. расчет изменения решений подсистем также производится параллельно.

При решении систем линейных уравнений объем вычислений растет пропорционально кубической степени числа переменных. При использовании указанного алгоритма объем вычислений растет линейно относительно роста числа переменных. При изменении структуры системы заново надо рассчитать только сеть связей.

Для повышения производительности параллельных вычислительных систем целесообразно совместно использовать различные методы декомпозиции. На уровне сетевой модели – разделение на подсистемы, их параллельный расчет. На уровне расчета подсистем – использование блочных методов. На уровне расчета арифметических выражений – применение векторных процессоров.

## 2. ДВОЙСТВЕННЫЕ СЕТИ

Одномерная сеть определяется набором ветвей. Ветви представляют собой одномерные отрезки и могут соединяться нульмерными границами – узлами (точками). *Количество границ ветвей – узлов может меняться* при соединении и разъединении ветвей. Ветви составляют замкнутые и разомкнутые пути. Совокупность путей составляет векторное пространство сети над полем рациональных чисел (дробей) с точностью до сохранения целостности ветви. Линейно независимые наборы путей составляют базисы. Компоненты базиса при изменении выбора путей преобразуются ковариантно. Компоненты произвольного пути (или заданного вектора) преобразуются контравариантно.

Большая часть главы посвящена рассуждениям о путях в сети, их свойствах и преобразованиях при изменении структуры. Это потому, что пути играют роль координат в структуре. Базисы замкнутых и разомкнутых путей являются измерительной основой для отражения, преобразования, анализа процессов в структуре.

Граф и его возможные преобразования определен, когда заданы два инварианта: ребра (ветви) и вершины (узлы). Сеть определена, когда заданы ветви, количество узлов может меняться при соединении и разъединении ветвей (изменении структуры). Таким образом, количество узлов является инвариантом графа, но не является инвариантом сети. Сеть не меняется при изменении графа, соответствующего данному набору ветвей. Сеть представляет собой множество графов, соответствующих заданному набору ветвей.

При изменении числа узлов в сети меняется размерность базисов замкнутых и разомкнутых путей, т.е. меняется размерность их подпространств. Матрицы преобразования структуры сети в этом случае прямоугольные, они не образуют группу. Возможность преобразования структуры при изменении числа узлов обеспечивает новый *инвариант*, который *существует* не для одной сети, а для *двух двойственных сетей*, в которых каждому замкнутому пути соответствует разомкнутый путь, и наоборот. В двойственных сетях суммарные размерности базисов замкнутых и разомкнутых путей постоянные. Инвариант представлен закономерностью, которая связывает матрицы преобразования базисов замкнутых путей и базисов разомкнутых путей в двух двойственных сетях.

$${}^m C ({}^m C_t {}^m C)^{-1} {}^m C_t + {}^j A ({}^j A_t {}^j A)^{-1} {}^j A_t = I$$

Следствием данной закономерности является постоянство величины (квадрата величины) произвольного вектора, заданного в сети, при изменении структуры двойственных сетей. Матрицы преобразования связывает также соотношение ортогональности  $C_t = (A)^{-1}$ . Сетевые модели позволяют представить одновременно как процессы, так и структуру сложных систем; инварианты двойственных сетей обеспечивают расчет изменения процессов при изменении структуры систем.

Сеть может также состоять из двумерных элементов (поверхностей), ограниченных одномерными линиями, трехмерных объемов, ограниченных поверхностями, и т.д. Многомерные сети можно представить математическими моделями симплициальных комплексов комбинаторной топологии. В данной главе рассматриваются одномерные сети.

Постоянство величины вектора при изменении структуры двойственных сетей является математическим выражением физической закономерности постоянства мощности (потока энергии) при изменении структуры электрических цепей с двойственной структурой. Данная закономерность проявляется также в сложных физических, технических, экономических системах, представленных сетевыми моделями. *Инвариант двойственных сетей является математическим выражением закона сохранения потока энергии.*

Таким образом, преобразование структуры сетей (соединения и разъединения границ, в данном случае узлов) приводит к изменению числа узлов. Изменение числа узлов при изменении структуры для расчета и анализа изменения процессов требует нового инварианта. Такой инвариант существует, но требует появления двойственных сетей. Правильнее сказать, что в реальности изменения структуры и процессов (в абстрактных сетях или в сложных системах) подчиняются одному закону. Этот закон для сетей выражается инвариантом двойственных сетей, а для реальных сложных систем – законом сохранения потока энергии в совокупности систем с заданной и двойственной структурой.

## **2.1. Основные понятия сетей**

Сеть состоит из элементов, вообще говоря, многомерных. Одномерная сеть состоит из отрезков-ветвей. Соединения и разъединения ветвей суть преобразования структуры, при этом количество узлов может меняться. Свойства ветви: ориентация, замкнута она или разомкнута, метрическая характеристика, «вес». Параметры сети: ветви с их свойствами, узлы, подсети, замкнутые и разомкнутые пути, матрицы преобразования базисов путей при изменении выбора путей и/или при изменении соединения ветвей.

Поведение двойственных сетей определяют инварианты, которые связывают параметры сети, базисы путей, их ориентацию и матрицы преобразования. Такие инварианты, в соответствии с понятиями теории инвариантов, по-видимому, образуют базисную систему инвариантов группы преобразований соединения и разъединения. Особенность состоит в том, что матрицы преобразования путей (описывающие изменение структуры сетей) не образуют группу в принятом понимании.

### **2.1.1. Элементы сети**

Определим *сеть как совокупность протяженных элементов, обладающих границами и ориентацией (направлением)*. Элементами не могут быть точки (в терминах комбинаторной топологии – 0-симплексы), поскольку они не имеют границ. Элементами сети могут быть

отрезки линий (1-симплексы), границами которых являются точки (узлы). Такие элементы будем называть *ветвями*. Элементами также могут быть части плоскостей (или поверхностей – 2-симплексы), границами которых являются линии и точки; элементами могут быть трехмерные объемы (3-симплексы), их границы – плоскости, линии и точки.

Размерность сети определяется размерностью составляющих ее элементов, а сама сеть представляет собой соответствующий комплекс<sup>1</sup>. Элементы назовем *свободными*, если их границы отделены друг от друга, в противном случае назовем элементы *связанными*. Элементы можно соединять путем совмещения, слияния их границ. Элементы можно разъединять путем разделения соединенных границ.

Под *структурой* будем понимать схему связей элементов, независимо от того, отделены границы элементов друг от друга или совпадают. Слияние и разделение границ приводит к изменению соответствующих топологических характеристик и вызывает изменение свойств сети. Изменение связей элементов, т.е. соединение, разъединение границ назовем *преобразованием структуры*. В зависимости от размерности элементов сети меняется разнообразие возможных границ, меняются возможности соединения и разъединения элементов, т.е. возможности преобразований структуры. Изучение свойств таких преобразований является основной задачей данной работы.

Для изучения особенностей преобразования структуры в наиболее простом виде в данной работе рассматриваются *одномерные сети, т.е. совокупность линий – ветвей* (1-симплексов), обладающих границами (узлами, 0-симплексами) и ориентацией, направлением. Такую 1-сеть будем называть просто сетью. Ветви можно соединять путем совмещения, слияния узлов. Ветви можно разъединять путем разделения соединенных узлов. В отличие от графов, число узлов в сети может изменяться.

**Ориентация ветви** определяется заданным порядком прохождения от одной границы до другой границы. Ориентация ветви, одна из двух возможных, задается произвольно и далее не меняется на протяжении анализа. Каждая ветвь определяет одно измерение в абстрактном пространстве сети. Размерность такого пространства равна количеству ветвей, составляющих данную сеть.

**Путь** – это одна или несколько ветвей сети. Путь задан узлом начала, узлом окончания и совокупностью ветвей, через которые он проходит. Пути играют роль координат в пространстве сети. Если начальный и конечный узлы пути совпадают, то путь назовем *замкнутый*, в противном случае – *разомкнутый*. Ориентацию, направление пути определяет порядок прохождения по элементу (или элементам) от одной границы к другой. Ориентация

---

<sup>1</sup> Понятие сети, по сути, является многомерным, выходит за рамки одномерных графов и обобщается до полиэдральных комплексов комбинаторной топологии.

пути может совпадать с ориентацией составляющих его ветвей или быть противоположной; это определяют знаки плюс или минус, с которыми каждая ветвь входит в состав пути.

**Метрическая характеристика.** Ветвь может иметь *вес*, который представляет собой метрическую характеристику «масштаба» данной ветви, по аналогии с массой, электрическим сопротивлением, теплоемкостью в физике или коэффициентом прямых затрат в экономике и т.д. Вес ветви задается изначально, при задании сети как совокупности ветвей, и является постоянной характеристикой каждой ветви данной сети. Вообще говоря, вес может быть задан целым числом, рациональным или действительным числом, комплексным числом, функцией.

Если веса всех ветвей равны единицам, то можно говорить, что метрика единичная, метрические свойства отсутствуют. Строго говоря, такое утверждение не означает отсутствия метрики как таковой – материальные свойства элементов, их физическая размерность (массы, сопротивления, и т.д.) сохраняются при любых числовых значениях. Однако эти величины играют роль коэффициентов пропорциональности между воздействиями и откликами. Метрика, материя ветви, преобразует воздействие в отклик. Она связывает ковариантную и контравариантную величину; а их произведение инвариантно. Если метрика единичная, то значения воздействия и отклика равны, как бы метрика себя не проявила, она как будто отсутствует. В декартовых, т.е. прямолинейных и прямоугольных координатах, ковариантные и контравариантные компоненты совпадают, метрические коэффициенты равны единицам, метрическая матрица единичная. Это выглядит как отсутствие метрики, но следовало бы говорить о единичной (декартовой) метрике.

В данной работе веса всех ветвей рассматриваются как целые числа, равные единице или неравные единице, либо как действительные числа.

**Четыре точки ветви.** В данной работе предполагается, что вес (если он задан не равным единице, т.е. оказывает числовое воздействие на преобразование потока) сосредоточен в одной точке линии ветви. Таким образом, речь идет о ветвях с сосредоточенными параметрами. Это означает, что все остальные точки (внутренние точки), составляющие линию ветви, веса не имеют, т.е. формально они не влияют на процессы, происходящие в самой ветви.

Следовательно, ветвь представляет собой некую «бестелесную» линию, в которой есть *четыре* значимых *точки*. Это, прежде всего, границы, т.е. *две точки* начала и окончания ветви. Ветвь может соединяться своими границами с другими ветвями. Через границы на ветвь может оказываться воздействие, источник которого располагается вне ветви. Внешнее воздействие определяет разомкнутый путь. Предполагается, что через другие точки на ветвь

не может быть оказано внешнее воздействие. Ветвь рассматривается как некий «канал», изолированный от внешнего мира всеми точками, кроме границ.

Важной значимой точкой (**третья точка**) является место, где сосредоточен «вес» ветви, ее параметр. В этой точке происходит взаимодействие ковариантных и контрвариантных компонент как векторов прямого и взаимного базиса путей, так и вектора, который наложен на ветвь (можно сказать, что на сеть в целом, но воздействие на систему обычно происходит через конкретные элементы). Т.е. ветви имеют сосредоточенные параметры. Вес ветви представляет ее материальное содержание, в том смысле, который является существенным для рассматриваемой системы (массу, сопротивление, вязкость). Вес ветви связывают с определением метрического содержания, метрики одной ветви. Совокупность метрик всех ветвей определяет метрику всего пространства сети. Сюда входят как собственные веса ветвей, так и взаимные, определяющие масштабы их воздействия друг на друга.

Предположение о сосредоточении веса в одной точке является не более чем удобной абстракцией. Реально вес распределен более или менее равномерно по всей протяженности ветви. То есть, весом обладает каждая точка ветви. Можно лишь предполагать, что в одной точке веса столько, что веса прочих пренебрежимо малы. Если вес распределен по всей ветви, то для расчетов потребуется интегрирование по длине ветви, по замкнутым и разомкнутым путям в сети. Это не только затруднит анализ, но и помешает выделению основного предмета данной работы – изучения свойств изменения процессов при изменении структуры сетей и сетевых моделей сложных систем.

**Четвертая** значимая *точка* – это источник воздействия, когда он расположен в самой ветви. Внутреннее воздействие определяет замкнутый путь. Внешние воздействия действуют в разомкнутых путях, через границы ветвей. Внутренние воздействия действуют в замкнутых путях, не выходя за пределы связанных ветвей. Различие между ними есть один из наиболее важных видов двойственности, которые определяют свойства сетей.

**Процессы в сети.** В сети могут протекать процессы, представленные как векторы (или другие объекты), которые воздействуют на сеть, т.е. наложены на нее извне. Источники воздействия, как отмечено выше, могут располагаться как вне ветвей сети, так и внутри ветвей сети. Эти понятия обеспечивают аналогии с параметрами процессов и структуры реальных сложных систем.

Сеть может применяться для моделирования сложных технических, экономических систем. Для этого используются аналогии между математическими понятиями сети (к ним относятся элементы, структура, векторы) и физическими процессами, протекающими в соединенных элементах реальных систем. Сложные системы состоят из многих элементов, связанных между собой и эти связи могут изменяться. В элементах происходят *физические*

процессы в виде потоков (например, потоков энергии), которые распространяются, преобразуются в структуре системы.

Потоки предстают перед наблюдателем как измеримые величины откликов на приложение других измеряемых величин – воздействий. В главе 1 рассмотрена двойственность двух типов величин-характеристик движения потока, а именно: измеряемых в одной точке (называемых продольными) и величин, измеряемых как разность значений в двух точках (поперечных) соответствует двойственности замкнутых и разомкнутых путей. Произведение продольных и поперечных величин для каждого вида сложной системы (предметной области) по физической размерности равно мощности (что соответствует энергии в единицу времени и является характеристикой потока).

*Задача состоит в определении изменения значений параметров потоков (процессов) при изменении структуры. Например, при соединении сложной системы из отдельных элементов, при разделении системы на элементы или подсистемы, состоящие из ряда элементов или отделении (выходе из строя) отдельных подсистем и т.д. При этом, для повышения эффективности, целесообразно использовать результаты расчета одной из структур системы, которые можно преобразовать в результаты решения задачи расчета для других заданных структур связей, не делая весь расчет заново.*

При изменении структуры потоки в элементах системы меняются. Изменяются значения продольных и поперечных величин, их произведения в отдельных элементах и в сумме по всей сети. Таким образом, для одной сети нет инварианта, т.е. постоянной величины, связывающей преобразования процессов при переходе от одной структуры к другой структуре. Такой инвариант существует для двух двойственных сетей. В этом случае *в совокупности двойственных сетей суммарный поток энергии, характеризуемый мощностью, остается постоянным при любых изменениях их структуры.* Физически это проявляется, например, в постоянстве рассеиваемой мощности при изменении соединения ветвей двух электрических цепей, у которых структуры взаимно двойственны.

**Пространство сети.** С математической точки зрения, сеть представляет собой пространство, измерения которого заданы элементами-ветвями. В таком пространстве каждая ветвь определяет отдельное измерение, выбор независимых путей (наборов ветвей) определяет выбор координат, а поток энергии можно представить как вектор, наложенный на сеть. Такие векторы проявляют себя в сети, принимая значения на ветвях (или путях) сети как проекции в координатах.

Вектор (потока энергии) распределяется, «расщепляется» между двойственными сетями, проявляясь в замкнутых или разомкнутых путях, в зависимости от того, где расположен источник. Внешнее воздействие поступает в сеть через узлы (границы) ветвей и

проявляет себя проекциями-компонентами в разомкнутых путях. Внутреннее воздействие поступает в сеть из источников в самих ветвях и проявляет себя проекциями-компонентами в замкнутых путях. Замкнутые пути двух двойственных сетей образуют полное пространство с размерностью, равной количеству ветвей в сети. Разомкнутые пути двух двойственных сетей также образуют полное пространство с размерностью, равной количеству ветвей в сети.

Постоянству потока энергии соответствует постоянство длины (квадрата величины) вектора при изменении структуры двух двойственных сетей. Постоянство величины вектора при изменении структуры является инвариантом, который выражает найденное автором соотношение между матрицами преобразования путей двойственных сетей. Данная математическая закономерность существует независимо от физических приложений.

### **2.1.2. Двойственность ветвей в сети**

**Ветвь.** Ветви (в терминологии графов – ребра) представляют собой ориентированные отрезки линий, имеющие на концах узлы или точки, которыми они могут соединяться друг с другом, образуя сети различной конфигурации. В данном разделе сети рассматриваются только с математической точки зрения. Когда сети применяются для моделирования сложных технических, экономических систем, то ветви рассматриваются как каналы распространения потоков энергии или другой величины, характеризующей данную систему. При этом ветви не только направляют пути распространения потоков, но и оказывают сопротивление распространению потока, пропорционально заданному «весу», т.е. задают масштаб, метрику протекающих процессов.

Ветвь рассматривается как пространство одного измерения, например линия. В аффинной геометрии прямая линия всегда разомкнута – она приходит из отрицательной бесконечности и уходит на плюс бесконечность. Если линия обладает постоянной кривизной, радиус которой находится по одну сторону от линии, то она будет замкнута, образует контур. Каждой разомкнутой кривой линии соответствует бесконечное множество замкнутых концентрических кривых, которые не пересекаются друг с другом, их можно считать «параллельными». Эти линии не зависимы друг от друга, что позволяет рассматривать их как независимые измерения в пространстве. Таким образом, набор линий разной кривизны можно рассматривать как систему координат  $n$ -мерного пространства, вложенного в данное плоское пространство. Каждая линия может иметь ориентацию, одну из двух возможных, которые определяют порядок перехода от одной точки линии к другой.

В проективной геометрии все линии замкнуты благодаря введению понятия «несобственных элементов», например, «несобственной» точки. После добавления к обычной, разомкнутой прямой линии бесконечно удаленной, «несобственной» точки, эта дополненная прямая становится замкнутой. Проективная прямая линия «уходит» на



бесконечность, допустим, в положительном направлении. Там эта линия замыкается «несобственной» точкой, и как бы «возвращается» к началу отсчета из отрицательной бесконечности. Аналогичная процедура применяется к проективной плоскости, и т.д. Зрительные модели, которыми пытаются представить проективную плоскость, достаточно трудны для восприятия (см., например, *Мацуо Комацу*, «Многообразие геометрии», 1984).

В математике принцип двойственности появился в проективной геометрии. Суть его в том, что взаимозаменяемы некоторые пары понятий, среди которых: *точка и плоскость*, *точка и прямая*, *пересекает и проходит*, *угол и сторона* и т.д. Например, положению: *две точки определяют прямую*, соответствует двойственное положение: *две прямые определяют точку*. Или: *три точки определяют плоскость* – *три плоскости определяют точку* (*пересекаются в ней*). В проективной геометрии все прямые пересекаются, параллельные прямые пересекаются в «несобственной» точке на бесконечности. В аффинной геометрии параллельные не пересекаются, т.е. принцип двойственности не имеет места.

**Соединение и разъединение** – в этом и состоит преобразование структуры сетей (и сложных систем). Размыкание и замыкание ветвей и путей в сети можно представить как переход в бесконечность или в другое измерение. Это позволяет установить некоторые аналогии между пространством сети и проективной геометрией.

С точки зрения проективной геометрии, одномерная ветвь, как элемент сети, всегда замкнута и образует контур. Если она разомкнута, то ее можно рассматривать как замкнутую на бесконечности. Ветвь замкнута, когда все ее точки собственные. Если одна произвольная точка контура удаляется из контура на бесконечность (становится несобственной точкой), то это можно рассматривать как размыкание. Превращение собственной точки в несобственную размыкает контур, делает ветвь разомкнутой. Тогда ветвь образует разомкнутый путь, причем он разомкнут на бесконечности. Возвращение несобственной точки из бесконечности (или другого измерения) замыкает разомкнутую ветвь.

Таким образом, преобразования соединения и разъединения кажутся связанными с бесконечностью. Однако есть и другая возможность представить преобразования структуры. Контур можно разместить на плоскости. Для размыкания нужно удалить хотя бы одну точку из контура (тогда возникнут границы – узлы), а для замыкания нужно вернуть удаленную точку, т.е. совместить границы – узлы. Не обязательно для этого использовать бесконечность.

Можно данную удаляемую точку просто изъять из плоскости, приподнять ее над плоскостью, выйдя в другое измерение. Как только хотя бы одна точка удалена из непрерывного контура, он становится разомкнутым, но теперь это означает, что часть контура перешла в другое измерение. При этом не исключено, что в другом измерении

удаленная часть контура данной плоскости замкнет там другой контур, который до этого был разомкнутым. При таком рассмотрении преобразования структуры оказываются связанными с увеличением числа измерений рассматриваемого пространства и переходами от одного измерения к другому измерению.

Преобразования соединения и разъединения ветвей представлены на рис. 2.1.

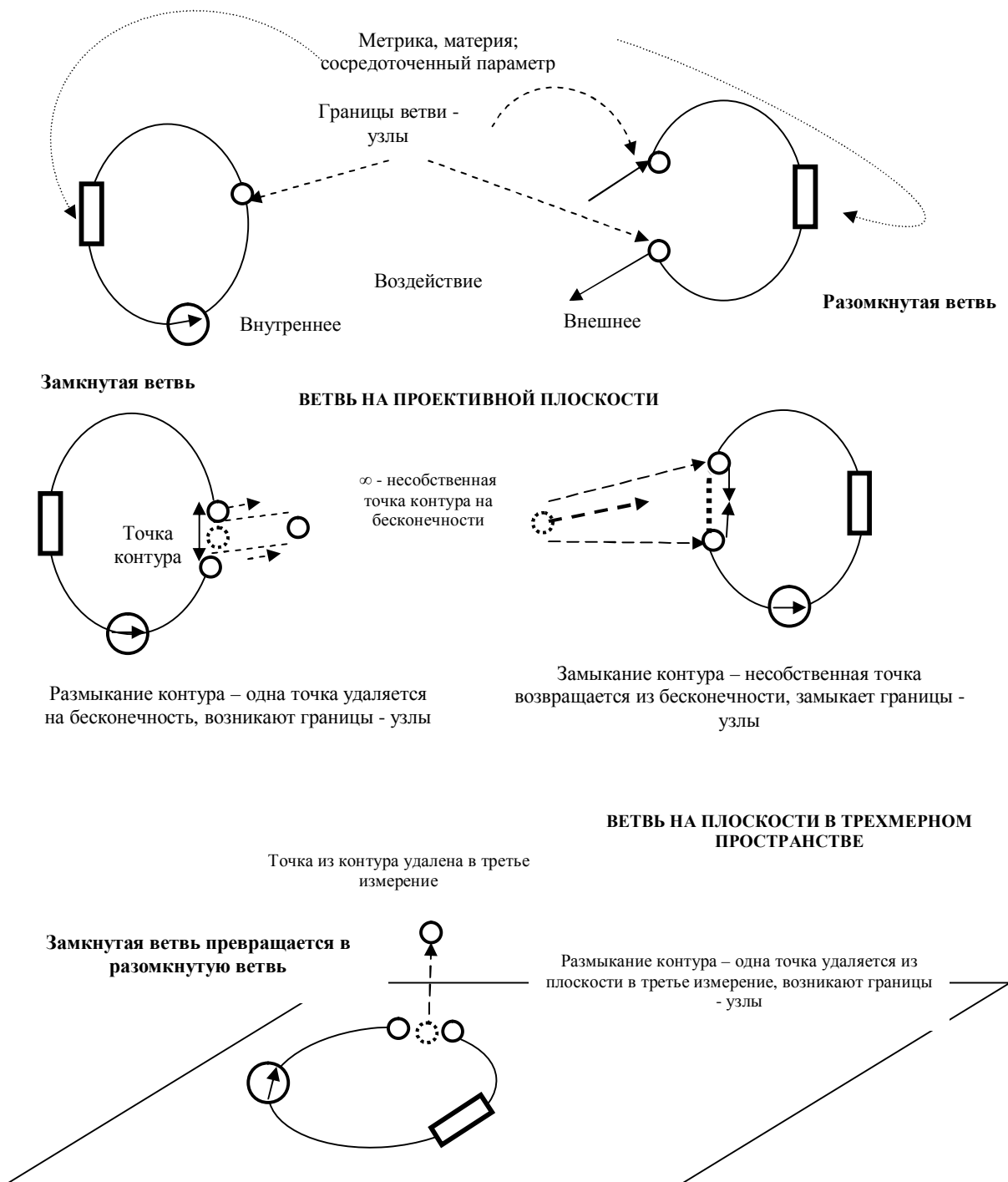


Рис. 2.1. Размыкание и замыкание ветвей

**Ориентация ветвей.** Ветвь, как и любая геометрическая линия, может обладать *ориентацией*, определяемой порядком прохождения составляющих ее точек. Ориентация

каждой ветви выбирается исходно и в данной сети уже не меняется. Выбор и изменение ориентации путей в ветвях является одним из способов преобразования координат в пространстве сети. Ориентации путей и ориентации ветвей в двойственных сетях взаимно дополняют друг друга. Это один из важных инвариантов двойственных сетей.

Следует отметить, что имеется двойственность ориентации замкнутой и разомкнутой частей ветви в смысле дополнения. То есть, *если в замкнутой части ветвь имеет одну ориентацию, то в разомкнутой она должна иметь противоположную ориентацию*. Сложность возникает с определением того, как задать ориентацию. В разомкнутой ветви логично назначить порядок границ, указав, что считать началом, а что – окончанием ветви. Тогда ориентация меняется с направления «от начала к концу» на направление «от конца к началу».

Для замкнутой ветви нет начала и конца, как в песне «а у кольца начала нет и нет конца». Задать порядок двух точек можно на метрическом параметре, который сосредоточен в одной точке, или распределен на заданном участке ветви. Именно так поступал Крон, который задавал числами 1 и 2 начало и конец участка сопротивления ветви (пренебрегая сопротивлением оставшейся части ветви), и считал направление от 1 к 2 положительным (Крон, 1978). При этом задание ориентации для замкнутого пути и для разомкнутого пути одинаково. Сложнее использовать метрический параметр для задания ориентации, если он распределен по всей длине (протяженности) ветви. Тогда в замкнутой ветви нельзя указать точки его начала и окончания. По этой причине рассмотрение ветвей с сосредоточенными параметрами облегчает введение и задание ориентации ветвей.

Другой выделенный элемент, имеющий ориентацию в замкнутом контуре – источник воздействия внутри ветви (четвертая точка). Источник имеет ориентацию, которая определяет направление создаваемого потока отклика. Однако при этом пришлось бы предположить, что источник есть в каждой ветви, что, вообще говоря, необязательно.

Можно задать ориентацию в замкнутом контуре как направление обхода по часовой стрелке или против часовой стрелки, считая одно из них положительным, а другое – отрицательным. Однако тогда надо потребовать, и быть уверенным, что в процессе соединений и разъединений плоскость, в которой расположена ветвь, не будет перевернута, т.е. сохранит прежнюю ориентацию. При этом если контур ветви разомкнуть, например, справа, а затем полученные узлы соединить слева (а такое возможно при соединениях и разъединениях ветвей в сети), то ориентация изменится на противоположную, хотя плоскость не будет перевернута.

Таким образом, задание ориентации в контуре, да и в разомкнутом пути, наиболее реально сделать на материальном элементе, который определяет метрический параметр,

путем указания его начала и конца. То есть так, как это делал Крон в электрической цепи. Однако это предполагает, что в двойственной части ветви материальный элемент должен иметь противоположную ориентацию, т.е. его надо проходить в другом направлении, чем в заданной части, чтобы эти ориентации дополняли друг друга. В этом случае полная ветвь, как целое, состоящее из двух двойственных составляющих – замкнутой и разомкнутой, не будет иметь ориентации.

Физическим величинам, помимо размерности (в смысле LT–таблицы), также можно приписать ориентации, по их роли в отношении потока энергии. Например, электрическое сопротивление и электрическая проводимость с точки зрения физики характеризуют одно и то же поведение материи по отношению к потоку электрической энергии, но по-разному, и обладают противоположной физической размерностью. Электрическое сопротивление является метрической характеристикой для источника напряжения, расположенного внутри ветви, поток электрической энергии от этого источника распространяется по замкнутому контуру. Это сопротивление связывает ковариантную компоненту потока энергии (напряжение) и контравариантную компоненту (ток).

Электрическая проводимость является метрической характеристикой для источника тока, расположенного вне ветви, поток электрической энергии от этого источника распространяется по разомкнутому пути (входит в один узел, выходит из другого). Эта проводимость связывает контравариантную компоненту потока энергии (ток) и ковариантную компоненту (напряжение). Сопротивление характеризует поток электрической энергии внутри ветви, а проводимость характеризует поток электрической энергии через ветвь, от внешней среды. В этом смысле их ориентация различна, что характеризуется противоположной физической размерностью. Расширение анализа размерностей путем присвоения физическим величинам символов ориентации рассматривал Дональд Б. Сиано (*Сиано*, 1985).

Замкнутая и разомкнутая формы ветви дополняют друг друга и взаимно превращаются друг в друга при изменении структуры сетей. Наименьший элемент, обладающий всеми свойствами сети, должен содержать и замкнутую и разомкнутую линии *одновременно*. Обе линии такой ветви могут быть расположены в одном пространстве, но потоки через них независимы. Замкнутые и разомкнутые линии могут быть расположены в разных пространствах, взаимодействуя в составе одной ветви, а потоки в них зависят друг от друга.

Основным элементом сети является ветвь, соединяющая в себе одновременно как замкнутую, так и разомкнутую линии. Эти линии расположены во взаимно ортогональных и дополняющих друг друга подпространствах. Такие подпространства составляют пространство удвоенной размерности (двойного количества ветвей в сети).

Особенность ветви состоит в том, что при соединении узлов в разомкнутой линии (и превращении ее в замкнутую), происходит *одновременное* разъединение узла в замкнутой линии и превращение ее в разомкнутую линию. И наоборот.

Аналогично, если в сети из многих ветвей происходит соединение двух узлов в одной линии сети, что порождает новый контур (независимый от других контуров), то при этом уничтожается независимый разомкнутый путь. Одновременно в двойственной части (линии) сети замыкается узел, связывающий соответствующие ветви; при этом уничтожается контур и порождается разомкнутый путь. И наоборот.

**Сеть** – это набор ветвей, свободных или связанных, т.е. соединенных друг с другом своими границами-узлами. При изменении структуры сети, т.е. соединении и разъединении ветвей, число узлов меняется, однако сама сеть остается прежней, пока не меняются составляющие ее ветви. Это позволяет использовать сеть для моделирования изменений процессов при изменении структуры сложных систем.

Простейшая сеть состоит из одной ветви. Ветвь обладает полнотой всех свойств сети, является как бы «молекулой» сети, в том случае, если она обладает всеми свойствами и параметрами (в минимальном количестве), которые можно задать в сети. Например, замкнутыми и разомкнутыми путями одновременно. Ветвь не может быть одной линией, которая замкнута и разомкнута одновременно. Ветвь состоит из двух линий (частей), одна замкнутая, другая разомкнутая. Предполагается, что две части ветви расположены в разных подпространствах, которые ортогональны друг другу, т.е. не пересекаются, но вместе с тем взаимно дополняют друг друга. Объединение двух ортогональных подпространств составляет полное пространство сети.

На рис. 2.2 представлена ветвь, которая состоит из двух частей – замкнутой и разомкнутой. Эти две части ветви расположены в двойственных подпространствах, т.е. ортогональных и дополняющих друг друга до полного пространства сети.

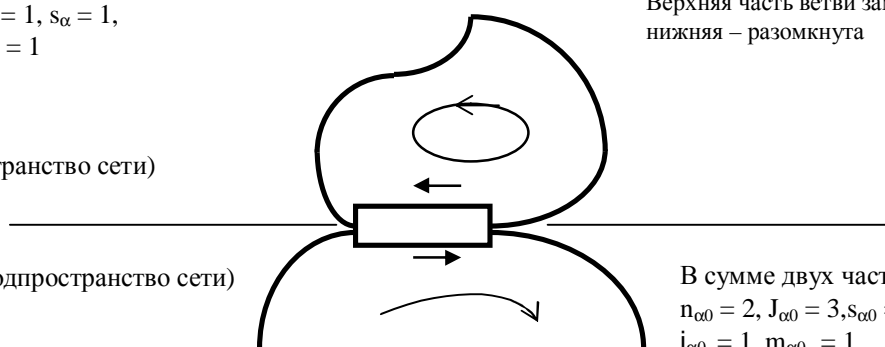
$$n_{\alpha} = 1, J_{\alpha} = 1, s_{\alpha} = 1, \\ j_{\alpha} = 0, m_{\alpha} = 1$$

$\alpha$ -сеть  
(подпространство сети)

$\underline{\alpha}$ -сеть (подпространство сети)

$$\underline{n}_{\alpha} = 1, \underline{J}_{\alpha} = 2, \\ \underline{s}_{\alpha} = 1, \underline{j}_{\alpha} = 1, \underline{m}_{\alpha} = 0$$

Верхняя часть ветви замкнута (контур),  
нижняя – разомкнута



В сумме двух частей ветви:  
 $n_{\alpha 0} = 2, J_{\alpha 0} = 3, s_{\alpha 0} = 2, \\ j_{\alpha 0} = 1, m_{\alpha 0} = 1$

Рис. 2.2. Двойственная структура отдельной ветви

Все *величины, индексы*, относящиеся к *двойственной сети*, будем обозначать теми же буквами, что и величины, индексы, относящиеся к заданной сети, но с *подчеркиванием*. Например, заданную сеть будем обозначать как  $\alpha$  - сеть, а двойственную сеть – как  $\underline{\alpha}$  - сеть.

Ветвь, состоящая из двух двойственных частей, может представлять в простейшем виде преобразования структуры. Например, размыкание замкнутой линии в одной части приводит к замыканию разомкнутой линии в другой части ветви. И наоборот. Однако ветвь не может в полном объеме представить структуру связей с другими ветвями, а, следовательно, и все те преобразования, которые происходят в сети при изменении структуры. В отношении преобразования структуры минимальной ячейкой сети, «молекулой», обладающей всеми свойствами сети, следует считать сеть, которая состоит из двух ветвей.

Основными топологическими параметрами структуры сети (даже состоящей из одной ветви), являются: ветви, узлы, подсети, замкнутые и разомкнутые пути. Пути будем называть наборы ветвей сети, в том числе прерывистые пути из ветвей в разных частях сети, не связанных узлами непосредственно; или пути с разветвлениями.

Одни пути, как наборы ветвей, можно выражать через другие пути. Если путь нельзя выразить через другие пути в виде линейной комбинации, то такие пути линейно независимы. Будет показано, что линейно независимое множество путей образует базис в пространстве путей в сети, причем таких базисов два – базис замкнутых путей и базис разомкнутых путей. Каждый из этих базисов определяет свое подпространство в пространстве сети, и эти подпространства ортогональны по отношению друг к другу. Проблема преобразования путей как координат состоит в том, что при изменении числа узлов меняется количество векторов базиса, т.е. размерность соответствующего подпространства. Матрицы таких преобразований прямоугольны, следовательно, такие преобразования не имеют обратных, не образуют группу и не обеспечивают расчет результатов произвольных изменений структуры сети. Только в двойственных сетях сохраняется *суммарная* размерность подпространств замкнутых путей и разомкнутых путей при изменении структуры сети. Это обеспечивает расчет при изменении структуры сети.

Терминология и обозначения, введенные для сетей, отличаются от теории графов. Сравнение наиболее важных терминов и обозначений для сетей (Крон, 1939, 1978, Петров, 1985) и графов (Свами, 1984) представлено в таблице 2.1.

**Таблица 2.1. Термины топологии, теорий графов и сетей**

Топология	Сети		Графы	
	Термин	Обозначение	Термин	Обозначение
1-комплекс	сеть	$N(b_i)$	граф	$G(V, E)$
1-симплекс	ветвь	$b_i$	ребро (дуга)	$E(e_i)$
	число ветвей в сети	$n$	число ребер	$m$

0-симплекс	узел (junction)	$J$	вершина	$V(v_j)$
	число узлов в сети	$J$	число вершин	$n$
	произвольный путь – набор ветвей, (не обязательно следуют друг за другом)	$p$	нет аналога	
	непрерывный путь	$p$	маршрут	
	путь или простой непрерывный путь	$p$	цепь	
	замкнутый путь, контур (mesh)	$m$ -путь	цикл, замкнутая цепь	
	разомкнутый путь, пара узлов (pair of junctions)	$j$ -путь	разомкнутая цепь	
	число линейно независимых $m$ -путей в сети	$m$	цикломатическое число	$m(G)$
	число линейно независимых $j$ -путей в сети	$j$	ранг графа	$r(G)$
	подсети, их число в сети	$s$	компоненты	$k$

В соответствии с табл. 2.1, обозначим количество ветвей в сети через  $n$ , узлов –  $J$ , подсетей –  $s$ , независимых замкнутых путей –  $m$ , независимых разомкнутых путей –  $j$ .

Для каждой схемы, конфигурации соединения ветвей эти пять параметров имеют значения, определяемые известными топологическими соотношениями:

$$j = J - s, \quad (2.1)$$

$$n = m + j. \quad (2.2)$$

В теории графов эти соотношения для ранга и цикломатического числа графа вводятся по определению (Свами, 1984, с. 39). Автор получил эти соотношения из преобразования структуры сетей (Петров, 1985, с. 66). Рассуждения, которые приводят к данным соотношениям, представлены ниже.

### 2.1.3. Изменения путей при изменении соединений ветвей

Свободная разомкнутая ветвь имеет два узла на концах, а свободная замкнутая ветвь – один узел (возникающий при слиянии двух концов разомкнутой ветви в контур). Свободные  $n$  разомкнутых ветвей имеют узлов  $J_0 = 2n$ , а подсетей  $s_0 = n$ . В соответствии с (2.1), эти ветви имеют  $j = n$  независимых разомкнутых путей. Эти пути проще всего выбрать по одному в каждой свободной ветви. Но можно задать эти пути проходящими через несколько свободных ветвей. Если ветви не связаны ни одним из узлов, то в этом случае пути получатся разорванными. При этом комбинации ветвей надо подбирать так, чтобы пути базиса оказались независимыми друг от друга.

Ветви могут соединяться своими узлами на концах. Будем для простоты полагать, что через каждую ветвь проходит один, связанный только с этой ветвью, разомкнутый путь, независимый от других. Следовательно, для свободных разомкнутых (открытых) ветвей таких путей  $j = n$ , а число узлов равно числу ветвей плюс число подсетей:  $J_0 = n + s_0 = 2n$ .

Рассмотрим процедуру последовательного соединения ветвей друг с другом. При соединении двух ветвей два узла из четырех сливаются в один. На один узел становится меньше, но меньше и на одну подсеть. Присоединяя ветви одним узлом к узлам сети, получим, что каждый раз в сети на один узел станет меньше и на одну подсеть меньше. Когда все ветви подключены одним из своих узлов в такую конфигурацию, то общее число узлов составит  $J = n + 1$ . Это показано при переходе от сети из четырех свободных ветвей на рис. 2.3.а, к связанной сети, представляющей собой граф типа «дерево» на рис. 2.3.б. Если сеть состоит из  $s$  отдельных связанных подсетей, то, проводя такие рассуждения, получим, что в каждой подсети есть один «лишний» узел сверх числа ветвей, тогда общее количество узлов  $J_s$  в полной сети равно:  $J_s = n + s$ , а число ветвей:

$$n = J_s - s \quad (2.3)$$

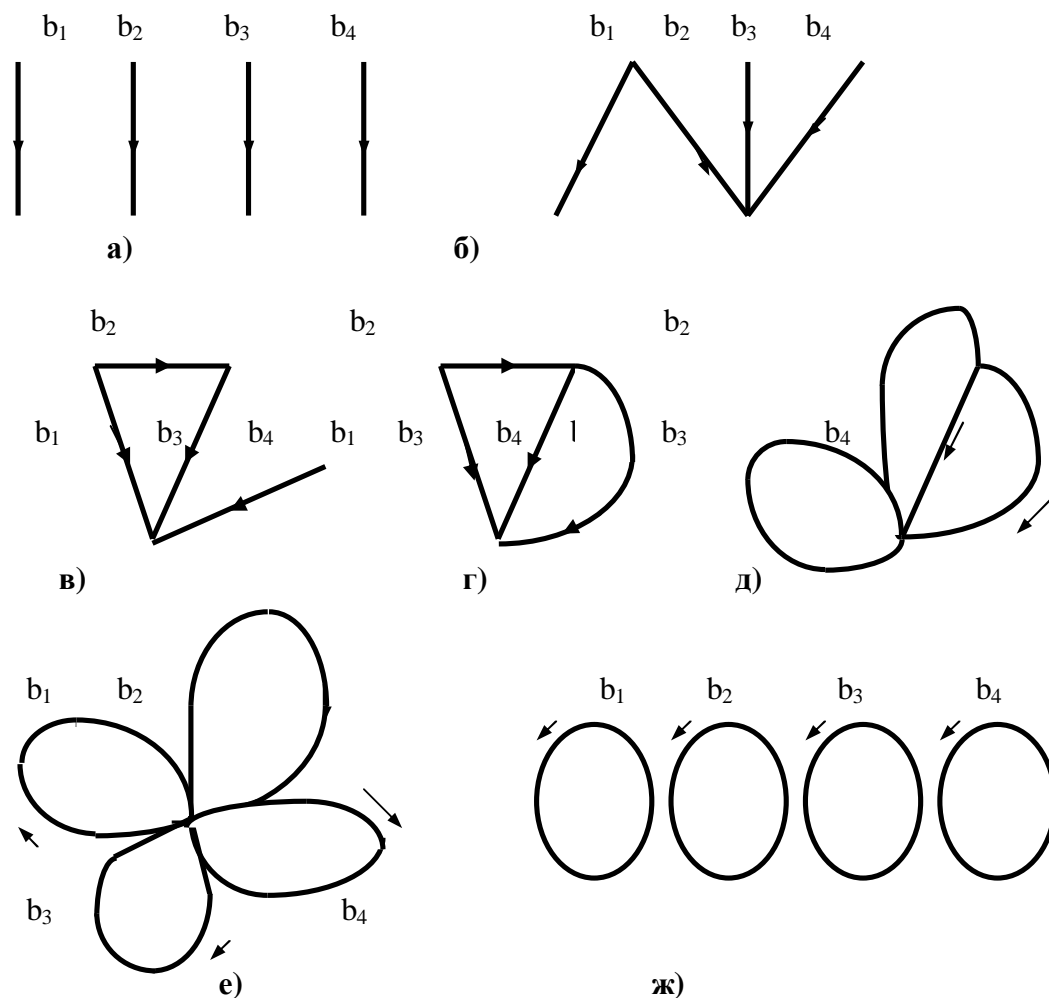


Рис. 2.3. Преобразование структуры при соединении ветвей

*а – свободные ветви, образующие разомкнутые пути; б – ветви связаны в сеть, граф которой – «дерево», контуров нет; в, г, д – замыкание, соединение любых двух узлов дает каждый раз один новый независимый контур, один независимый разомкнутый путь при этом исчезает; е – остался один узел, связывающий все ныне замкнутые ветви и пути, разомкнутых путей нет; ж – свободные ветви, образующие контуры*



Каждый разомкнутый путь входит в один узел и выходит из другого узла. Выбрав любой путь, охватим два узла. Проведем каждый новый путь так, чтобы он проходил через один новый узел. Добавляя по одному узлу в каждый новый путь, охватим все узлы за  $n$  шагов. Новые пути будут проходить через охваченные узлы. Следовательно, их можно выразить через уже построенные пути, т.е. новые пути линейно зависимы. Таким образом, число линейно независимых разомкнутых путей для каждой подсети равно:  $j = J - 1$ . Совокупность таких путей можно рассматривать как базис пространства разомкнутых путей данной сети. Суммируя разомкнутые узлы по  $s$  подсетям, получим их общее число  $j_s$ , которое равно разности количества узлов и подсетей:  $j_s = J_s - s$ , т.е. (2.1). Сравнивая с (2.3), можно видеть, что число разомкнутых путей для данной сети равно числу ветвей, т.е. разомкнутые пути охватывают все измерения пространства сети.

Подключение ветвей (или подсетей) к сети одним узлом не меняет типов путей, поскольку при слиянии двух узлов в один исчезает также одна подсеть.

Согласно построению (и свойствам графа – дерева), из любого узла можно перейти в любой другой. Соединим один узел с любым другим. На один узел в сети станет меньше, а значит и на проходивший через него разомкнутый путь. Однако появится замкнутый путь, контур (рис. 2.3.в). Поскольку соединены произвольные узлы, то они не обязательно были связаны одним из выбранных ранее линейно независимых разомкнутых путей. Это значит, что новый контур, замкнутый путь, по набору ветвей может не совпадать с ранее выбранными разомкнутыми путями. В частности, если до этого каждый разомкнутый путь проходил по одной ветви, то теперь он должен проходить по нескольким ветвям, составляющим контур. Последнее обстоятельство играет важную роль при расчете сети при изменении структуры связей, особенно при расчете сети по частям.

Замкнутый путь можно представить комбинацией разомкнутых путей – хотя бы тех, которые проходят через составляющие его ветви. Но до этого в дереве независимые пути строили присоединением нового узла, а значит и ведущей к нему ветви (узлы в сети будем рассматривать только как границы ветвей, в отличие от графов, где возможны узлы сами по себе как изолированные вершины). Это означает, что в состав контура войдет хотя бы одна ветвь, не входящая в другие независимые разомкнутые пути. Например, это может быть ветвь, которая определяла разомкнутый путь, ставший замкнутым путем, контуром. Кроме того, по построению, любая ветвь, замыкающая контур, линейно зависима от остальных ветвей, его составляющих, поскольку соединяет уже охваченные другими путями узлы.

Таким образом, полученный контур нельзя представить комбинацией оставшихся независимых разомкнутых путей. Он представляет собой новое измерение и относится к подпространству замкнутых путей. Его появление уменьшает базис подпространства

разомкнутых путей на единицу. Пример представлен на рис. 2.3.в. Общее число путей остается прежним и равно числу ветвей.

При соединении затем любой пары из оставшихся узлов в связанной подсети, число разомкнутых путей будет каждый раз уменьшаться на единицу, а число контуров – увеличиваться на единицу. Если соединять узлы из разных подсетей, то число контуров и разомкнутых путей не изменится, поскольку уменьшение числа узлов уменьшает число подсетей. Соединив последние два узла в один, получим, как показано на рис. 2.3.е, «цветок с лепестками» – контурами, числом равным числу ветвей, а разомкнутых путей теперь нет. Разрывая затем оставшийся узел, и отделяя по одной ветви, получим каждый раз один новый узел, соответствующий отдельному контуру, и одну новую подсеть. Это, в соответствии с (2.1), не меняет числа разомкнутых путей, равное теперь нулю. Разъединив все ветви, получим набор отдельных, свободных контуров, показанный на рис. 2.3.ж.

Таким образом, на протяжении всего преобразования структуры сети суммарное число независимых замкнутых и разомкнутых путей оставалось постоянным, равным количеству ветвей:  $n = m + j$ , то есть выполняется соотношение (2.2). Далее будет показано, что пути в сети образуют векторное пространство, в котором независимые замкнутые и разомкнутые пути образуют базисы подпространств, размерность которых меняется при изменении числа узлов. Изменение размерности подпространств затрудняет расчет сети, определение параметров процессов в ее ветвях.

Вместе с тем можно построить сеть, двойственную к данной сети. Для двух двойственных сетей сумма числа независимых контуров и сумма числа независимых разомкнутых путей постоянна при любых изменениях структуры. Существует инвариантное соотношение между матрицами преобразования путей в двойственных сетях, которое обеспечивает расчеты параметров процессов при изменениях структуры.

Двойственность для сетей имеет тот же смысл, что и для графов. Графы двойственны, если существует такое взаимно однозначное соответствие их ребер, что для множества ребер, составляющих циклический вектор одного графа, соответствующее множество ребер другого графа есть вектор разрезающего множества (Свами, 1984, с.143). Мы будем говорить о соответствии множества ветвей, составляющих контур (цикл) в одной сети, множеству тех же ветвей, составляющих *разомкнутый путь* в другой, двойственной сети.

#### **2.1.4. Топологические параметры двойственных сетей**

Сеть из одной ветви. Рассмотрим топологические параметры простейшей сети с двойственной структурой. Такая сеть представлена на рис. 2.2. Это одна ветвь с замкнутой и разомкнутой частями. Топологическим соотношениям (2.1) и (2.2) удовлетворяет только одна комбинация параметров ветви:  $n = 2, s = 2, J = 3, j = 1, m = 1$ . Отсюда ясно, что обе

части такой двуединой ветви существуют как две независимые подсети в разных пространствах. При этом в разомкнутом пути есть два узла, а в контуре – один узел.

При размыкании контура его узел, расположенный в любой выбранной точке контура, разделяется на два; одновременно в двойственной части ветви два узла соединяются в один, превращая разомкнутый путь в контур. И наоборот. Для одной ветви это единственное преобразование структуры (соединение и/или разъединение), которое можно сделать. В данном случае при изменении структуры сети-ветви все параметры ( $n, J, s, j, m$ ) остаются постоянными, т.е. являются инвариантами преобразований структуры связей простейшей сети из одной ветви.

Сеть из многих ветвей. При изменении структуры более сложных сетей, состоящих из многих ветвей, остаются постоянными параметры ( $n, j, m$ ), поскольку каждая ветвь подчиняется тем же топологическим законам. То есть, если одна часть ветви включена в контур заданной сети, то другая часть – в разомкнутый путь двойственной сети. И наоборот. Сумма количества узлов может меняться при изменении количества подсетей, в соответствии с (2.1).

Если в заданной сети происходит разъединение узла, связывающего две ветви, например, ветвь  $A$  и ветвь  $B$ ; то при этом замкнутый путь,  $m$ -путь, превращается в разомкнутый путь,  $j$ -путь. Тогда одновременно в двойственной сети происходит слияние узлов тех же ветвей  $A$  и  $B$ . При этом соответствующий  $j$ -путь превращается в  $m$ -путь. Если разделяется узел, связывающий три ветви в  $\alpha$ -сети, то в один узел сливаются три граничных узла тех же ветвей в двойственной  $\alpha$ -сети.

Соответствие разделяемых и соединяемых узлов в двойственных сетях однозначно определяется по ориентации ветвей. То есть, если сливаются начальные узлы ветвей в  $\alpha$ -сети, то и разделяются также начальные узлы тех же ветвей в  $\alpha$ -сети. И наоборот. Можно считать, что изначально сети состоят из свободных ветвей. Это удобно для анализа, хотя и необязательно. Столь же удобно полагать, что изначально свободные ветви в сети заданного пространства все замкнутые, в сети двойственного пространства все разомкнутые. Это позволяет начинать анализ с наиболее наглядных матриц преобразования путей, хотя все сети равноправны, свободные от связей ветви суть лишь частный случай связанных между собой ветвей.

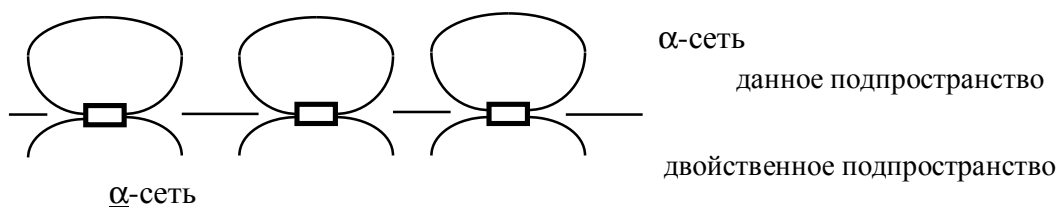
Процесс преобразования трех свободных ветвей в связанную сеть, состоящую из двух взаимно двойственных частей, сетей представлен на рис. 2.4. Топологические параметры совокупности двух двойственных сетей при этом постоянны. То есть, постоянными являются суммы ветвей, узлов, подсетей, замкнутых путей и разомкнутых путей.

На рис. 2.4 индексами 1, 2, 3 обозначены соответственно сети, обладающие структурой ветвей трех типов:

- свободные ветви (в одной сети все ветви замкнуты, в другой сети все ветви разомкнуты);
- ветви, связанные в каждой из двойственных сетей в одну подсеть (в одной сети все пути замкнуты – это чисто контурная сеть, в другой сети все пути разомкнуты – это чисто узловая сеть);
- ветви, связанные так, что меняется число  $m$ -путей и  $j$ -путей в двойственных сетях.

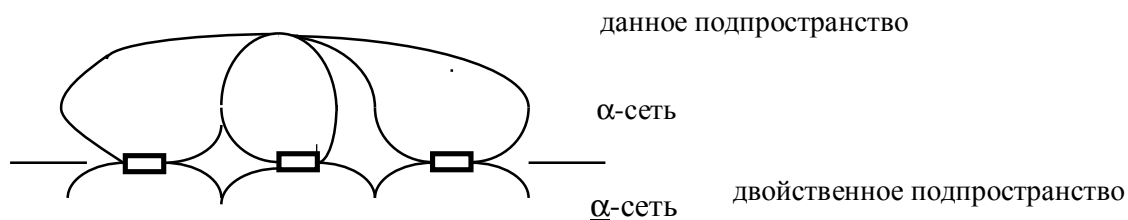
Одинаковые по смыслу величины в заданной сети и двойственной сети обозначены одинаковыми буквами. Как отмечалось в разделе 2.1.2, для их различения, здесь, как и повсюду в данной работе, *величины*, относящиеся к *двойственной сети*, выделяются *подчеркнутыми буквами*. В данном случае заданная сеть верхняя, а двойственная сеть нижняя. Индекс 0 указывает, что показатель представлен для совокупности двух двойственных подсетей, обладающих данной структурой связей ветвей. Полная сеть расположена в пространстве, состоящем из заданного, наблюдаемого подпространства, и двойственного подпространства. Горизонтальные линии обозначают границу раздела между подпространствами, где расположены заданная сеть (для краткости будем обозначать ее иногда как  $\alpha$ -сеть) и двойственная сеть (ее будем обозначать как  $\underline{\alpha}$ -сеть).

Для каждой сети в таблицах показаны топологические параметры совокупности двух двойственных сетей, а также отдельно для данной сети и двойственной сети.



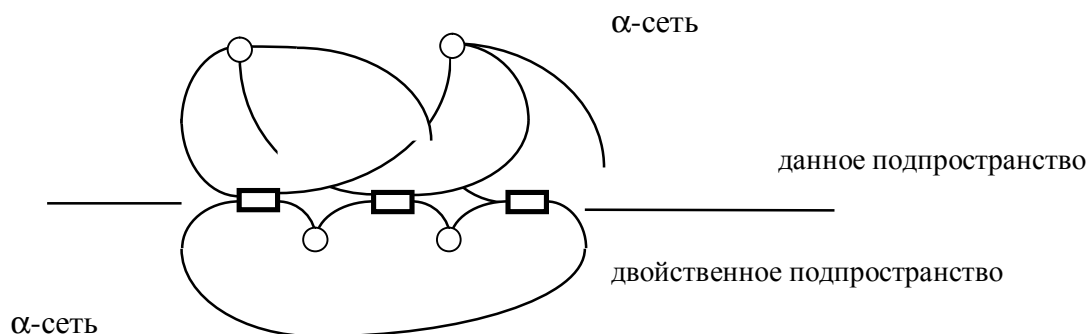
	ветви	узлы	подсети	$j$ -пути	$m$ -пути
Две двойственные сети	$\mathbf{n_{a0} = 6,}$	$\mathbf{J_{a0} = 9,}$	$\mathbf{s_{a0} = 6,}$	$\mathbf{j_{\alpha 0} = 3,}$	$\mathbf{m_{\alpha 0} = 3,}$
Данная сеть	$n_{\alpha}^1 = 3,$	$J_{\alpha}^1 = 3,$	$s_{\alpha}^1 = 3,$	$j_{\alpha}^1 = 0,$	$m_{\alpha}^1 = 3$
Двойственная сеть	$\underline{n}_{\alpha}^1 = 3,$	$\underline{J}_{\alpha}^1 = 6,$	$\underline{s}_{\alpha}^1 = 3,$	$\underline{j}_{\alpha}^1 = 3,$	$\underline{m}_{\alpha}^1 = 0$

а) Сеть 1



Две двойственные сети	$n_{\alpha 0} = 6,$	$J_{\alpha 0} = 5,$	$s_{\alpha 0} = 2,$	$\mathbf{j}_{\alpha 0} = 3,$	$\mathbf{m}_{\alpha 0} = 3,$
Данная сеть	$n_{\alpha}^2 = 3,$	$J_{\alpha}^2 = 1,$	$s_{\alpha}^2 = 1,$	$\mathbf{j}_{\alpha}^2 = 0,$	$\mathbf{m}_{\alpha}^2 = 3$
Двойственная сеть	$\underline{n}_{\alpha}^2 = 3,$	$\underline{J}_{\alpha}^2 = 4,$	$\underline{s}_{\alpha}^2 = 1,$	$\underline{\mathbf{j}}_{\alpha}^2 = 3,$	$\underline{\mathbf{m}}_{\alpha}^2 = 0$

б) Сеть 2



Две двойственные сети	$n_{\alpha 0} = 6,$	$J_{\alpha 0} = 5,$	$s_{\alpha 0} = 2,$	$\mathbf{j}_{\alpha 0} = 3,$	$\mathbf{m}_{\alpha 0} = 3$
Данная сеть	$n_{\alpha}^3 = 3,$	$J_{\alpha}^3 = 2,$	$s_{\alpha}^3 = 1,$	$\mathbf{j}_{\alpha}^3 = 1,$	$\mathbf{m}_{\alpha}^3 = 2,$
Двойственная сеть	$\underline{n}_{\alpha}^3 = 3,$	$\underline{J}_{\alpha}^3 = 3,$	$\underline{s}_{\alpha}^3 = 1,$	$\underline{\mathbf{j}}_{\alpha}^3 = 2,$	$\underline{\mathbf{m}}_{\alpha}^3 = 1$

в) Сеть 3

Рис. 2.4. Соединение свободных ветвей в сеть

а) сеть 1 – свободные ветви образуют по 3 подсети: ветви в  $\alpha$ -сети образуют контуры, ветви в  $\underline{\alpha}$ -сети образуют разомкнутые пути;

б) сеть 2 - свободные ветви связаны по одному узлу,  $\alpha$ -сеть и  $\underline{\alpha}$ -сеть теперь имеют по одной подсети, но тип путей прежний;

в) сеть 3 – связанная сеть: в  $\alpha$ -сети один узел расслоен на два, а в  $\underline{\alpha}$ -сети два узла замкнуты; типы путей изменились, общее число узлов изменилось, сумма  $m$  путей и  $j$  путей в совокупности двух сетей осталась прежней.

На рис. 2.4 показано, что в процессе наложения связей на свободные ветви при переходе от сети свободных ветвей к сети связанных ветвей происходят изменения. При изменении структуры число узлов и подсетей меняется, число  $m$ -путей и  $j$ -путей в каждой части сети также меняется. Однако сумма  $m$ -путей и  $j$ -путей остается постоянной, т.е. постоянно полное число, как замкнутых путей, так и разомкнутых путей. При этом пути и отношения между путями и ветвями становятся более сложными, поэтому рассмотрим понятие путей в сети и отношений между ними более подробно.

## 2.2. Пути в сети

Пути, как линейно независимые наборы ветвей, играют роль осей координат в пространстве сети, каждое измерение которого определяет одна ветвь.

### 2.2.1. Свойства путей

*Путь в сети* – это одна ветвь или набор ветвей, которые, как правило, последовательно соединены. Как и ветви, пути обладают ориентацией. Порядок перечисления ветвей (прохождения от одной границы, узла ветви к другому узлу) задает ориентацию пути. Ориентация пути не обязательно совпадает с ориентацией составляющих его ветвей. Если начало и конец пути совпадают, то путь *замкнутый* (или *m-путь*), если не совпадают – путь *разомкнутый* (или *j-путь*). Путь задан перечислением составляющих его ветвей. В этом перечислении ветвь входит со знаком плюс, если ориентации ветви и пути совпадают, и со знаком минус – если нет.

Сами ветви задают отдельные измерения и фактически определяют размерность пространства сети, а пути служат координатами такого пространства. Они проходят через одну или несколько ветвей. Пути можно складывать, вычитать, выражать друг через друга, сравнивая составляющие их ветви. Поэтому пути, как и векторы в пространстве могут быть линейно зависимы или линейно независимы. Полный набор линейно независимых путей для данной сети образует базис. Все другие возможные пути в сети, не вошедшие в базис, выражаются через базисные пути в виде линейных комбинаций путей базиса. Коэффициенты при выражении путей одного базиса через пути другого базиса составляют матрицу преобразования путей. При изменении структуры сети, состоящем в соединении и/или разъединении ветвей, пути также могут изменяться.

Пример построения базиса путей представлен на рис. 2.5, где базис путей сети  $\alpha$  из четырех свободных ветвей на рис. 2.5.б, преобразуется в базис путей сети  $\beta$  из тех же ветвей (одна подсеть),  $n = 4$ ,  $s = 1$ , с тремя узлами,  $J = 3$  на рис. 2.5.а.

Выбранные в связанной сети пути выражаются через пути в ветвях:

$$\begin{array}{rcl}
 p_b & & C_b^a & & p_a \\
 p_1^` & = & b_2 & ; & p_1 = b_1 \\
 p_2^` & = & b_1 & ; & p_2 = b_2 & p_b = C_b^a & p_a \\
 p_3^` & = & -b_1 + b_2 + b_3 & ; & p_3 = b_3 \\
 p_4^` & = & b_3 - b_4 & ; & p_4 = b_4
 \end{array}$$

В отношении обозначений можно заметить, что при индексе  $\beta^`$  штрих не нужен, является избыточным, поскольку сам индекс указывает, о каком базисе, наборе путей идет речь. Штрих нужен только для обозначения конкретных путей, например  $p_3^`$ , для указания

его принадлежности данному базису. Штрих проще писать, чем полное обозначение каждого пути, например,  ${}^m p_3^b$ , что означает путь под номером 3 из базиса  $\beta^b$ , причем  $m$  указывает, что это замкнутый путь в данном базисе.

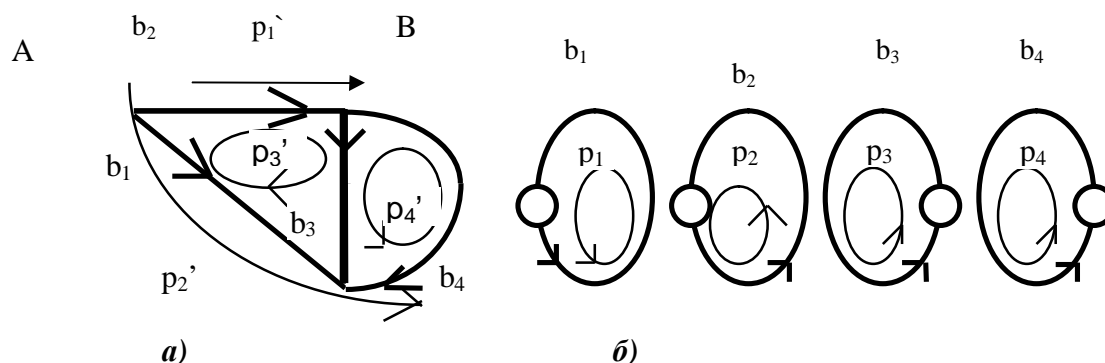


Рис. 2.5. Базис  $m$  и  $j$  путей в сети и его преобразования  
 а – базисные пути в связанной сети; б – базисные пути в свободной сети

Пути в сети из четырех свободных ветвей на рис. 2.5.б обозначены как  $p_\alpha$ , а пути в сети из четырех связанных ветвей на рис. 2.5.а – как  $p_\beta^b$ , где  $\alpha, \beta$  принимают значения от 1 до 4, перечисляя все пути. В сети из свободных ветвей пути совпадают с направлением ветвей, но могут отличаться по ориентации.

Коэффициенты выражения путей базиса в связанной сети через пути в свободных ветвях можно представить в виде матрицы:

$$C_b^a = \begin{matrix} & \alpha & & & & \\ & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \\ \beta & & & & & \\ p_1^b & & 1 & & & j \\ p_2^b & 1 & & & & j \\ p_3^b & -1 & 1 & 1 & & m \\ p_4^b & & & 1 & -1 & m \end{matrix}$$

Индексы около косой черты в левом верхнем углу матрицы указывают, какой набор путей, базис, перечисляется по данным строкам или столбцам. Такое обозначение соответствия индексов и элементов матрицы ввел Крон. Сбоку матриц будем иногда записывать буквы, например,  $j$  – обозначает разомкнутый путь, или  $m$  – замкнутый путь.

Любой базис путей можно представить разложением по отдельным ветвям, которое показывает, из каких ветвей состоит данный путь, и какая ориентация пути относительно направления этих ветвей. В матрице  $C_b^a$  строки перечисляют, сколько и каких ветвей (путей в отдельных ветвях), с какой ориентацией, составляют данный путь. Элементы столбцов показывают, в какие пути, сколько раз и с какой ориентацией входит данная ветвь.

Обратное преобразование, т.е. выражение путей в свободных ветвях через пути в связанной сети, а также матрица преобразования от базисных путей в связанной сети к базисным путям в сети из отдельных, свободных ветвей, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= b_1 = && + p_2` \\
 p_2 &= b_2 = && + p_1` \\
 p_3 &= b_3 = && - p_1` + p_2` + p_3` \\
 p_4 &= b_4 = && - p_1` + p_2` + p_3` - p_4`
 \end{aligned}$$

$$C_a^b = A_0^a \cdot t =$$

	$\beta$	$p_1`$	$p_2`$	$p_3`$	$p_4`$
$\alpha$	$p_1$		1		
	$p_2$	1			
	$p_3$	-1	1	1	
	$p_4$	-1	1	1	-1
		$j$	$j$	$m$	$m$

$$p_a = C_a^b \cdot p_b$$

В матрице  $C_a^b$  строки показывают, сколько путей, каких и с какой ориентацией надо взять, чтобы получить данную ветвь; столбцы показывают: в представлении каких ветвей участвует данный путь, сколько раз, с какой ориентацией он используется. Базис свободных ветвей будем обозначать как  $p_0$ , матрицу преобразования свободных путей в связанные – как  $C_a^0$ , матрица преобразования связанных путей в свободные – как  $C_0^a$ . Эти соотношения можно записать как  $p_a = C_a^0 p_0$  и как  $p_0 = C_0^a p_a$ , что отличает базис свободных ветвей от базисов связанных в сети ветвей. Используемые обозначения индексов и правила действий с индексами, принятые в тензорном анализе (Схоутен, 1965; Корн, 1977); представлены ниже.

1. Соглашение о суммировании (умножение матрицы на матрицу или на вектор). Суммирование от 1 до  $n$  производится по индексу (немой индекс), который встречается дважды, один раз вверху и один раз внизу. Например:

$$M_b^a \cdot a_a = \sum_{a=1}^{a=n} M_b^a \cdot a_a = b_b; (b = 1, \dots, m). \tag{2.4}$$

2. Обозначение любого немом индекса при преобразованиях может меняться, поскольку немые индексы «взаимно уничтожаются», свертываются. Например,

$$A^{ij} \cdot B_{jl} = A^{im} \cdot B_{ml} = A^{ih} \cdot B_{hl}.$$

3. Индексы, которые встречаются только один раз в каждом произведении, наверху или внизу, называются свободными и пробегают значения от 1 до  $n$ , так что каждый свободный индекс означает запись одним уравнением системы  $m$  уравнений, как, например, индекс  $b$  в (2.4). Свободные верхние и нижние индексы из разных частей уравнения должны совпадать.

4. Верхние индексы используются для обозначения контравариантных компонент геометрических объектов. Нижние индексы – для обозначения ковариантных компонент. Ковариантность и контравариантность аналогичны соответствующим понятиям тензорного анализа. Например,  $A_{..k}^{ij}$  – дважды контравариантный объект и один раз ковариантный.

5. Если задан определенный порядок индексов при основной букве, и они меняются местами, то это означает транспонирование (обозначаемое обычно индексом  $t$ ) относительно данной пары индексов. Например,  $A_{..k}^{ij} = (A_{..k}^{i.j})_t$ . Порядок расположения индексов здесь указан точками.



6. Если меняются местами верхний и нижний индексы, то это означает обращение матрицы, которое иначе обозначается:  $C_{i,k}^j = (C_i^k)^{-1}$ . Когда меняется как порядок индексов, так и верхний и нижний индексы, то это ортогональная матрица. Например, эквивалентны записи ортогональных матриц  $A$  и  $B$ :  $A^{-1} = B_i$  или  $A_i^k = B_k^i$ .

7. Буквами греческого алфавита будем обозначать векторные величины, которые включают в себя набор элементов в указанных пределах, например  $p_a = \{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n\}$ , где  $a = 1, \dots, n$ . Ими обозначают как свободные, так и немые индексы. Буквы латинского алфавита используются для обозначения одной конкретной величины, например,  $p_z = b_1 + b_2$ , или указывают пределы изменения векторных величин.

Матрица  $C_b^a$  содержит коэффициенты преобразования путей из свободной сети в связанную сеть, а матрица  $C_a^b = (C_b^a)^{-1}$  содержит коэффициенты обратного преобразования путей из связанной сети в сеть свободных ветвей. Это взаимно обратные преобразования; перемножение соответствующих им матриц дает единичную матрицу.

**Разорванные пути.** При определении пути как набора ветвей, не делалось предположения, что ветви, составляющие путь, следуют друг за другом. То есть, не предполагалось, что путь начинается с одной границы ветви, проходит по всей ее протяженности к другой границе, которая уже соединена с начальной границей следующей ветви, и. т.д. Следовательно, теоретически можно предположить, что ветви, составляющие путь, не обязательно связаны друг с другом непосредственно. Или, что от второй границы ветви путь продолжается сразу по двум и более ветвям, которые соединены с этой границей, т.е. разветвляется.

С точки зрения потоков в сети (структуре сложной системы), пути, как координаты, должны быть непрерывны, т.е. нормальны. Тогда можно говорить о постоянстве потока в пределах данного пути. Тем не менее, все же есть определенный смысл рассматривать прерывистые пути, хотя бы на уровне принципиальной возможности. Дело в том, что при изменении структуры сети ветви могут оказаться соединенными так, что прежние непрерывные пути окажутся разорванными, или получат разветвления. Нет оснований считать, что такие пути окажутся «плохими» или недостойными называться путями, хотя для представления потоков они становятся неудобными. Расчет потока легче проводить в предположении, что он не меняется, остается постоянным на протяжении выбранного пути. При разрывании пути этого гарантировать нельзя. Вместе с тем, пока нет воздействий, и в сети отсутствуют потоки, все возможные пути остаются равноправными наборами ветвей. Непрерывные пути можно рассматривать как структурные аналоги собственных векторов.

Принципиальная возможность построения системы линейно независимых путей, хотя бы один из которых прерывистый, показана на рис. 2.6.

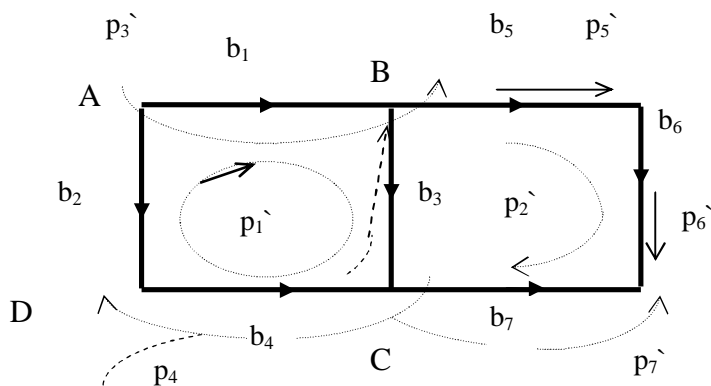


Рис. 2.6. Базис путей в связанной сети с прерывистым путем  $p_3$

Пути в сети на рис. 2.6 состоят из следующих ветвей:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= +b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \\
 p_2 &= -b_3 + b_5 + b_6 - b_7 \\
 p_3 &= +b_1 - b_4 \\
 p_4 &= -b_3 + b_4 \\
 p_5 &= +b_5 \\
 p_6 &= +b_6 \\
 p_7 &= +b_7
 \end{aligned}$$

Выбор путей демонстрирует, что можно не только прерывистые пути выразить через пути в отдельных ветвях, но и наоборот – выразить пути в отдельных ветвях через базис, включающий прерывистый путь. Это означает, что и любой другой путь можно представить данным прерывистым базисом – для этого достаточно вместо его ветвей подставить их выражения через пути такого базиса. Пути со штрихами относятся к связанной сети. На рисунке 2.6 направления ветвей и их собственных путей совпадают, поэтому эти пути обозначаются просто как ветви – буквой  $b_a$  с соответствующим номером. Таким образом, ветви здесь представляют пути в свободных ветвях. Под рисунком связанные пути выражены через ветви; прерывистый путь выделен.

Коэффициенты при ветвях составляют матрицы преобразования базиса путей свободной сети в связанную сеть  $C_b^a$ :

$\beta \backslash a$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	
$p_1$	1	-1	1	-1				$m$
$p_2$			-1		1	1	-1	$m$
$p_3$	<b>1</b>			<b>-1</b>				$j$
$p_4$			-1	1				$j$
$p_5$					1			$j$
$p_6$						1		$j$
$p_7$							1	$j$

Обратное преобразование представлено матрицей  $C_a^b$ , из коэффициентов выражения путей в свободных ветвях через пути в связанных ветвях.

$$C_a^b = \begin{array}{c} \beta \\ \alpha \end{array} \begin{array}{c} p_1^{\backslash} \\ p_2^{\backslash} \\ p_3^{\backslash} \\ p_4^{\backslash} \\ p_5^{\backslash} \\ p_6^{\backslash} \\ p_7^{\backslash} \end{array} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline & -1 & -1 & 1 & & 1 & -1 \\ \hline & & -1 & & & 1 & -1 \\ \hline & & -1 & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} m \\ m \\ j \\ j \\ j \\ j \\ j \end{array}$$

Отличие состоит в пути  $p_3^{\backslash}$  из связанной сети. Этот путь начинается от узла  $A$ , проходит ветвь  $b_1$  и выходит из узла  $B$ . Но, хотя этот узел является не конечным, а промежуточным, следующая ветвь пути начинается не из узла  $B$ , а из узла  $C$ , проходит по ветви 4 в направлении, противоположном ее собственной ориентации, и заканчивается в узле  $D$ . Таким образом, этот путь здесь разорван. Первая матрица определяет преобразование базиса  $p_b = C_b^a p_a$ , вторая – обратное преобразование базиса  $p_a = C_a^b p_b$ . Перемножение этих матриц дает единичную матрицу, что подтверждает возможность использования прерывистого пути в составе базиса путей в сети.

Выбор иного набора путей в качестве базиса на рис. 2.6 позволяет также дать пример матриц преобразования с элементами, значения которых отличаются от  $\pm 1$ . Пусть, например, в разорванном пути

$$p_3^{\backslash} = +b_1 - b_4$$

ветвь  $b_4$  проходится в положительном направлении, т.е. он принимает вид:

$$p_3^{\backslash} = +b_1 + b_4.$$

Тогда матрица  $C_b^a$  принимает следующий вид, где  $m$  и  $j$  обозначают строки замкнутых и разомкнутых путей:

$$C_b^a = \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{array} \begin{array}{c} p_1^{\backslash} \\ p_2^{\backslash} \\ p_3^{\backslash} \\ p_4^{\backslash} \\ p_5^{\backslash} \\ p_6^{\backslash} \\ p_7^{\backslash} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & & & m \\ \hline & & & 1 & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & \mathbf{1} & & & \mathbf{1} & & & j \\ \hline & & & -1 & 1 & & & j \\ \hline & & & & & 1 & & j \\ \hline & & & & & & 1 & j \\ \hline & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} m \\ m \\ j \\ j \\ j \\ j \\ j \end{array}$$

Матрица обратного преобразования, где  $m$  и  $j$  обозначают столбцы замкнутых и разомкнутых путей, выражает пути в свободных ветвях через пути в связанной сети:

$$C_a^{b0} =$$

$\alpha \backslash \beta$	$p_1^{\backslash}$	$p_2^{\backslash}$	$p_3^{\backslash}$	$p_4^{\backslash}$	$p_5^{\backslash}$	$p_6^{\backslash}$	$p_7^{\backslash}$
$b_1$		1	1	-1	-1	-1	1
$b_2$	-1	1	1	-2	-1	-1	1
$b_3$		-1			1	1	-1
$b_4$		-1		1	1	1	-1
$b_5$					1		
$b_6$						1	
$b_7$							1
	$m$	$m$	$j$	$j$	$j$	$j$	$j$

Здесь в матрице обратного преобразования  $C_a^{b0}$  в строке 2 появляется отличный от единицы коэффициент. В данном случае это элемент матрицы  $C[b_2, p_4^{\backslash}] = -2$ . Более того, в матрицах преобразования, в отличие от матриц цикломатической и разрезов, могут появляться дробные рациональные числа. Это показывает, что поле векторного пространства путей в сети сложнее, чем множество целых чисел с операциями сложения и умножения по модулю 2, как в теории графов.

В качестве другого примера выберем в сети на рис. 2.5а новый путь  $p_2^{\backslash\backslash}$  который проходит по ветвям,  $b_2, b_3$  и  $b_4$ , то есть  $p_2^{\backslash\backslash} = +b_2 + b_3 + b_4$ . Все пути, относящиеся к этому базисному набору, будем обозначать двумя штрихами, а их совокупность – индексом  $\gamma$ , т.е.  $p_g^{\backslash\backslash}$ . Путь  $p_2^{\backslash\backslash}$  разветвляется, к тому же этот путь содержит контур. Выражение путей в связанной сети через простейшие пути в свободных ветвях, а также обратное преобразование позволят выразить другие произвольные пути в сети через пути данного базиса.

$$\begin{aligned}
 p_g^{\backslash\backslash} &= C_g^a p_a & p_a &= C_a^g p_g^{\backslash\backslash} \\
 p_1^{\backslash\backslash} &= +b_2 & p_1 &= b_1 = +\frac{1}{2}p_1^{\backslash\backslash} + \frac{1}{2}p_2^{\backslash\backslash} - p_3^{\backslash\backslash} + \frac{1}{2}p_4^{\backslash\backslash} \\
 p_2^{\backslash\backslash} &= +b_2 + b_3 + b_4 & p_2 &= b_2 = +p_1^{\backslash\backslash} \\
 p_3^{\backslash\backslash} &= -b_1 + b_2 + b_3 & p_3 &= b_3 = -\frac{1}{2}p_1^{\backslash\backslash} + \frac{1}{2}p_2^{\backslash\backslash} + \frac{1}{2}p_4^{\backslash\backslash} \\
 p_4^{\backslash\backslash} &= b_3 - b_4 & p_4 &= b_4 = -\frac{1}{2}p_1^{\backslash\backslash} + \frac{1}{2}p_2^{\backslash\backslash} - \frac{1}{2}p_4^{\backslash\backslash}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Возможность использовать разорванные или разветвленные пути, в том числе в качестве элементов базиса, подобна тому, что в качестве линий координат в геометрии можно использовать косоугольные, криволинейные, синусоидальные и т.д. линии. Вопрос в том, что удобнее для отображения реальности в математической модели. В теории электрических машин используются, например, вращающиеся системы координат.

Применение «правильных» путей, т.е. которые непрерывно переходят от одной ветви к другой ветви, можно рассматривать как аналогии собственных значений и собственных функций при решении, например, дифференциальных уравнений. Дело в том, что выбор, нахождение значения параметра в таких уравнениях не является очевидным, но только для

такого значения существует ненулевое решение. Подобно этому в сети есть возможность произвольного выбора путей только до тех пор, пока на сеть не наложены внешние векторы, представленные воздействиями и откликами. Когда появляются такие векторы, и возникает задача расчета сети – т.е. необходимость расчета в каждой ветви откликов на приложенные воздействия, то практика показывает, что решения существуют только при выборе в качестве базисных «правильных» путей в указанном выше смысле. Дело в том, что представление путей в матрице преобразования, которая собственно и формирует решение, воспринимается так, как если бы разорванные или ветвящиеся пути соответствовали другой структуре. Такой структуре, в которой данный набор ветвей соответствовал бы «правильному» непрерывному пути. Это может вступать в противоречие с возможностью построения структуры сети с любым заданным набором «правильных» путей в качестве базиса, однако это уже задача синтеза, которую мы в данной работе рассматривать не будем.

### 2.2.2. Преобразования базисов путей в сети

Рассмотрим преобразование одного базиса связанных ветвей в другой базис связанных ветвей и наоборот. Например, выразим векторы базиса сети на рис. 2.5.а через векторы базиса путей (2.5), а затем наоборот. Для этого достаточно выразить пути одного базиса через ветви путей другого базиса. И наоборот. Произведение этих матриц равно единичной матрице. Выражение первого базиса  $p_b^`$  через второй  $p_g^``$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
 p_1^` &= b_2 = p_1^`` \\
 p_2^` &= b_1 = +\frac{1}{2}p_1^`` + \frac{1}{2}p_2^`` - p_3^`` + \frac{1}{2}p_4^`` \\
 p_3^` &= -b_1 + b_2 + b_3 = +p_3^`` \\
 p_4^` &= b_3 - b_4 = +p_4^`` \\
 p_b^` &= C_b^g p_g^``
 \end{aligned}$$

$\beta \backslash \gamma$	$p_1^``$	$p_2^``$	$p_3^``$	$p_4^``$
$p_1^`$	1			
$p_2^`$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
$p_3^`$			1	
$p_4^`$				1
	$j$	$j$	$m$	$m$

Эти базисы отличаются только одним путем:  $p_2^` = +b_2 + b_3 + b_4$  вместо пути  $p_2^` = b_1$ , поэтому матрицы их взаимного преобразования единичные, кроме строки 2.

$$\begin{aligned}
 p_1^`` &= -p_1^` + p_1^` + p_1^` \\
 p_2^`` &= -p_1^` + 2p_2^` + 2p_3^` - p_4^` \\
 p_3^`` &= b_3 = p_3^` \\
 p_4^`` &= b_4 = p_4^` \\
 p_g^`` &= C_g^b p_b^`
 \end{aligned}$$

$\gamma \backslash \beta$	$p_1^`$	$p_2^`$	$p_3^`$	$p_4^`$
$p_1^``$	1			
$p_2^``$	-1	2	2	-1
$p_3^``$			1	
$p_4^``$				1
	$j$	$j$	$m$	$m$

Преобразование второго базиса в первый запишем аналитически:

$$p_b = C_b^a p_a = C_b^a C_a^g p_g = C_b^g p_g, \text{ где } C_b^g = C_b^a C_a^g. \quad (2.6)$$

Аналогично преобразование первого базиса во второй:

$$p_g = C_g^a p_a = C_g^a C_a^b p_b = C_g^b p_b, \text{ где } C_g^b = C_g^a C_a^b. \quad (2.7)$$

Таким образом, можно либо преобразовать один базис в другой, либо непосредственно сделать это через простейший базис путей в свободных ветвях. Матрицы преобразования базиса  $p_b$  в базис  $p_g$  можно записать:  $C_g^b = (C_b^g)^{-1} = C_g^a C_a^b = (C_b^a C_a^g)^{-1}$ , что соответствует формуле  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$  алгебры матриц.

Отсюда следует, что матрицы преобразования базисов путей в сети образуют группу относительно операции умножения, преобразующей один базис в другой. Это обеспечивается тем, что пути в отдельных ветвях выражаются через пути в связанной сети, проходящие по многим ветвям. Базис системы линейно независимых путей в сети состоит из подбазисов отдельно для замкнутых (охватывают все ветви) и отдельно для разомкнутых путей (охватывают все узлы). Эти типы путей не зависят друг от друга.

Понятия путей не всегда имеют аналогии в теории графов. В теории графов для построения базисных наборов циклов и разрезов выбирается (строится) остов графа (как строится и дерево разомкнутых путей), присоединяя на каждом шаге по одному узлу. Получается независимое (базисное) множество разрезов. Затем подключаются по одному ребра, не вошедшие в остов (хорды); каждое из которых определяет базисный цикл, поскольку каждый построенный так цикл содержит хотя бы одну новую ветвь (ребро), не входящую в другие циклы – по построению.

Такой подход не всегда дает однозначное построение базиса, т.е. не является общим. Известно, что построение остова дает набор независимых  $j$ -путей, но замыкание хордами набора базисных циклов может привести к охвату всех ветвей прежде, чем будут замкнуты все базисные хорды. Построим для сети на рис. 2.7 базисную систему циклов (Атабеков, 1969, с. 81) как пример того, что независимый контур может не содержать *новой* хорды.

Остов для графа на рис. 2.7.а представлен на рис. 2.7.б жирными линиями. Базисные хорды для него представлены жирными линиями на рис. 2.7.в. Замыкая остов наружными хордами, получим не только три базисных цикла, обозначенных кривыми линиями, но также и четвертый базисный цикл, составленный из наружных хорд. При этом базисная хорда внутри схемы еще не использована. В теории графов каждый базисный цикл должен включать только одну хорду, которая не входит в другие базисные циклы. Здесь же хорды сами образуют цикл, который не является линейной комбинацией уже построенных циклов (базисный), а еще не все базисные хорды использованы.

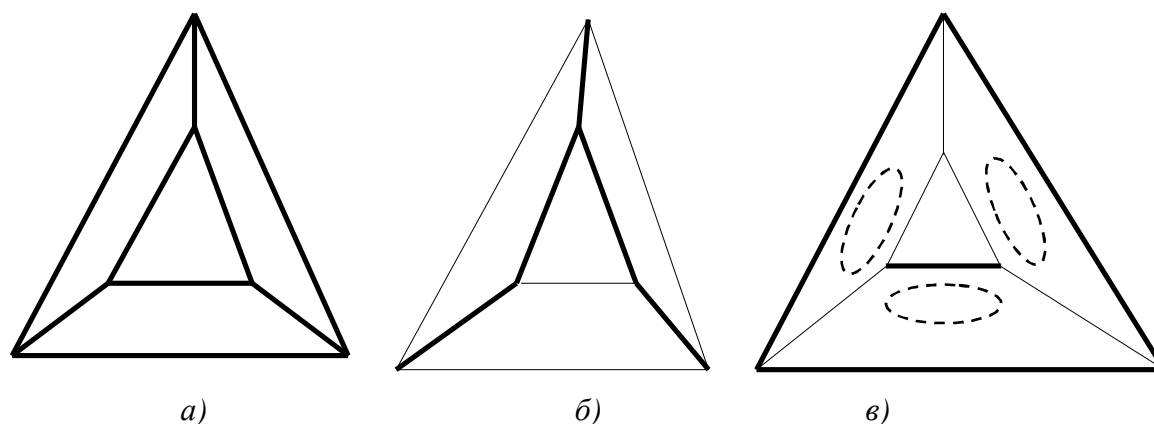


Рис. 2.7. Построение базисных циклов с помощью базисных хорд и остова не всегда однозначно

Аналогичная ситуация для двойственного графа, который показан на рис 2.8.а жирными линиями. Он дан отдельно на рис. 2.8.б, где остов показан пунктиром, а замыкание хорд дает *два* отдельных цикла-контура, которые могут быть базисными, но не включают ребер-ветвей остова.

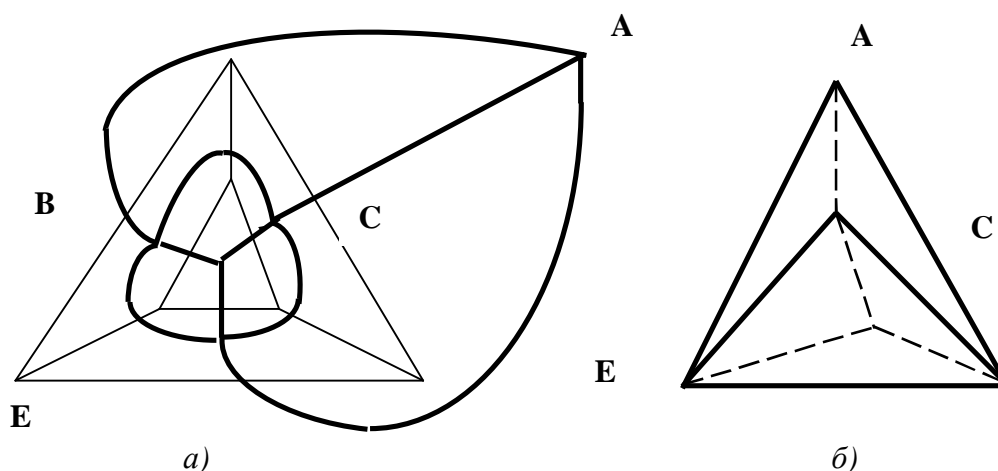


Рис. 2.8. Построение базисных циклов в двойственном графе также не однозначно

Условия построения базиса:

- разомкнутые пути должны охватить все узлы;
- замкнутые пути должны охватить все ветви (включая входящие в разомкнутые пути).

Выше показано, что замкнутые и разомкнутые пути не зависят друг от друга и размерность их базисов подчиняется условиям (2.1) и (2.2). Для построения простейшего базиса разомкнутых путей достаточно построить остов, а затем считать каждую ветвь этого остова разомкнутым путем. Поскольку первая ветвь при этом охватит два узла, а каждая следующая добавит еще один узел, то ветви окажутся независимыми друг от друга. Чтобы представить любой другой разомкнутый путь, связывающий два любых узла, достаточно

перечислить все ветви, связывающие эти узлы в остове, что, по определению остова, всегда возможно.

### 2.2.3. Замкнутые и разомкнутые пути

В теории графов в качестве координат векторного пространства используются базисные циклы и базисные разрезы, а не замкнутые и разомкнутые пути, как в теории сетей. Эти два вида путей линейно не зависят друг от друга. Для каждого из этих подмножеств путей существует свой базис, не связанный с базисом другого подмножества путей и не зависящий от его изменений.

Произвольные разомкнутые пути могут представлять как разомкнутые, так и замкнутые пути. Независимые разомкнутые  $j$ -пути не могут представить контур, или  $m$ -путь, поскольку  $m$ -путь состоит из ветвей, узлы между которыми входят в остов графа. Эти узлы связаны всеми, кроме одной, ветвями контура, входящими в базис  $j$ -путей. Оставшаяся ветвь линейно зависима от остальных, следовательно, в набор ветвей  $j$ -путей, представляющих данный  $m$ -путь, войдут как базисные пути, так и их линейная комбинация.

Пусть базисные  $j$ -пути  $p_1, p_2, \dots, p_q$  соединяют узлы  $J_1$  и  $J_2$ . Оставшаяся одна ветвь, скажем  $b_r$ , соединяет те же узлы и путь через нее можно представить линейной комбинаций  $j$ -путей:  $b_r = p_1 + \dots + p_q$ . Последовательность  $p_q$  - путей ведет от одного узла к другому, скажем, от  $J_1$  к  $J_2$ , а путь в последней ветви возвращает в исходное положение, т.е. ориентирован противоположно; общая сумма, представляющая замкнутый путь  $p_m$ , равна нулю:

$$p_m = p_1 + p_2 + \dots + p_q - b_r = 0,$$

откуда ясно, что *набор линейно независимых  $j$ -путей не может представить контур*.

Аналогично ни один  $m$ -путь, или их линейная комбинация, не могут представить ни один  $j$ -путь в виде комбинации  $m$ -путей. При любом их сложении или вычитании возможны три варианта взаимного расположения: полное совпадение, частичное совпадение или полное несовпадение.

1. При полном совпадении происходит либо удвоение  $m$ -пути за счет двукратного прохождения каждой ветви – при совпадении направлений; либо уничтожение всего пути – при разных направлениях.

2. При полном несовпадении ветвей получим  $m$ -путь, контур, который состоит из двух  $m$ -путей.

3. При частичном совпадении – часть ветвей двух путей совпадает. Если совпадающие части путей направлены одинаково, то совпадающие ветви будут пройдены дважды – т.е. сначала будет пройден один путь, а затем другой, как при несовпадении. Если совпадающие части противоположны, то составляющие их ветви исчезнут; образуется  $m$ -путь. Этот путь



проходит по одному из слагаемых от одной точки начала наложения путей до другой, а отсюда по второму пути возвращается к началу.

Во всех трех случаях получается замкнутый путь. Отсюда следует, что нельзя представить разомкнутый путь с помощью замкнутых путей. Выше было показано, что *набор линейно независимых разомкнутых путей не может представить замкнутый путь (контур)*. Следовательно, замкнутые пути и разомкнутые пути линейно независимы друг от друга.

Вместе с тем набор разомкнутых путей, пусть даже зависимых, может представить замкнутый путь. Выше показано, что набор замкнутых путей не может представить разомкнутый путь. Этот факт отражается в том, что матрицах преобразования путей есть определенная, явно выраженная асимметрия. Она состоит в том, что подматрица, которая показывает участие замкнутых путей в представлении разомкнутых путей, т.е. связывает замкнутые пути и разомкнутые пути, состоит из нулевых элементов. Таким образом, в матрице преобразования путей имеется нулевой блок.

Существование нулевого блока в матрицах преобразования путей является ключевым моментом, основой для расчета изменения процессов в сетях (и моделируемых сетями сложных системах) с переменной структурой. Преобразования структуры сетей связаны не только с изменением соединения элементов в связанной сети, но и с такими изменениями, при которых сеть разделяется на произвольные подсети, либо соединяется связанная сеть из подсистем. Возможность разделения целого на части, или соединения целого из частей позволяет производить расчет и анализ сложных систем по частям, с использованием параллельных расчетов подсистем, с использованием вычислительных систем с параллельной архитектурой.

Алгоритмы расчета сетей по частям рассмотрены в главе 3. Проблема взаимодействия части и целого имеет также философское значение, которое в данном случае принимает математическую форму. Физика практически не рассматривает законы состояния и изменения структуры, взаимодействия частей в целом, многих элементов в сложной системе. Вместе с тем инвариант замкнутых и разомкнутых путей в двойственных сетях для физических систем проявляется как закон сохранения потока энергии.

### 2.3. Векторное пространство путей в сети

Множество путей в сети составляет векторное пространство, в котором можно определить понятия базиса и взаимного базиса, их матрицы преобразования образуют группу. Компоненты векторов базиса преобразуются ковариантно, а произвольного вектора – контравариантно.

#### 2.3.1. Соответствие путей векторному пространству

Пусть задано множество элементов  $S$  с некоторой бинарной операцией  $\mathcal{Y}$ , поле  $F$  с операциями сложения  $+$  и умножения  $\times$ , а также операция  $*$ , связывающая элементы множества  $S$  и поля  $F$  так, что для каждой пары этих элементов ( $s \in S$ ) и ( $a \in F$ ), сопоставляется единственный элемент  $(a * s) \in S$ . Такое множество  $S$  называется *векторным пространством* над полем  $F$ , если выполняются аксиомы:

1. Множество  $S$  – абелева группа относительно бинарной операции (т.е. операция коммутативна – результат не зависит от порядка выполнения операций).
2. Для любых элементов  $\forall(a, b)$  поля  $F$  и для любых элементов  $(s_1, s_2)$  множества  $S$  выполняются равенства:  
 $(a + b) * s_1 = (a * s_1) \mathcal{Y} (b * s_1)$  – первый закон дистрибутивности; и  
 $a * (s_1 \mathcal{Y} s_2) = (a * s_1) \mathcal{Y} (a * s_2)$  – второй закон дистрибутивности.
3. Для  $\forall(a, b) \in F$  и  $\forall((s \in S))$  имеет место  $(a \cdot b) * s = a * (b * s)$  – ассоциативность.
4. Для  $\forall(s \in S)$  выполняется равенство,  $\mathbf{1} * s = s$ , где  $\mathbf{1}$  – нулевой мультипликативный элемент поля  $F$ . (Или вводится понятие разности элементов, из которого следует наличие нулевого элемента).

Рассмотрим условия, при которых множество путей в сети удовлетворяет указанным аксиомам и составляет векторное пространство.

В качестве поля будем использовать поле рациональных чисел, а не  $GF(2)$  – поле целых чисел с операциями сложения и умножения по модулю 2, как в теории графов. Это связано с тем, что можно пройти любой путь несколько раз и тогда в матрице преобразования путей в свободных ветвях к путям в связанных ветвях  $C_{\beta}^{\alpha}$  появятся любые целые числа, а в матрице обратного преобразования  $C_{\alpha}^{\beta}$  – соответствующие рациональные дроби, как показано выше.

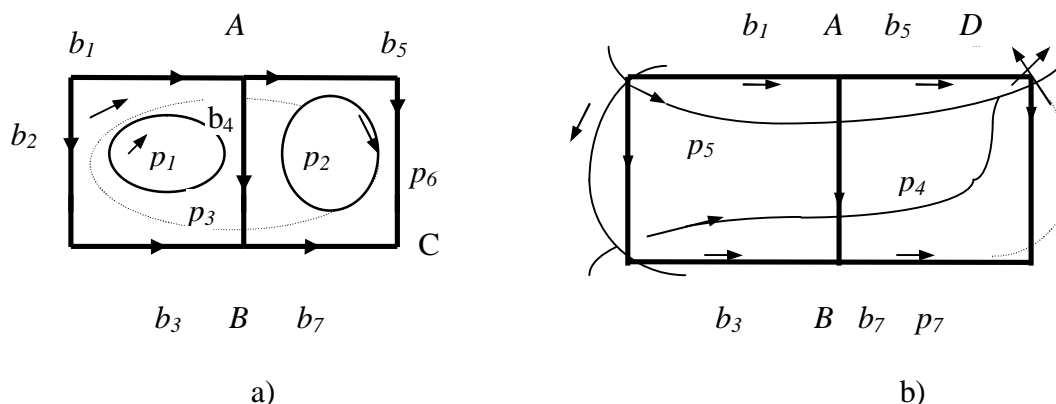
В теории графов множество ребер-ветвей (вместе со всеми подмножествами, включая пустое множество) является векторным пространством поля  $GF(2)$  – т.е. множества целых чисел с операциями сложения и умножения по модулю 2. Роль операции абелевой группы играет кольцевая сумма множеств (ребер графа), которая по отношению к двум графам  $G_1$  и  $G_2$  обозначается как  $G_1 \oplus G_2$  и представляет собой граф, порожденный на множестве ребер, которые присутствуют только в том или другом графе, но не одновременно в обоих.

Рассмотрим набор всех подмножеств путей сети (включая пустое множество,  $\emptyset$ ), которое обозначим  $P$ . В качестве операции абелевой группы будем рассматривать сложение и вычитание произвольных путей, т.е. произвольных наборов ветвей в сети.

Пути можно складывать и вычитать. Число независимых путей равно числу ветвей, т.е. размерности пространства сети (это следует из необходимости для каждой свободной ветви иметь свой путь). При этом складываются или вычитаются одинаковые ветви в соответствии с их ориентацией. Например, на рис. 2.9.a пути:  $p_1 = +b_1 - b_2 - b_3 + b_4$  и  $p_2 = -b_4 + b_5 + b_6 - b_7$  в сумме дают путь  $p_3$ , равный:

$$p_3 = +b_1 - b_2 - b_3 + b_4 - b_4 + b_5 + b_6 - b_7 = +b_1 - b_2 - b_3 + b_5 + b_6 - b_7.$$

Этот путь показан на рис. 2.9.a пунктиром, он также является замкнутым. Разность этих путей обладает более сложной конфигурацией, имея форму восьмерки, которая проходит путь  $p_1$  в прежнем направлении, а путь  $p_2$  – в обратном. Чтобы сделать это непрерывно, надо начинать обход только из узла А или узла В. Это показывает, что понятие прерывистого пути возникает из действий с непрерывными путями естественным образом.



**Рис. 2.9. Сложение и вычитание путей**

При сложении и вычитании замкнутых путей получается только замкнутый путь, хотя он может стать прерывистым и проходить более одного раза по одной и той же ветви (как на рис. 2.9a при вычитании путей). Результатом действий с разомкнутыми путями могут быть как разомкнутые, так и замкнутые пути.

На рис. 2.9.b показаны три разомкнутых пути:  $p_4 = b_3 + b_7 - b_6$ ,  $p_5 = b_1 + b_5$  и  $p_6 = +b_2$ . Если сложить пути  $p_6$  и  $p_5$ , то получим также разомкнутый путь  $p_{5,6} = p_5 + p_6 = b_1 + b_5 + b_2$ . По связываемым узлам С и D он эквивалентен пути  $p_4$ , который состоит из других ветвей, но связывает ту же пару узлов (поэтому j-пути Крон называл «пара узлов»). Если же мы сложим все три пути, то получим замкнутый путь. Он окажется равным пути  $p_3$ , если учесть, что пути  $p_4$  и  $p_6$  ориентированы противоположно этому пути т. е.:

$$p_3 = -p_4 + p_5 - p_6 = -b_3 - b_7 + b_6 + b_1 + b_5 - b_2,$$

но составляющие его пути линейно зависимы, как показано выше. Сложение и вычитание путей может давать более сложные конфигурации, например, пути прерывистые или пути с разветвлениями. Например, если на рис. 2.9.b сложить два пути:  $p_6 = b_2$  и  $p_7 = -b_6$ , то получится прерывистый путь  $p_{6,7} = p_6 + p_7 = b_2 - b_6$ .

Сложение и вычитание путей есть не арифметическая сумма чисел, а составление ветвей в одном наборе. Это отличается от кольцевой суммы множеств  $E$ , которая используется в качестве бинарной операции при построении векторного пространства графа. Ключевым моментом там является наличие обратного элемента для операции  $\oplus$ . Таким элементом является само множество ребер графа  $E_i$ , для которого  $E_i \oplus E_i = \emptyset$ , т.е. пустому множеству (Свами, 1984, с. 68). Для объединения и пересечения ребер графов обратную операцию определить нельзя.

Будем рассматривать в качестве бинарной операции  $\mathcal{Y}$  на множестве  $P$  путей в сети сложение и вычитание путей в определенном выше смысле. Свойства путей с точки зрения выполнения условий абелевой группы:

1. Любая такая сумма (или разность) произвольных наборов ветвей снова даст путь, т.е. принадлежит множеству  $P$ .
2. Результирующий путь  $p_h = (p_a + p_b) + p_c = p_a + (p_b + p_c)$  не зависит порядка, в котором составляются наборы ветвей из разных путей (ассоциативность).
3. Также результирующий путь, как набор ветвей, не зависит от последовательности, в которой составляются ветви:  $p_a + p_b = p_b + p_a$ . Этим обеспечена коммутативность.
4. Пустое множество есть отсутствие ветвей. Добавление нулевого числа ветвей к любому пути не меняет его. Это нулевой элемент  $e$ , такой, что  $p_a + e = p_a$ .
5. Для каждого пути  $p_a$  существует путь с обратной ориентацией ветвей, которые его составляют,  $(-p_a)$ , так что  $p_a + (-p_a) = e$ .

Таким образом, множество путей в сети  $P$  образует абелеву группу относительно бинарной операции сложения путей. В общем виде будем рассматривать поле целых чисел и рациональных дробей. Ограничение состоит в том, что сама ветвь является неделимым элементом сети, поэтому дроби применимы к путям в качестве коэффициентов только тогда, когда ветвь проходится число раз, кратное знаменателю дроби и часть от самой ветви не может быть результатом умножения. С учетом этого рассмотрим выполнение аксиом векторного пространства для множества путей.

Операцию умножения элемента  $\alpha$  из поля  $F$  на элемент  $p_a$  множества  $P$  определим как  $p_b = \alpha * p_a$ , т.е. такой путь, ветви которого проходятся  $\alpha$  раз. Для такого определения операции  $*$  можно убедиться, что элементы множества  $P$  удовлетворяют условиям векторного пространства, с учетом оговорок о неделимости отдельной ветви. То есть, для

любых элементов  $\alpha$  и  $\beta$  из поля рациональных чисел и любых  $p_a, p_b$  принадлежащих множеству  $P$ , выполняются равенства:

1.  $(\alpha + \beta) * p_a = (\alpha * p_a) \dot{\cup} (\beta * p_a)$  – первый закон дистрибутивности.
2.  $\alpha * (p_a + p_b) = (\alpha * p_a) \dot{\cup} (\alpha * p_b)$  – второй закон дистрибутивности.
3.  $(\alpha \times \beta) * p_a = \alpha * (\beta * p_a)$  – закон ассоциативности.
4.  $p_a = \mathbf{1} * p_a$ .

Таким образом, множество наборов ориентированных ветвей (путей) в сети  $P$  образует векторное пространство над полем целых чисел и рациональных дробей. Множества замкнутых  $P_m$  и разомкнутых  $P_j$  путей линейно не зависят друг от друга и взаимно дополняют друг друга до полного пространства путей в сети. В самом деле, любой путь либо замкнутый, либо разомкнутый и размыкание любого замкнутого пути порождает разомкнутый путь и наоборот. Сложение замкнутых путей порождает только замкнутый путь, а сложение независимых разомкнутых путей порождает только разомкнутые пути. Таким образом, каждое из этих подмножеств путей  $P_m$  и  $P_j$  замкнуто по отношению к операции  $\dot{\cup}$  сложения путей и потому они представляют собой подпространства векторного пространства путей  $P$ , такие что:

$$P_m \cup P_j = P; \text{ а } P_m \cap P_j = \emptyset.$$

Теперь можно рассматривать пути как векторы, вводить базисы, как в приведенных выше примерах, и рассматривать их свойства относительно преобразований координат, т.е. других выборов путей. В качестве базиса используются наборы линейно независимых путей, замкнутых и разомкнутых.

Два важных понятия векторного пространства – скалярное произведение и ортогональность. *Скалярное произведение* двух векторов  $p_x$  и  $p_y$ , которые имеют в данном базисе  $p_a$  компоненты  $d_x^a$  и  $d_y^a$ , такие, что  $p_x = d_x^a p_a$  и  $p_y = d_y^a p_a$  – это скаляр  $(p_x p_y)$ , определяемый суммой произведений соответствующих компонент:

$$(p_x p_y) = d_x^a * d_y^a = d_x^1 * d_y^1 + d_x^2 * d_y^2 + \dots + d_x^n * d_y^n.$$

Векторы  $p_x$  и  $p_y$  называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.  $(p_x p_y) = 0$ . Два подпространства  $S'$  и  $S''$  векторного пространства  $S$  называются ортогональными, если каждый вектор одного подпространства ортогонален любому вектору другого подпространства. Для каждого базиса  $p_a$  в конечномерном векторном пространстве существует единственный *взаимный* (или *дуальный*, *двойственный*) *базис*, который будем обозначать с верхним индексом,  $p^b$ , ( $a, b, = 1, \dots, n$ ), определяемый соотношениями:

$$(p_a p^b) = d_a^b = ( = 0, \text{ если } a \neq b; = 1, \text{ если } a = b).$$

Каждый вектор одного базиса ортогонален всем векторам с  $\alpha \neq \beta$  другого базиса; базисы равноправны. Скалярное произведение векторов базиса используют для определения так называемой *фундаментальной матрицы*  $g_{ab} = (p_a, p_b)$ , каждый элемент которой представляет собой скалярное произведение соответствующих векторов. Таким же образом для векторов двойственного (взаимного) базиса определяется обратная к матрице  $g_{\alpha\beta}$  матрица  $g^{ab} = (g_{ab})^{-1} = (p^a, p^b)$ . Эта матрица в каждой точке пространства представляет *метрический тензор*, что отличает *риманово пространство* от унитарного или аффинного пространства.

До сих пор не делалось предположений о постоянстве числа узлов в сети в процессе преобразований. Число узлов может меняться. Число независимых путей при этом постоянно, а меняется только количество замкнутых и разомкнутых путей. Уменьшение числа замкнутых путей компенсируется увеличением числа разомкнутых – и наоборот. Поэтому матрицы преобразования базисов остаются квадратными и продолжают составлять группу, включая наличие обратного элемента. Обратной к матрице преобразования при наложении соединений (уменьшении числа узлов) является матрица преобразования при введении разъединения (рост числа узлов).

При увеличении числа узлов увеличивается число разомкнутых путей и уменьшается число замкнутых путей, при уменьшении числа узлов – наоборот. Путям, которые *изменяются при изменении структуры связей*, соответствуют новые блоки в матрицах преобразования, играющие ключевую роль для расчета процессов при изменении структуры.

### 2.3.2. Ковариантность и контравариантность в пространстве путей

*При изменении базиса компоненты путей базиса и произвольного пути преобразуются по противоположным законам, как в геометрии. Матрицы преобразования компонент базиса и произвольного вектора ортогональны.*

Преобразование базисов путей описывается матрицей  $C_b^a$ , ее элементы равны коэффициентам, с которыми пути одного базиса  $p_a$  представляют пути другого –  $p_b$ .

$$p_b = C_b^a p_a. \quad (2.8)$$

Строка матрицы представляет путь нового базиса, ее элементы показывают, какие и с какой ориентацией пути старого базиса составляют новый путь. Столбцы показывают, в какие пути нового базиса входит путь старого и как ориентирован.

Если произвольный путь  $\mathbf{p}_x$  (произвольный вектор пространства путей) представить векторами некоторого базиса путей  $p_a$ , то получим:

$$\mathbf{p}_x = d^a p_a. \quad (2.9)$$

где  $d^a$  – коэффициенты разложения этого вектора по векторам базиса. Они показывают, сколько раз, и с какой ориентацией надо взять каждый из векторов базиса, чтобы получить данный вектор. Коэффициенты  $d^a$  – это *компоненты* (составляющие, координаты) вектора  $\mathbf{p}_x$  в базисе  $p_a$ . Разложение того же самого вектора  $\mathbf{p}_x$  в другом базисе  $p_b$  примет другой вид, с компонентами  $d^b$ , т.е.:

$$\mathbf{p}_x = d^b p_b, \quad (2.10)$$

где компоненты могут измениться, а вектор остается прежний. Чтобы получить закон преобразования компонент вектора при изменении базиса (системы координат), подставим в (2.10) выражение для вектора базиса из (2.8). Тогда:

$$\mathbf{p}_x = d^b p_b = d^b C_b^a p_a = d^a p_a. \quad (2.11)$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при векторах базиса  $p_a$ , получим выражение старых компонент через новые компоненты:  $d^a = d^b C_b^a$ . Матрицы преобразования путей образуют группу, потому существует обратное преобразование от нового базиса к старому базису. Тогда новые компоненты вектора выразим через старые, где через  $A_a^b$  обозначена матрица преобразования компонент вектора:

$$d^b = d^a C_a^b = C_a^b d^a = (C_b^a)^{-1} d^a = A_a^b d^a. \quad (2.12)$$

Отсюда видно, что компоненты произвольного вектора путей преобразуются по обратному закону, чем компоненты вектора базиса, а матрица  $A_a^b$  обратная и *транспонирована* по отношению к матрице преобразования базиса  $C_b^a$  в (2.8). Таким образом, это ортогональные матрицы:

$$(C_b^a)^{-1} = A_a^b. \quad (2.13)$$

Величины (геометрические объекты), которые при изменении системы координат преобразуются по тому же закону, что и векторы базиса, называются *ковариантными*, т.е. совместно изменяющимися. Величины, которые при изменении системы координат изменяются по закону, обратному закону изменения векторов базиса, называются *контравариантными*, или противоположно изменяющимися. Таким образом, компоненты векторов базиса ковариантные, а компоненты произвольного вектора – контравариантные.

В общем случае геометрический объект является функцией многих переменных, каждая из которых имеет свои компоненты в данной системе отсчета. Такой объект представляется в одной системе отсчета многомерной матрицей, число измерений которой определяется числом переменных, а порядок – размерностью пространства. Компоненты одних переменных при изменении системы координат преобразуются ковариантно, других – контравариантно. Ковариантные составляющие, которые преобразуются с помощью

матрицы  $C_b^a$ , обозначают *нижними* индексами. Контравариантные, которые преобразуются с помощью матрицы  $(C_b^a)^{-1}_t = A^b_a$  – *верхними* индексами.

Компоненты базисного пути в сети – это ковариантный объект с одной переменной. Компоненты произвольного вектора-пути – контравариантный объект с одной переменной. Матрица преобразования представляет геометрический объект, имеющий две переменных, одна из которых ковариантная, а другая – контравариантная.

Поскольку каждый путь либо замкнутый, либо разомкнутый, то матрица преобразования распадается на две части. Обозначим их, соответственно  ${}^m C_b^a$  и  ${}^j C_b^a$ , т.е. матрица преобразования компонент базиса принимает вид:

$$C_b^a = \begin{bmatrix} {}^m C_b^a & {}^j C_b^a \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Фактически матрица преобразования имеет даже более сложную блочную структуру. Дело в том, что блок, который связывает контуры и разомкнутые пути состоит из нулей, поскольку контуры можно выражать только контурами, а разомкнутые пути, представляющие контур, как показано выше, зависимы. То есть, контуры могут описывать разомкнутые пути, а разомкнутые пути не входят в описание контуров. Получим следующую матрицу в блочном виде:

$$\begin{bmatrix} {}^m C_b^a & {}^m C_b^a \\ {}^j C_b^a & {}^j C_b^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^m C_b^a & 0 \\ {}^j C_b^a & {}^j C_b^a \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

где индексы слева от основной буквы показывают, какие пути описывает данный блок.

Рассмотрим примеры преобразования путей в сети. Сначала выразим пути в базисах связанных ветвей через пути в базисе свободных ветвей, получим их матрицы преобразования. Затем получим матрицы обратного преобразования от базисов связанных ветвей к базису свободных ветвей. Затем получим матрицы преобразования одного базиса связанных ветвей в другой базис связанных ветвей и обратно. Также выразим в этих базисах компоненты произвольного вектора-пути и рассмотрим преобразование этих компонент при изменении базиса. Пусть в сети на рис. 2.10 выбраны два базиса и произвольный путь. В данной сети имеем параметры структуры:  $n = 6$ ,  $J = 4$ ,  $s = 1$ ,  $j = 3$ ,  $m = 3$ .



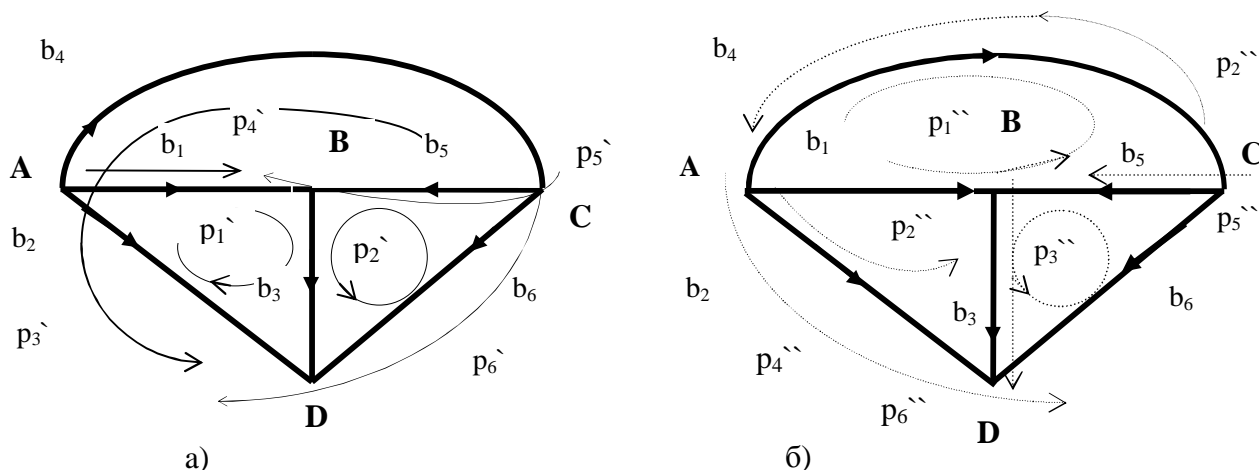


Рис. 2.10. Произвольный вектор в пространстве путей

Данная сеть состоит из ветвей, у которых заданы номера и направления. Будем считать, что базис путей в сети из свободных ветвей состоит из таких путей, номера и направления которых совпадают с номерами и направлениями самих ветвей.

Покажем, что пути базиса, и компоненты произвольного вектора-пути преобразуются противоположно в соответствии с (2.12) и (2.13), т.е. одно преобразование ковариантное, а другое контравариантное.

Пути одного базиса связанных ветвей, который обозначим  $p_\alpha'$ , показаны тонкими линиями на рис. 2.10.а; пути другого,  $p_\beta''$ , показаны пунктиром на рис. 2.10.б. Каждый базис путей связанных ветвей выражается через пути свободных ветвей, вместо которых запишем просто сами ветви, с которыми данные пути совпадают:

$$\begin{array}{ll}
 p_1' = +b_1 - b_2 + b_3 & p_1'' = +b_1 - b_4 - b_5 \\
 p_2' = +b_3 + b_5 - b_6 & p_2'' = +b_2 - b_3 - b_4 - b_5 \\
 p_3' = +b_2 - b_4 - b_6 & p_3'' = +b_3 + b_5 - b_6 \\
 p_4' = +b_1 & p_4'' = +b_2 \\
 p_5' = +b_5 & p_5'' = +b_5 \\
 p_6' = +b_6 & p_6'' = +b_3
 \end{array}$$

Или эти соотношения можно записать через матрицы коэффициентов при отдельных ветвях в соответствии с (2.8), т.е. матрицы преобразования путей в свободных ветвях (они совпадают с ветвями) в пути базисов в связанной сети:

$$p_a' = C_a^0 p_0 \quad p_b'' = C_b^0 p_0$$

где  $p_0 = b_a$  – базис простейших путей в свободных ветвях. Компоненты обоих базисов записываются как вектор-столбец. Матрицы преобразования,  $C_a^0$  и  $C_b^0$ , элементы которых

представляют компоненты базиса путей связанных ветвей через пути в свободных ветвях для данного выбора базисов,  $p_{\alpha}$  и  $p_{\beta}$ , имеют следующий вид:

$$\begin{array}{c}
 \alpha \setminus 0 \\
 \begin{array}{cccccc}
 p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & p_4^0 & p_5^0 & p_6^0 \\
 p_1^{\setminus} & 1 & -1 & 1 & & & m \\
 p_2^{\setminus} & & & 1 & & 1 & -1 & m \\
 p_3^{\setminus} & & 1 & & -1 & & -1 & m \\
 C_a^0 = p_4^{\setminus} & 1 & & & & & & j \\
 p_5^{\setminus} & & & & & 1 & & j \\
 p_6^{\setminus} & & & & & & & 1 & j
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \beta \setminus 0 \\
 \begin{array}{cccccc}
 p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & p_4^0 & p_5^0 & p_6^0 \\
 p_1^{\setminus\setminus} & 1 & & & -1 & -1 & & m \\
 p_2^{\setminus\setminus} & & 1 & -1 & -1 & -1 & & m \\
 p_3^{\setminus\setminus} & & & 1 & & 1 & -1 & m \\
 C_b^0 = p_4^{\setminus\setminus} & & 1 & & & & & j \\
 p_5^{\setminus\setminus} & & & & & & 1 & j \\
 p_6^{\setminus\setminus} & & & 1 & & & & j
 \end{array}
 \end{array}$$

Буквы обозначают:  $m$  – замкнутые пути, а  $j$  – разомкнутые пути. Выражение компонент базиса связанных ветвей, например,  $p_{a^{\setminus}}$  через матрицу преобразования  $C_a^0$  и компоненты базиса путей свободных ветвей  $p_0$  в полном виде можно записать так  $p_{a^{\setminus}} = C_a^0 p_0$ :

$$\begin{array}{|c|} \hline p_1^{\setminus} \\ \hline p_2^{\setminus} \\ \hline p_3^{\setminus} \\ \hline p_4^{\setminus} \\ \hline p_5^{\setminus} \\ \hline p_6^{\setminus} \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 1^{\setminus} & 1 & -1 & 1 & & & \\
 2^{\setminus} & & & 1 & & 1 & -1 \\
 3^{\setminus} & & 1 & & -1 & & -1 \\
 4^{\setminus} & 1 & & & & & \\
 5^{\setminus} & & & & & 1 & \\
 6^{\setminus} & & & & & & 1
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{|c|} \hline p_1^0 \\ \hline p_2^0 \\ \hline p_3^0 \\ \hline p_4^0 \\ \hline p_5^0 \\ \hline p_6^0 \\ \hline \end{array}$$

Далее выразим ветви, точнее пути в базисе свободных ветвей, через пути соответствующих базисов в сети связанных ветвей, тогда получим матрицы обратных преобразований. Можно проверить, что эти матрицы обратные, т.е. что

- для базиса  $p_{\alpha}$  выполняется  $C_a^0 A_0^{a_t} = I$
- для базиса  $p_{\beta}$  выполняется  $C_b^0 A_0^{b_t} = I$

Здесь  $I$  – единичная матрица. Матрицы обратных преобразований для двух базисов имеют следующий вид:

$$\begin{array}{c}
 p_0 \setminus p_{a^{\setminus}} \quad p_0 = A_0^{a_t} p_{a^{\setminus}} = (C_a^0)^{-1} p_{a^{\setminus}} \\
 \begin{array}{cccccc}
 p_1^0 & & & & 1 & & \\
 p_2^0 & -1 & 1 & & 1 & -1 & 1 \\
 p_3^0 & & 1 & & & -1 & 1 \\
 A_0^{a_t} = p_4^0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\
 p_5^0 & & & & & 1 & \\
 p_6^0 & & & & & & 1 \\
 m & m & m & j & j & j
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 p_0 \setminus p_{b^{\setminus\setminus}} \quad p_0 = A_0^{b_t} p_{b^{\setminus\setminus}} = (C_b^0)^{-1} p_{b^{\setminus\setminus}} \\
 \begin{array}{cccccc}
 p_1^0 & 1 & -1 & & 1 & & -1 \\
 p_2^0 & & & & 1 & & \\
 p_3^0 & & & & & & 1 \\
 A_0^{b_t} = p_4^0 & & -1 & & 1 & -1 & -1 \\
 p_5^0 & & & & & 1 & \\
 p_6^0 & & & -1 & & 1 & 1 \\
 m & m & m & j & j & j
 \end{array}
 \end{array}$$

Таким образом, получены прямые и обратные матрицы преобразования от свободных ветвей к двум вариантам выбора базисов связанных ветвей и обратно. При этом:

- матрицы  $C_a^0$  преобразуют пути свободных ветвей в пути связанных ветвей
- матрицы  $A_0^a$  преобразуют пути связанных ветвей в пути свободных ветвей.

Мы сразу записываем здесь матрицу обратного преобразования как  $A_0^a$ , т.е. как транспонированную. Это потому, что сама матрица  $A_0^a$  не только преобразует компоненты произвольного вектора, как показано выше, но и является матрицей преобразования взаимного базиса путей, обеспечивая расчет откликов в сети на внешние воздействия. Кроме того, она является матрицей преобразования прямого базиса путей  $\underline{C}_a^0 = A_0^a$  в двойственной сети. Таким образом, подматрицы преобразования замкнутых и разомкнутых путей, которые мы введем далее, являются ключевыми элементами алгоритмов расчета изменения процессов при изменении структуры сетей.

В заданной сети подматрицы для замкнутых  ${}^m C$  и разомкнутых  ${}^j A$  путей играют роль:

${}^m C$  – расчет откликов на источники воздействия внутри сети (аналог источников напряжения в электрической цепи). Такая сеть является моделью для замкнутых систем.

${}^j A$  – расчет откликов на внешние источники воздействия сети (аналог источников тока в электрической цепи). Такая сеть является моделью для открытых систем.

В двойственной сети соответствующие подматрицы играют роль:

${}^m \underline{C} = {}^j A$  – расчет откликов на источники воздействия внутри двойственной сети (аналог источников напряжения в электрической цепи). Двойственная модель для замкнутых систем.

${}^j \underline{A} = {}^m C$  – расчет откликов в двойственной сети на внешние источники воздействия (аналог источников тока в электрической цепи). Двойственная модель для открытых систем.

Обратное преобразование позволяет, как и раньше, выразить пути одного базиса связанных ветвей через пути другого базиса, подставляя вместо ветвей, составляющих путь в  $r_\alpha$ , их выражение через пути в базисе  $r_\beta$  и наоборот. Тогда получим матрицы преобразования базисов, по формулам, аналогичным формуле выражения компонент одного базиса через компоненты другого базиса (2.8). В данном случае, если вместо вектора базиса путей в свободных ветвях  $r_0$  подставить матрицы обратного преобразования, то выражения векторов одного базиса путей через другой базис путей имеют вид:

$$r_b = C_b^0 r_0 = C_b^0 A_0^a r_a = C_b^a r_a;$$

$$r_a = (C_b^a)^{-1} r_b = C_a^b r_b$$

Матрицы преобразования путей базиса  $r_a$  в базис  $r_b$  – матрицу  $C_b^a$  и матрицу обратного преобразования  $C_a^b$ , можно получить перемножением матриц преобразования от свободных путей к связанным путям, и обратно. Либо можно использовать обращение матрицы, если известна одна из матриц преобразования между двумя базисами, как во второй формуле. Следует учесть, что, согласно правилам действий с индексами,  $C_b^a = (C_a^b)^{-1}$  или  $C_b^a C_a^b = I$ .

Матрицы преобразования имеют блочный вид, соответствующий (2.15), т.е. с нулевым блоком выражения замкнутых путей через разомкнутые пути:

$$\begin{array}{c}
 \beta \\
 \alpha \\
 \begin{array}{c}
 p_1^{\backslash} \\
 p_2^{\backslash} \\
 p_3^{\backslash} \\
 p_4^{\backslash} \\
 p_5^{\backslash} \\
 p_6^{\backslash}
 \end{array}
 \end{array}
 C_b^a =
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & p_1^{\backslash} & p_2^{\backslash} & p_3^{\backslash} & p_4^{\backslash} & p_5^{\backslash} & p_6^{\backslash} \\
 \hline
 p_1^{\backslash} & 1 & -1 & 1 & & & \\
 p_2^{\backslash} & & -1 & 1 & & & \\
 p_3^{\backslash} & & 1 & & & & \\
 p_4^{\backslash} & -1 & 1 & & 1 & -1 & 1 \\
 p_5^{\backslash} & & & & & 1 & \\
 p_6^{\backslash} & & 1 & & & -1 & 1 \\
 \hline
 & m & m & m & j & j & j
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \beta \\
 a \\
 \begin{array}{c}
 p_1^{\backslash} \\
 p_2^{\backslash} \\
 p_3^{\backslash} \\
 p_4^{\backslash} \\
 p_5^{\backslash} \\
 p_6^{\backslash}
 \end{array}
 \end{array}
 C_a^b =
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & p_1^{\backslash} & p_2^{\backslash} & p_3^{\backslash} & p_4^{\backslash} & p_5^{\backslash} & p_6^{\backslash} \\
 \hline
 p_1^{\backslash} & 1 & -1 & & & & \\
 p_2^{\backslash} & & & 1 & & & \\
 p_3^{\backslash} & & 1 & 1 & & & \\
 p_4^{\backslash} & 1 & -1 & & 1 & & -1 \\
 p_5^{\backslash} & & & & & 1 & \\
 p_6^{\backslash} & & & -1 & & 1 & 1 \\
 \hline
 & m & m & m & j & j & j
 \end{array}
 \tag{2.16}$$

Такой же нулевой блок есть и в матрицах преобразования от базисов свободных ветвей к базисам связанных ветвей, и наоборот. Однако там для выделения такого блока надо выделить свободные ветви, которые в связанной сети будут рассматриваться как «определяющие» замкнутый путь, или разомкнутый путь.

В каждом случае формулы преобразования одного базиса путей в другой базис имеют ковариантный характер, т.е. вектор базиса умножается на саму матрицу преобразования. Это естественно, поскольку именно преобразование вектора базиса является «эталоном» для сравнения формул преобразования других объектов при изменении системы координат.

**Произвольный вектор-путь.** Теперь рассмотрим произвольные векторы-пути данного пространства, т.е. пути, которые не входят ни в один из базисов; сначала замкнутый путь, потом разомкнутый путь. Выразим компоненты произвольного пути (вектора данного пространства) в каждом из базисов, и перейдем от координат в одном базисе к координатам в другом, используя полученные матрицы преобразования  $C_b^a$  и  $C_a^b$ .

В качестве *первого примера* рассмотрим произвольный вектор, который обозначим  ${}^m p_x$ , (где индекс  $m$  означает, что это замкнутый путь, контур, а индекс  $x$  – что это произвольный путь, в отличие от путей базиса  $p_\alpha$ , где  $\alpha$  означает набор путей). Пусть этот путь в сети на рис. 2.10 состоит из ветвей:

$${}^m p_x = d_x^0 p_0 = -1 b_1 + 0 b_2 - 1 b_3 + 1 b_4 + 0 b_5 + 1 b_6. \tag{2.17}$$

Это показывает состав и ориентацию ветвей данного пути; коэффициенты  $d_x^0$  – это компоненты данного вектора  ${}^m p_x$  в базисе отдельных, свободных ветвей  $p_0$ .

Подставив выражения ветвей (совпадающих по составу и направлению с путями свободных ветвей) через пути первого базиса, получим разложение вектора  ${}^m p_x$  в базисе  $p_\alpha$ :

$${}^m p_x = d_x^a p_a = -1 p_1^{\backslash} + 0 p_2^{\backslash} - 1 p_3^{\backslash} + 0 p_4^{\backslash} + 0 p_5^{\backslash} + 0 p_6^{\backslash} = -p_1^{\backslash} - p_3^{\backslash}.$$

Это же самое можно иначе записать через матрицу преобразования от свободных ветвей к связанной сети. Однако при этом необходимо учесть, что компоненты

произвольного вектора имеют контравариантный закон преобразования, т.е. преобразуются противоположно преобразованию компонент вектора-базиса.

Следовательно, в соответствии с (2.12), для преобразования компонент вектора  ${}^m\mathbf{p}_x$  в базисе  $p_0$  в его компоненты  $d_x^a$  в базисе  $p_a$  необходимо умножить  $d_x^0$  на ортогональную матрицу  $(C_a^0)^{-1}_t = A_0^a$ . Кроме того, необходимо учесть, что компоненты вектора-базиса представлены столбцом, а коэффициенты произвольного вектора в этом базисе представлены строкой. Поэтому матрица  $A_0^a$  транспонирована. Тогда получим

$$d_x^a = d_x^0 (C_a^0)^{-1} = A_0^a d_x^0 =$$

	$p_1^0$	$p_2^0$	$p_3^0$	$p_4^0$	$p_5^0$	$p_6^0$					
$p_1^`$		-1		-1			$m$	$p_1^0$	-1	$p_1^`$	-1
$p_2^`$		1	1	1			$m$	$p_2^0$		$p_2^`$	
$p_3^`$				-1			$m$	$p_3^0$	-1	$p_3^`$	-1
$p_4^`$	1	1		1			$j$	$p_4^0$	1	$p_4^`$	
$p_5^`$		-1	-1	-1	1		$j$	$p_5^0$		$p_5^`$	
$p_6^`$		1	1			1	$j$	$p_6^0$	1	$p_6^`$	

Этим и отличается преобразование компонент произвольного вектора-пути от преобразования компонент вектора-базиса. Таким образом, компоненты произвольного вектора-пути преобразуются по контравариантному закону относительно преобразования компонент вектора-базиса.

Подставляя вместо ветвей пути второго базиса  $p_b$ , получим разложение и для него:

$${}^m\mathbf{p}_x = d_x^b p_b = -p_1^`` - p_3^``,$$

что в данном случае совпадает с разложением по базису  $p_\alpha$ . Это можно получить из (2.12) с помощью матриц преобразования базисов. Для этого компоненты произвольного вектора-пути во втором базисе выразим через компоненты вектора-пути в первом базисе, используя матрицы преобразования базисов (2.16):

$$d_x^b = d_x^a (C_b^a)^{-1} = C_b^a d_x^a = (C_a^b)_t d_x^a = \tag{2.18}$$

	$p_1^`$	$p_2^`$	$p_3^`$	$p_4^`$	$p_5^`$	$p_6^`$						
$p_1^``$	1			1			$m$	$p_1^`$	-1	$p_1^``$	-1	$m$
$p_2^``$	-1		1	-1			$m$	$p_2^`$		$p_2^``$		$m$
$p_3^``$		1	1			-1	$m$	$p_3^`$	-1	$p_3^``$	-1	$m$
$p_4^``$				1			$j$	$p_4^`$		$p_4^``$		$j$
$p_5^``$					1	1	$j$	$p_5^`$		$p_5^``$		$j$
$p_6^``$				-1		1	$j$	$p_6^`$		$p_6^``$		$j$

Отсюда также видим, что компоненты разложения произвольного вектора  ${}^m\mathbf{p}_x$  по двум базисам  $p_b$  и  $p_a$  в данном случае совпадают. Строго говоря, здесь компоненты  $d_x^b$  следует писать как транспонированные, т.е. как  $(d_x^b)_t$ , поскольку в исходном разложении вектора  ${}^m\mathbf{p}_x$

по векторам базиса компоненты составляют строку, а здесь они становятся столбцом. Это касается и компонент в первом базисе, которые следует в соответствии с правилами алгебры матриц писать в данном случае как  $(d_x^a)_t$ , т.е. как вектор-строку. Напомним, что для матриц  $A$  и  $B$  (а вектор есть одномерная матрица) существует правило транспонирования:

$$(A B)_t = B_t A_t$$

Таким образом, получили преобразование компонент произвольного вектора-пути с помощью матрицы преобразования путей базиса. Контурные выражаются друг через друга без участия разомкнутых путей. Разомкнутые пути сложной конфигурации могут выражаться как через разомкнутые пути, так и через замкнутые пути. По этой причине матрица преобразования базисов не распадается на два независимых диагональных блока – один для замкнутых, а другой – для разомкнутых путей, а есть блок, связывающий их. Разделение блоков  $m$  и  $j$  путей показано двойными линиями в (2.16).

В качестве *второго примера* рассмотрим преобразование компонент разомкнутого пути, который обозначим как  ${}^j p_y$ . Пусть этот путь состоит из ветвей:

$${}^j p_y = + b_2 - b_3 + b_5 = + 0 b_1 + 1 b_2 - 1 b_3 + 0 b_4 + 1 b_5 + 0 b_6. \quad (2.19)$$

Это разложение вектора  ${}^j p_y$  по векторам базиса свободных ветвей. Направление в  $b_5$  задано противоположно движению по ветвям  $b_2$  и  $b_3$ , чтобы показать возможность произвольного выбора состава ветвей. Разложение вектора  ${}^j p_y$  по векторам всех выбранных базисов можно представить формулой:

$${}^j p_y = d_y^0 p_0 = d_y^a p_a = d_y^b p_b,$$

где компоненты данного вектора в базисе свободных ветвей имеют вид:

$$d_y^0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & p_4^0 & p_5^0 & p_6^0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Подставив в (2.19) выражения ветвей (совпадающих по составу и направлению с путями свободных ветвей) через пути первого базиса  $p_\alpha$ , получим разложение вектора  ${}^j p_y$  в этом базисе:

$${}^j p_y = d_y^a p_a = b_2 - b_3 + b_5 = -1 p_1^` + 0 p_2^` + 0 p_3^` + 1 p_4^` + 1 p_5^` + 0 p_6^`, \quad (2.20)$$

таким образом, компоненты  $d_y^a = A_0^a d_y^0$  имеют вид строки:

$$d_y^a = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline p_1^` & p_2^` & p_3^` & p_4^` & p_5^` & p_6^` \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Запишем это через матрицу преобразования компонент вектора от свободных ветвей к связанным ветвям. В данном случае эта матрица уже получена как транспонированная матрица обратного преобразования  $A_0^a$  путей первого базиса  $p_\alpha^`$  на рис. 2.10.а.

$$d_y^a = d_y^0 (A^a_0)_i = A^a_0 d_y^0 =$$

$$= \begin{matrix} \alpha \\ 0 \\ \begin{matrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & p_4^0 & p_5^0 & p_6^0 \\ p_1^{\setminus} & & -1 & & -1 & & \\ p_2^{\setminus} & & 1 & 1 & 1 & & \\ p_3^{\setminus} & & & & & -1 & \\ p_4^{\setminus} & 1 & 1 & & 1 & & \\ p_5^{\setminus} & & -1 & -1 & -1 & 1 & \\ p_6^{\setminus} & & 1 & 1 & & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ j \\ j \\ j \end{matrix} \times \begin{matrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \end{matrix} = \begin{matrix} p_1^{\setminus} \\ p_2^{\setminus} \\ p_3^{\setminus} \\ p_4^{\setminus} \\ p_5^{\setminus} \\ p_6^{\setminus} \end{matrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ 1 \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ j \\ j \\ j \end{matrix}$$

Если теперь разложим вектор  $^j p_y$  по векторам базиса  $p_\beta$ , то получим, аналогично, его компоненты преобразованием компонент вектора в путях свободных ветвей:

$$^j p_y = d_y^b p_b = +0 p_1^{\setminus} + 0 p_2^{\setminus} + 0 p_3^{\setminus} + 1 p_4^{\setminus} + 1 p_5^{\setminus} - 1 p_6^{\setminus} = d_y^0 p_0,$$

таким образом, компоненты  $d_y^\beta$  заданного вектора в базисе путей связанной сети  $p_\beta$  имеют вид строки:

$$d_y^b = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Это можно также записать через матрицу преобразования компонент от свободных ветвей к связанной сети, представляя компоненты как вектор-столбец:

$$d_y^b = A^b_0 d_y^0 = \tag{2.21}$$

$$= \begin{matrix} \beta \\ 0 \\ \begin{matrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & p_4^0 & p_5^0 & p_6^0 \\ p_1^{\setminus\setminus} & 1 & & & & & \\ p_2^{\setminus\setminus} & -1 & & & -1 & & \\ p_3^{\setminus\setminus} & & & & & & -1 \\ p_4^{\setminus\setminus} & 1 & 1 & & 1 & & \\ p_5^{\setminus\setminus} & & & & -1 & 1 & 1 \\ p_6^{\setminus\setminus} & -1 & & 1 & -1 & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ j \\ j \\ j \end{matrix} \times \begin{matrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \end{matrix} = \begin{matrix} p_1^{\setminus\setminus} \\ p_2^{\setminus\setminus} \\ p_3^{\setminus\setminus} \\ p_4^{\setminus\setminus} \\ p_5^{\setminus\setminus} \\ p_6^{\setminus\setminus} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ j \\ j \\ j \end{matrix}$$

Далее получим компоненты  $d_y^a$  в первом базисе из координат  $d_y^b$  во втором базисе с помощью матрицы преобразования  $C_b^a$  по формуле (2.12):

$$d_y^a = d_y^b C_b^a =$$

$$= \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} \beta \\ \alpha \\ \begin{matrix} p_1^{\setminus} & p_2^{\setminus} & p_3^{\setminus} & p_4^{\setminus} & p_5^{\setminus} & p_6^{\setminus} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & & & \\ 2 & & -1 & 1 & & & \\ 3 & & 1 & & & & \\ 4 & -1 & 1 & & 1 & -1 & 1 \\ 5 & & & & & 1 & \\ 6 & & 1 & & & -1 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ j \\ j \\ j \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} -1 & & & 1 & 1 & \end{matrix} \end{matrix}$$

При этом получен тот же результат, что и при разложении  $^j p_y$  по векторам базиса  $p_a$  в (2.20), с точностью до транспонирования. В базисе  $p_a$  компонентами произвольного вектора-пути  $^j p_y$  оказались как разомкнутые пути  $p_4$  и  $p_5$ , так и замкнутый путь  $p_1$ . Таким образом,

контуры можно представить только независимыми контурами, а разомкнутые пути – разомкнутыми путями и замкнутыми путями (контурами). В базисе  $p_b$  компонентами произвольного вектора-пути  $j_p$  оказались только разомкнутые пути  $p_4$ ,  $p_5$  и  $p_6$ .

Такое неравноправие замкнутых и разомкнутых путей приводит к асимметрии в матрице преобразования путей, где один блок, как было показано, оказывается нулевым. А именно, блок, где разомкнутые пути выражаются через замкнутые пути. Как будет показано далее, именно это обстоятельство является основой расчета сетей при изменении структуры, в частности, для расчета сетей, сетевых моделей систем по частям без итераций. По сути, это ключевой момент исследования сложных систем по частям – диакоптики. Философские проблемы части и целого получают, таким образом, некоторое новое освещение из поведения замкнутых и разомкнутых путей при соединении целого (связанной сети) из частей (свободных ветвей), или при разделении целого на части. Однако поведение замкнутых и разомкнутых путей имеет значение и при изменении соединений внутри целого, без его разделения на части.

Вместе с тем, как было показано выше, на рис. 2.1, с точки зрения проективной геометрии все пути замкнутые, поскольку разомкнутые пути замкнуты на бесконечности несобственными элементами. Таким образом, получается, что замкнутые пути, состоящие из собственных элементов, не могут представлять разомкнутые пути, в состав которых входят несобственные элементы. Бесконечность нельзя представить конечными понятиями. Однако также было показано, что бесконечно удаленный несобственный элемент можно заменить бесконечно близким элементом, но расположенным в другом измерении, вне плоскости расположения данного одномерного пути. Все элементы двойственных сетей как раз и располагаются в другом измерении.

### **2.3.3. Преобразование путей и хромосомы**

Поведение замкнутых и разомкнутых путей в процессе изменения структуры имеет аналогии с поведением половых хромосом в процессе размножения. Напомним, что хромосомы – это структурные элементы клеточного ядра, являющиеся носителями генов, в которых закодирована наследственная информация. Обладая способностью к самовоспроизведению, хромосомы обеспечивают генетическую связь поколений (КМЭ, т. 3, с. 318). Всего в нормальном наборе человека 22 пары хромосом, идентичных по размерам, форме и составу генов (одна от отца, а другая от матери), и одна пара половых хромосом. Женский пол определяется наличием двух X-хромосом, а мужской – одной X-хромосомой и одной Y-хромосомой. В женских клетках одна из X-хромосом генетически неактивна. Вторая X-хромосома при соединении с X-хромосомой отца дает женский пол, а при соединении с Y-хромосомой отца дает мужской пол.



С биологической точки зрения поведение женского пола более похоже на поведение замкнутой системы, которая ориентирована на сохранение, «поддержание очага». Женские X-хромосомы дают только женский пол, подобно тому, как замкнутые пути могут выражать только замкнутые пути. В этом смысле поведение женского пола в большей степени может характеризовать базис замкнутых путей, определяющий внутреннее воздействие в системе, соответствующее замкнутой системе, которая в этом отношении в наименьшей степени ориентирована на взаимодействие с внешним миром.

Поведение мужского пола более похоже на поведение разомкнутой, открытой системы. Это риск при взаимодействии с внешней средой, это поиск источников существования, «добыча». Поведение мужского пола в большей степени может характеризовать базис разомкнутых путей, определяющий внешнее воздействие на систему и воздействие самой системы на внешнюю среду.

Мужские X-хромосомы и Y-хромосомы, в соединении с женской X-хромосомой, дают как женский пол, так и мужской пол, подобно тому, как разомкнутые пути могут выражаться как замкнутыми путями, так и разомкнутыми путями. Выше показано, что замкнутые пути могут породить (и представлять) только замкнутые пути, а разомкнутые пути – как разомкнутые пути, так и замкнутые пути.

Схематически аналогии в поведении замкнутых и разомкнутых путей при изменении структуры и X, Y хромосом при размножении представлены в таблице.

Соединяемые элементы структуры		Результат соединения	Тип полученной сети или системы (организма)
Замкнутые пути	Разомкнутые пути	Разомкнутые пути	Базис сети с внешним воздействием, открытая система
X хромосомы	Y хромосомы	X-Y хромосомы	Мужской пол
Замкнутые пути	Замкнутые пути	Замкнутые пути	Базис сети с внутренним воздействием, замкнутая система
X хромосомы	X хромосомы	X-X хромосомы	Женский пол

Таким образом, мужской и женский пол являются двойственными по отношению друг к другу в таком обобщенном структурном отношении. Сеть, как двойственная структура, представлена совокупностью замкнутых и разомкнутых путей, дополняющих друг друга до полного описания сети. Подобно двойственным сетям, мужской и женский пол (как открытая система и замкнутая система) дополняют друг друга до единого целого. Это обеспечивает процессы размножения и дальнейшее развитие всей биологической системы. Самоудвоение и закономерное распределение хромосом по дочерним клеткам при клеточном

делении обеспечивает передачу наследственных свойств организма от поколения к поколению.

Интересно отметить, что численный состав набора из 22 пар хромосом и пары половых хромосом можно записать как:  $23 = 22 + 1 = 11 + 11 + 1$ . Этих наборов два, т.е. всего 46 хромосом, в которых в линейном порядке расположены гены:  $(11 + 11 + 1) + (11 + 11 + 1)$ . Таким образом, численной основой набора хромосом человека является «сдвоенная» единица – в виде простого числа 11, состоящего из двух единиц, или простого числа 1, которое дополняет другое число 1. Полный (один) набор хромосом также представляет простое число 23. Везде присутствует второй набор хромосом, представляющий второй из соединяемых полов, двойственным образом дополняющий набор хромосом до целого, равного 46. Вместе они составляют четное число.

Сеть, как совокупность данной и двойственной сети, обладает двойным набором ветвей, а замкнутые и разомкнутые пути в двойственных сетях при изменении структуры ведут себя взаимно дополнительным образом.

Двойственное дополнение двух сетей до единого целого, которое обладает инвариантными свойствами преобразования структуры, имеет, как можно видеть, некоторые аналогии с двойственным дополнением хромосом при размножении, но только аналогии. Дело в том, что законы преобразования структуры сетей, даже с учетом свойств двойственности и инвариантности, не предполагают, не содержат в себе элементов развития, умножения, которое присуще живым системам.

Вместе с тем в главе 5 рассмотрена модель межотраслевого баланса в экономике с помощью электрической цепи. Техническая система, такая как электрическая цепь, только рассеивает потоки энергии, и не может обладать свойствами живой системы, такой как экономика, которая не только рассеивает потоки энергии, но и накапливает свободную энергию, которая и лежит в основе размножения и развития. Однако использование законов двойственности, соединение описания структуры и процессов в едином системном подходе, позволило не только представить потоки продуктов с помощью комбинации контурных и узловых токов. Оказалось, что также возможно представить аналоги финансовых потоков с помощью комбинации контурных и узловых напряжений, т.е. представить вместе основные свойства экономической системы. Таким образом, показано, что свойства структуры, двойственности позволяют перекинуть аналитический «мостик» между неживыми и живыми системами, что открывает некоторые новые возможности для моделирования и исследования. Для технических систем, как искусственных объектов, разработаны методы моделирования, расчета, анализа, которые можно теперь по аналогии применять для систем, обладающих свойствами накопления свободной энергии и развития.

Итак, в данном разделе показано, что вектор базиса путей преобразуется по ковариантному закону при изменении системы координат (выборе путей), а компоненты произвольного вектора-пути преобразуются контравариантному закону, т.е. противоположно по отношению к векторам базиса.

Далее рассмотрим двойственные сети.

## 2.4. Двойственные сети

Двойственность является объективным свойством сетей, которое обеспечивает возможность преобразования структуры, изменения соединения ветвей, что особенно важно при изменении числа узлов (в терминах графов – вершин). При изменении количества узлов в сети меняется количество независимых контуров (замкнутых путей), одновременно противоположным образом меняется количество разомкнутых путей, т.е. меняется размерность соответствующих подпространств. Здесь и далее используются в качестве координат непрерывные пути, т.е. пути без ветвлений и разрывов. В конце раздела 2.2.1 говорилось о том, почему при расчете в сети откликов на воздействия, т.е. параметров протекающих процессов, необходимо использовать непрерывные пути.

Изменение базисов при изменении выбора путей или изменении структуры ветвей представляют матрицы преобразования. В результате таких изменений появляются новые элементы в матрицах преобразования. Независимые замкнутые и разомкнутые пути по-разному представляют ветви в сети:

- замкнутые пути охватывают все ветви в матрице преобразования  ${}^mC$ ,
- разомкнутые пути дают пары узлов, связываемые ветвями в матрице  ${}^jA$ .

По этой причине замкнутые пути образуют прямой базис, а разомкнутые пути образуют взаимный базис в пространстве сети. В двойственной сети изменение путей базиса представляют те же матрицы преобразования, что в исходной сети, но они меняются местами. При изменении структуры в двух двойственных сетях остаются постоянными следующие параметры (инварианты):

- сумма количества ветвей в двух сетях,
- сумма количества независимых замкнутых путей,
- сумма количества независимых разомкнутых путей,
- сумма количества узлов,
- сумма модулей степеней узлов.

Сумма модулей степеней узлов определяет взаимную ориентацию ветвей и ортогональность матриц преобразования двойственных сетей.

### 2.4.1. Преобразование путей при изменении структуры

В примерах преобразования от одного базиса путей к другому, которые рассмотрены в предыдущих разделах, граф сети не менялся. Вместе с тем сеть (как набор ветвей) не меняется и при изменении соединения ветвей (структуры), даже если меняется число узлов, поскольку не меняется размерность векторного пространства путей, определяемая ветвями-измерениями. Таким образом, сеть не меняется, даже когда меняется граф, соответствующий данному набору ветвей. В этом отношении сеть можно рассматривать как тензорный объект,

а разные структуры соединения элементов – как «проекции» этого объекта в разные системы координат. Изменения в структуре есть переход к другой системе координат, а общее число независимых путей базиса (замкнутых и разомкнутых) не меняется. Однако при изменении количества узлов, подсетей, может измениться число замкнутых и число разомкнутых независимых путей. Например, замкнутых путей станет меньше, соответственно, разомкнутых станет больше. Или наоборот.

С помощью матриц преобразования базисов путей можно получить изменение значений компонент заданного геометрического объекта, (например, произвольного вектора пути) при изменении структуры сети. Формулы преобразования некоторых геометрических объектов, в частности, векторов базисов путей, произвольного вектора пути уже получены в предыдущем разделе. Изменение компонент объектов вызывает изменение элементов матриц преобразования, обусловленное изменением числа и состава связываемых ими замкнутых и разомкнутых путей.

Каждое размыкание (разъединение узлов) уничтожает замкнутый путь и порождает разомкнутый путь. Каждое замыкание (соединение узлов), наоборот, уничтожает разомкнутый путь и порождает контур, замкнутый путь. Контур в сети не может состоять из одной ветви (если это не петля, которая представляет собой отдельную подсеть), поэтому *набор ветвей, составляющих контур, может изменяться* при изменении структуры сети. Тогда в матрице преобразования, помимо блоков  $m$ -путей и  $j$ -путей, *можно выделить блок (или блоки) изменяемых путей*, представленных строками или столбцами, в которых при изменении структуры появляются или исчезают элементы. Такие блоки играют ключевую роль в расчете сетей при изменении структуры, расчете сетей по частям.

Рассмотрим пример преобразования базисов и координат произвольного вектора пути при изменении структуры сети. В качестве исходной возьмем сеть на рис. 2.5, в которой узел, который обозначен как  $C$  разделен на два узла: узел  $C^{\wedge}$  и узел  $C^{\backslash}$ , а затем замкнут начальным концом ветви  $b_3$ , отделенным от узла  $B$ , так что получается прямоугольник. Это преобразование структуры сети представлено на рис. 2.11, где процедура изменения соединения показана тонкими линиями между рисунками а) и б).

Выбор путей базиса,  $p_a^{\wedge}$ , показан для сети на рис. 2.11.а. Эту же конфигурацию путей,  $p_b^{\backslash}$ , пытаемся сохранить для новой сети на рис. 2.11.б; *однако теперь это оказывается структурно невозможно*. Проблема не в том, что путь  $p_2^{\backslash}$  стал не только разомкнутым, но и прерывистым, а в том, что путь  $p_1^{\wedge}$  теперь должен иметь на одну ветвь больше, чтобы оставаться замкнутым. Однако, поскольку никаких предположений относительно числа узлов до сих пор не делалось, то должно сохраняться как взаимно обратное преобразование между базисами в двух сетях (точнее, в разных структурах соединения ветвей одной и той же

сети), так и преобразование произвольного вектора-пути. При таком изменении структуры число независимых замкнутых путей уменьшилось с 2 до 1, а число независимых разомкнутых путей увеличилось с 2 до 3. Соответственно изменилась и размерность подпространств этих путей, при этом полная размерность пространства данной сети постоянная, и осталась равна 4.

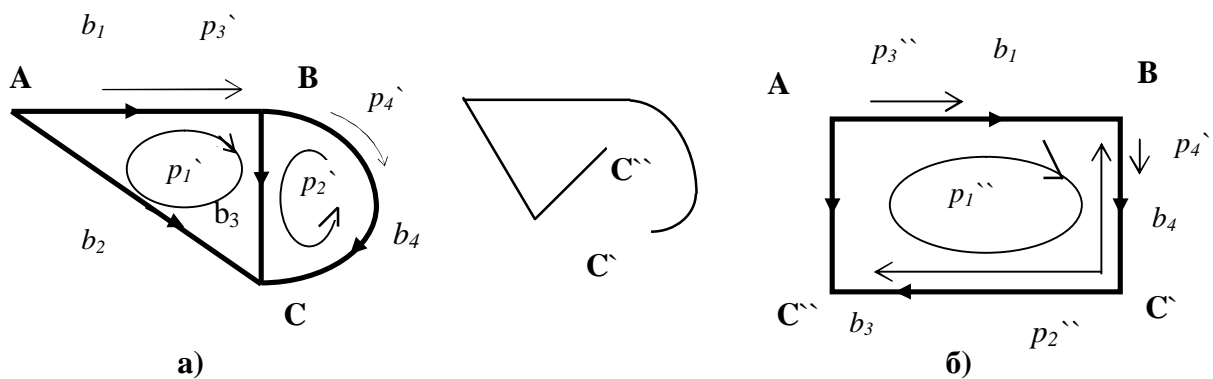


Рис. 2.11. Преобразование путей при изменении структуры сети

Параметры старой сети на рис. 2.11.а обозначим индексом  $\alpha$ , а параметры новой сети, на рис. 2.11.б, – индексом  $\beta$ . Матрицы преобразования путей базиса свободных ветвей к путям базисов в связанной сети имеют следующий вид:

$$C_a^0 = \begin{matrix} \alpha \backslash 0 & p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & p_4^0 \\ p_1^0 & 1 & -1 & 1 & \\ p_2^0 & & & 1 & -1 \\ p_3^0 & 1 & & & \\ p_4^0 & & & & 1 \end{matrix} \begin{matrix} m \\ m \\ j \\ j \end{matrix}$$

$$C_b^0 = \begin{matrix} \beta \backslash 0 & p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & p_4^0 \\ p_1^0 & 1 & -1 & 1 & \mathbf{1} \\ p_2^0 & & & 1 & -1 \\ p_3^0 & 1 & & & \\ p_4^0 & & & & 1 \end{matrix} \begin{matrix} m \\ j \\ j \\ j \end{matrix}$$

Основное отличие – это новый ненулевой элемент  $C_\beta^0[1,4]$  в первой строке четвертого столбца в матрице представления базиса новой сети (выделен жирным). Он показывает ту новую ветвь, которая *должна войти* в старый контур при переходе к новой сети с измененной структурой. Обратные матрицы преобразования базиса связанных путей в пути свободных ветвей в старой и новой сети имеют следующий вид:

$$(C_a^0)^{-1} = C_0^a = A_0^a:$$

$$A_0^a = \begin{matrix} \alpha \backslash 0 & p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & p_4^0 \\ p_1^0 & & & 1 & \\ p_2^0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ p_3^0 & & 1 & & 1 \\ p_4^0 & & & & 1 \end{matrix} \begin{matrix} m \\ m \\ j \\ j \end{matrix}$$

$$A_0^b = \begin{matrix} \beta \backslash 0 & p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 & p_4^0 \\ p_1^0 & & & 1 & \\ p_2^0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{2} \\ p_3^0 & & 1 & & 1 \\ p_4^0 & & & & 1 \end{matrix} \begin{matrix} m \\ j \\ j \\ j \end{matrix}$$

Поскольку сама по себе сеть остается одна и та же, независимо от способа соединения ветвей, (до тех пор, пока не меняются составляющие ее ветви), то базисы в разных структурах сети должны выражаться друг через друга с помощью матриц преобразования, которые можно получить по формулам (2.6) и (2.7). Например, от базиса в старой сети можно перейти к базису в новой сети:

$$p_{b''} = C_b^0 p_0 = C_b^0 A_0^a p_a' = C_b^a p_a',$$

откуда получим матрицу преобразования базисов путей:

$$C_b^a = C_b^0 (A_0^a)_t =$$

	1	2	3	4
1''	1	-1	1	1
2''			1	-1
3''	1			
4''				1

$$\times$$

	1'	2'	3'	4'
1			1	
2	-1	1	1	1
3		1		1
4				1

$$=$$

	1'	2'	3'	4'
1''	1			1
2''		1		
3''			1	
4''				1

$$= C_b^a$$

где пути по бокам матриц обозначены просто цифрами с необходимыми штрихами.

Аналогично можно перейти от базиса новой сети к базису старой сети:

$$p_a' = C_a^0 p_0 = C_a^0 (A_0^b)_t p_{b''} = C_a^b p_{b''},$$

тогда получим обратную матрицу преобразования базисов  $C_a^b = C_a^0 (A_0^b)_t$

$$C_a^b =$$

	1	2	3	4
1'	1	-1	1	
2'			1	-1
3'	1			
4'				1

$$\times$$

	1''	2''	3''	4''
1			1	
2	-1	1	1	2
3		1		1
4				1

$$=$$

	1''	2''	3''	4''
1'	1			-1
2'		1		
3'			1	
4'				1

Можно видеть, что полученные матрицы преобразования базисов не просто являются обратными и при перемножении дают единичную матрицу, но отличаются от единичных только тем элементом матриц  $C[1,4]$ , который возник как дополнение контура при изменении соединения ветвей в сети. Таким образом, матрицы преобразования базисов продолжают составлять группу при изменении структуры сети. Изменение состава ветвей в путях, в данном случае в контурах, можно рассматривать как выбор путей, проходящих по другим ветвям, т.е. как *преобразование координат* в пространстве сети.

Рассмотрим изменение преобразования координат произвольного вектора-пути при переходе к сети с другой структурой. Если выбрать вектор-путь, состоящий из ветвей:

$$p_x = d_x^0 p_0 = + b_1 - b_2 + b_4,$$

то в первой сети он выражается через пути базиса  $p_a'$  в соответствии с (2.11):

$$p_x = d_x^0 A_0^a p_a' = d_x^a p_a' = + p_1 - p_2,$$

и там это замкнутый путь, который выражается только через контуры. В новой сети тот же вектор выражается через векторы базиса  $p_{b''}$ :

$${}^j \mathbf{p}_x = d_x^0 A_0^b p_b = + p_1 - p_2 - p_4 ,$$

и там это разомкнутый путь, выражаемый и через контуры и через разомкнутые пути.

При разложении произвольного вектора-пути по базису путей получим сумму векторов базиса, умноженных на числа-координаты. Эта сумма дает вектор, а не скалярное произведение векторов, т.е. число. Заданный вектор-путь остается один и тот же в сети с любой структурой, даже при изменении размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей. Например, преобразуем его координаты из одной сети в другую сеть с помощью матрицы преобразования базисов по формуле (2.12), хотя сам вектор при этом изменяется с пути замкнутого в путь разомкнутый:

$$d_x^b = d_x^a C_a^b =$$

$$= \begin{array}{cccc} 1^{\backslash} & 2^{\backslash} & 3^{\backslash} & 4^{\backslash} \\ \hline 1 & -1 & & \end{array} \times \begin{array}{cccc} & 1^{\wedge} & 2^{\wedge} & 3^{\wedge} & 4^{\wedge} \\ \hline 1^{\backslash} & 1 & & & -1 \\ 2^{\backslash} & & 1 & & \\ 3^{\backslash} & & & 1 & \\ 4^{\backslash} & & & & 1 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1^{\wedge} & 2^{\wedge} & 3^{\wedge} & 4^{\wedge} \\ \hline 1 & -1 & & -1 \end{array}$$

Это совпадает с выражением вектора  $\mathbf{p}_x = {}^j \mathbf{p}_x$  через пути базиса в новой сети. Таким образом, механизм преобразования координат путей работает и при изменении структуры сети, в данном случае – когда размерность подпространства замкнутых путей уменьшилась, то размерность подпространства разомкнутых путей увеличилась. Вектор (путь, как набор ветвей), остается инвариантным, а его координаты в разных базисах меняются как при изменении базиса в одной сети, так и при изменении структуры сети. Т.е. вектор-путь ведет себя как 1-тензор.

#### 2.4.2. Ортогональность замкнутых и разомкнутых путей

В разделе 2.3.3 были определены понятия скалярного произведения и ортогональности векторов, а также ортогональность подпространств в векторном пространстве. Определим теперь более детально, в чем состоит ортогональность замкнутых и разомкнутых путей в пространстве сети, с тем, чтобы ввести далее понятия прямого и взаимного базиса. Покажем, что базис контуров можно рассматривать как прямой, а базис разомкнутых путей как взаимный на основании той роли, которую они играют в матрицах преобразования.

Почему для описания структуры сетей нужен взаимный базис? В геометрии непрерывного пространства для описания объектов в принципе достаточно одного базиса. Однако в дискретном пространстве структуры объективно существуют замкнутые и разомкнутые пути, которые играют разную роль. В одном качестве эти пути противоположны, в другом качестве они взаимно дополняют друг друга. Их противоположность в том, что соединение или разъединение границ пути превращает замкнутый путь в разомкнутый, или наоборот. Их взаимное дополнение в том, что



замкнутому пути в одной сети соответствует разомкнутый путь в двойственной сети. Таким образом, замкнутые и разомкнутые пути представляют собой два различных базиса. Их взаимодействие соответствует отношению между прямым и взаимным базисами.

Для путей скалярное произведение можно определить как произведение компонент двух векторов в одинаковом базисе путей (в связанной сети или в свободных ветвях). Например, для замкнутого и разомкнутого путей на рис. 2.10, мы получили их компоненты в двух базисах в рамках одной сети, которые даны формулами (2.17) для  ${}^m\mathbf{p}_x$  и (2.19) для  ${}^j\mathbf{p}_y$ , где эти векторы-пути выражены через ветви (пути в свободных ветвях):

$$\begin{aligned} {}^m\mathbf{p}_x &= -1 b_1 + 0 b_2 - 1 b_3 + 1 b_4 + 0 b_5 + 1 b_6 - \text{для контура и} \\ {}^j\mathbf{p}_y &= 0 b_1 + 1 b_2 - 1 b_3 + 0 b_4 + 1 b_5 + 0 b_6 - \text{для разомкнутого пути.} \end{aligned}$$

Перемножив их компоненты при одинаковых ветвях, получим:

$$({}^m\mathbf{p}_x \cdot {}^j\mathbf{p}_y) = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1,$$

т.е. скалярное произведение, определенное таким образом, не равно нулю и такие векторы нельзя считать ортогональными в указанном смысле. Если в качестве разомкнутого пути выбрать одну из ветвей контура, то все произведения компонент будут равны нулю, кроме произведения по данной ветви, которое равно +1 или -1, в зависимости от взаимной ориентации этих путей. Это означает, что *сами по себе замкнутые и разомкнутые пути не ортогональны друг к другу*. Это видно из приведенных примеров, где замкнутые и разомкнутые пути одинаково представляют друг друга.

Однако есть разница между этими двумя типами *путей (замкнутыми и разомкнутыми) по отношению к отдельным ветвям*. В матрице связывания ветвей в сеть,  $C_a^0$ , пути в свободных ветвях представляют контуры и разомкнутые пути в связанных ветвях, образуя по строкам две подматрицы  ${}^mC_a^0$  и  ${}^jC_a^0$ . Контуры, представленные первой подматрицей,  ${}^mC_a^0$ , охватывают *все ветви*. Каждый новый базисный контур добавляет к прежде охваченным ветвям хотя бы одну новую ветвь, пока не будут перечислены все ветви (и построены все независимые контуры). Во второй подматрице,  ${}^jC_a^0$ , разомкнутые пути включают в себя только *часть ветвей*, охватывая при этом *все узлы* (и представляя все независимые разомкнутые пути). Первый разомкнутый путь охватывает два узла. Каждый новый базисный разомкнутый путь добавляет к прежде охваченным узлам один новый узел. В качестве примера можно рассмотреть соответствие путей, ветвей и узлов на рис. 2.10 и в матрицах  $C_a^0$  и  $C_b^0$  к этой сети.

В матрице обратного преобразования, от путей в связанных ветвях к путям в свободных ветвях,  $A_0^a$ , *элементы столбцов*, представляющие разомкнутые пути (их подматрицу обозначим  ${}^jA_0^a$ ) охватывают все ветви. Контуры в этой матрице (подматрицу их столбцов обозначим  ${}^mA_0^a$ ), относятся только к *части ветвей*, которые охватывают *все узлы*.

Итак, в обратном преобразовании замкнутые пути играют такую же роль, какую в прямом преобразовании играли разомкнутые пути. Каждая ветвь в связанной сети сама образует разомкнутый путь, и может выражаться линейной комбинацией замкнутых и разомкнутых путей.<sup>2</sup>

Можно заметить, что пути в матрице  $A_0^a$ , транспонированные по отношению к путям в матрице  $C_a^0$ , ведут себя с точностью до наоборот. То есть столбцы разомкнутых путей в обратном преобразовании охватывают все ветви (как это делали в прямом преобразовании замкнутые пути). Столбцы замкнутых путей при этом охватывают все узлы (как это делали в прямом преобразовании разомкнутые пути). Это показывает, что матрица  $A_0^a$  играет роль матрицы  $C_a^0$  для какой-то другой сети. *Это и есть двойственная сеть.*

Итак, замкнутые и разомкнутые пути действуют противоположно. Если пути в отдельных ветвях представляются линейными комбинациями как замкнутых, так и разомкнутых путей, то собственно разомкнутые произвольные пути, имеющие начало в одном узле, а конец – в другом, должны представляться линейными комбинациями одних разомкнутых путей базиса (образующих остов графа). От замкнутых путей они не зависят.

Например, рассмотрим матрицы преобразования для сетей, которые представлены на рис. 2.5.a. Запишем эти матрицы еще раз, вместе с разделением на подматрицы замкнутых и разомкнутых путей, как выражения путей базиса в связанной сети через пути в свободных ветвях,  $C_a^0$ , и обратно,  $C_a^0 = A_0^a$ :

$$C_a^0 = \begin{array}{c|cccc|c} & 0 & & & & \\ \alpha & & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \\ \hline p_1 & & & 1 & & & j \\ p_2 & & 1 & & & & j \\ p_3 & & -1 & 1 & 1 & & m \\ p_4 & & & & 1 & -1 & m \end{array} \quad \begin{array}{c} jC_a^0 \\ mC_a^0 \end{array}$$

$$C_a^0 = A_0^a = \begin{array}{c|cccc|c} & \alpha & & & & \\ 0 & & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \\ \hline p_1 & & & 1 & & & \\ p_2 & & 1 & & & & \\ p_3 & & -1 & 1 & 1 & & \\ p_4 & & -1 & 1 & 1 & -1 & \\ \hline & & j & j & m & m & \end{array} \quad \begin{array}{cc} jA_0^a & mA_0^a \end{array}$$

<sup>2</sup>Замкнутые пути могут включиться в представление разомкнутых, отдельных ветвей в сети в тех случаях, когда при разъединении ветвей в сети, они сами становятся разомкнутыми путями. Состав их ветвей, конфигурация, при этом могут и не меняться, но соответствующий столбец матрицы обратного преобразования начинает участвовать в представлении разомкнутых путей. Это изменение структуры сети без изменения конфигурации путей автор использовал в работе (Петров, 1985, гл.2) при анализе изменения мощности в сети при соединении и разъединении ветвей.

Эти матрицы включают в себя подматрицы, соответствующие преобразованию замкнутых путей и разомкнутых путей, которые в данном случае обозначим цифрами:

$${}^j A_0^a = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1^{\cdot} & 2^{\cdot} \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & -1 \\ \hline 4 & -1 \\ \hline \end{array} \\ j \quad j \end{array} \quad {}^m C_{\alpha}^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3^{\cdot} & -1 & 1 & 1 & \\ \hline 4^{\cdot} & & & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \\ m \quad m \end{array}$$

Эти подматрицы соответствуют, как преобразованию путей свободных ветвей в пути базиса связанных ветвей, так и представлению путей в свободных ветвях через пути базиса в связанных ветвях. Произведение этих матриц по одинаковым переменным,  ${}^m C_{\alpha}^0 {}^j A_0^a = \mathbf{0}$ , дает нулевую матрицу и в этом смысле составляющие их векторы замкнутых и разомкнутых путей ортогональны. Таким образом, в прямом преобразовании (от свободных элементов к связанным) матрица  $C_{\alpha}^0$  распадается «по горизонтали» на две подматрицы, соответствующие замкнутым путям  ${}^m C_{\alpha}^0$  и разомкнутым путям  ${}^j C_{\alpha}^0$ :

$$C_a^0 = \begin{bmatrix} {}^m C_a^0 \\ {}^j C_a^0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

- в каждой строке  ${}^m C_{\alpha}^0$  ненулевые элементы перечисляют ветви, которые составляют данный контур, замкнутый путь, с учетом их ориентации. В данном случае это ветви 1, 2 и 3, а также ветви 3 и 4, которые представляют проходящие через них пути;
- в каждой строке  ${}^j C_{\alpha}^0$  ненулевые элементы перечисляют ветви, составляющие разомкнутые пути. Эти пути определяют остов графа сети, охватывающий все узлы, в данном случае это ветви 1 и 2, представленные проходящими через них путями.

Матрица обратного преобразования (от связанных элементов к свободным)  $A_0^a$  также распадается на две подматрицы «по вертикали», т.е. по столбцам путей и принимает вид (2.14):

$$A_0^a = n \begin{bmatrix} {}^m A_0^a & {}^j A_0^a \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

- подматрица  ${}^m A_0^a$  состоит из столбцов замкнутых путей, ненулевые элементы которых показывают, как контуры представляют пути в ветвях,
- подматрица  ${}^j A_0^a$  состоит из столбцов разомкнутых путей, ненулевые элементы которых показывают, как эти пути представляют пути в отдельных ветвях (вместе с контурами).

Поскольку это матрицы обратных преобразований, то их произведение, равное единичной матрице, можно представить в символах:

$$C_a^0(A_0^a)_t = \mathbf{d}_a^a = \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} \left[ \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} C_a^0 \right] n \left[ \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} A_0^a \right] = \begin{bmatrix} ({}^m C_a^0 {}^m A_0^a), ({}^m C_a^0 {}^j A_0^a) \\ ({}^j C_a^0 {}^m A_0^a), ({}^j C_a^0 {}^j A_0^a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Отсюда видно, что замкнутые и разомкнутые пути ортогональны, поскольку содержащие их элементы перекрестных произведений блоков матриц, представляют собой скалярное произведение компонент замкнутого и разомкнутого пути, как в приведенном примере. Таким образом, контуры – это пути, обеспечивающие прямое преобразование базиса от ветвей к связанной сети, а разомкнутые пути – обеспечивают обратное преобразование от связанной сети к путям в ветвях.

### 2.4.3. Прямой базис и взаимный базис в пространстве сети

Итак, замкнутые пути охватывают все ветви при переходе от путей в свободных ветвях к путям в связанных ветвях, а разомкнутые пути также охватывают все ветви, но при обратном переходе от путей в связанных ветвях к путям в свободных ветвях. При этом не указывается, являются ли *сами свободные* ветви замкнутыми или разомкнутыми. Взаимно обратный характер преобразования замкнутых и разомкнутых путей по отношению к ветвям показывает, что наборы базисных векторов этих путей *в сетях* ведут себя взаимно обратнo, как **векторы прямого и взаимного базисов в метрической геометрии**.

В геометрии свойство взаимных базисов  $\mathbf{p}_a$  и  $\mathbf{p}^a$  состоит в том, что их скалярные произведения дают единичную матрицу:  $(p_a p^b_t) = d_a^b$ , где  $d_a^b = 1$  при  $a = b$ , и  $d_a^b = 0$  в противном случае, т.е. каждый вектор одного из базисов ортогонален ко всем векторам другого базиса, кроме связанного с той же осью координат.

При изменении системы координат скалярное произведение векторов прямого базиса и взаимного базиса не меняется, поэтому можно записать их равенство и подставить в него формулу преобразования прямого базиса, получим:  $d_a^b = (p_a p^b) = (p_a p^{b'}) = (p_a C^{a}_{b'} p^{b'})$ . Тогда формула преобразования взаимного базиса принимает вид:

$$p^{b'} = (C_{b'}^b)^{-1}_t p^b = A^{b'}_b p^b, \quad (2.25)$$

то есть векторы взаимного базиса преобразуются *контравариантно* по отношению к векторам прямого базиса.

Компоненты вектора во взаимном базисе окажутся *ковариантными* по отношению к прямому базису. Вместе с тем компоненты произвольного вектора в прямом и взаимном базисах – это два *разных* набора чисел. Однако эти два набора чисел представляют один и тот же вектор фактически в *одной и той же системе координат*.

Поскольку прямой и взаимный базисы равноправны, то произвольный вектор можно разложить по векторам любого из них. Значения проекций будут при этом не только

различны. В работе автора (Петров, 1985, гл.1) показано, что любой вектор в простейшем случае косоугольных координат на плоскости имеет компоненты *четырёх* типов, относящихся к прямому и взаимному базисам. Это контравариантные и ковариантные компоненты вектора в прямом базисе, а также во взаимном базисе. Рассмотрим вектор в косоугольной системе координат  $(x_1, x_2)$  на рис. 2.12.

На этом рисунке вектор  $\mathbf{R}$  имеет проекции в системе координат как по осям  $x_1$  и  $x_2$ , так и по осям  $x^1$  и  $x^2$ , проведенным пунктиром (координатные поверхности здесь вырождаются в линии, нормали к ним и дают оси  $x^1$  и  $x^2$ ). В данном случае, векторы  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  (обычно единичные) по осям  $x_1$  и  $x_2$  составят прямой базис  $\mathbf{p}^a$ , а векторы  $\mathbf{p}^1$  и  $\mathbf{p}^2$  по осям  $x^1$  и  $x^2$  – взаимный базис  $\mathbf{p}^a$ . Обычные проекции вектора  $\mathbf{R}$  в прямом базисе представлены компонентами  $\mathbf{r}^a = (r^{x1}, r^{x2})$ , которые выделены жирными отрезками.

Компоненты того же самого вектора можно получить путем ортогональных проекций – перпендикулярно осям координат. Они отсекают на осях  $x_1$  и  $x_2$  отрезки  $r_{x1}$  и  $r_{x2}$ . Такие компоненты преобразуются при изменении системы координат точно так же, как и векторы базиса, то есть ковариантным образом:  $r_a = (r_{x1}, r_{x2})$ .

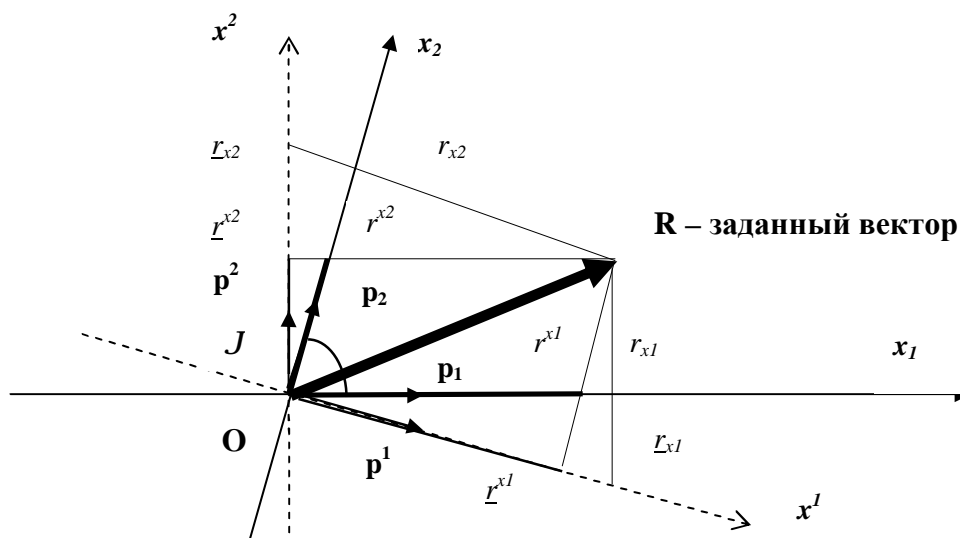


Рис. 2.12. Ковариантные и контравариантные проекции вектора на плоскости (в прямом и взаимном базисах косоугольной системы координат на двумерной плоскости произвольный вектор имеет компоненты четырех типов)

Эти ковариантные проекции вектора получаются как результат скалярного произведения вектора  $\mathbf{R}$  и соответствующего вектора базиса, например:

$$(\mathbf{R} \mathbf{p}_1) = |\mathbf{R}| |\mathbf{p}_1| \cos \theta = r_{x1}.$$

Продолжения этих проекций отсекают обычные компоненты  $r_{x1}$  и  $r_{x2}$ , но уже по осям  $x^1$  и  $x^2$ , составляющим направления взаимного базиса  $\mathbf{p}^a$ . Они контравариантные по отношению ко взаимному базису, но ковариантные по отношению к прямому базису, а потому записаны

с нижними индексами как  $r_a$ . Кроме того, продолжения обычных проекций в прямом базисе дают во взаимном базисе компоненты от ортогональных проекций  $r^{x1}$  и  $r^{x2}$ . Эти компоненты являются ковариантными к взаимному базису, но контравариантными к прямому. Потому компоненты записывают с верхними индексами, как  $r^a$ .

Итак, с каждой осью координат связаны *четыре* компоненты. Например, по оси  $x_1$  и взаимной к ней  $x^1$  вектор  $\mathbf{R}$  имеет четыре компоненты:

- в прямом базисе –
  - контравариантная компонента  $r^{x1}$ ,
  - ковариантная компонента  $r_{x1}$
- во взаимном базисе –
  - контравариантная компонента  $r^{x1}$ ,
  - ковариантная компонента  $r_{x1}$

Аналогично по оси  $x_2$ , и взаимной к ней оси  $x^2$  – вектор  $\mathbf{R}$  имеет также четыре компоненты: в прямом базисе  $r^{x2}$  и  $r_{x2}$ , во взаимном базисе  $r^{x2}$  и  $r_{x2}$ .

Компоненты вектора обычно вводят иначе, например, в криволинейных системах координат (Корн, 1977, с. 183). Каждый вектор можно представить в одной из следующих форм:

$$\mathbf{R} = r^\alpha \mathbf{p}_\alpha = r_\alpha \mathbf{p}^\alpha. \quad (2.26)$$

При этом ковариантные компоненты вводятся как  $r_\alpha = \mathbf{R} \mathbf{p}_\alpha$ , а контравариантные компоненты – как  $r^\alpha = \mathbf{R} \mathbf{p}^\alpha$ , т.е. как скалярные произведения самого произвольного вектора и соответствующего вектора прямого или взаимного базиса. Подставляя по очереди в (2.26) эти выражения вместо компонент получим тождества, показывающие, что такое представление действительно инвариантно.

Произведение контравариантной компоненты произвольного вектора на соответствующий орт (вектор базиса) дает составляющий вектор вдоль данной оси, например,  $\mathbf{R}_{x1} = r^{x1} \mathbf{p}_1$  и т.д. Сам вектор  $\mathbf{R}$  равен векторной сумме таких составляющих векторов:  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x1} + \mathbf{R}_{x2} + \dots + \mathbf{R}_{xn}$ . При разложении вектора  $\mathbf{R}$  по ковариантным компонентам в примере на рис. 2.12 при этом происходит умножение компонент,  $r_\alpha$ , расположенных по одним осям,  $x^\alpha$ , на базисные векторы взаимного базиса,  $\mathbf{p}^\alpha$ , направленные по другим осям  $x_\alpha$ , что даст при суммировании совсем не тот вектор, который был ими представлен.

Такое противоречие можно объяснить двояко: либо за ковариантные следует принимать те компоненты, которые расположены по осям взаимного базиса; либо сам вектор взаимного базиса относится к соответствующей оси прямого базиса, но как ковариантный вектор в интерпретации геометрии (Схоутен, 1965, с.27) – как система двух параллельных

гиперплоскостей с ориентацией, фиксирующей их порядок. Полученные преобразования показывают, что верно второе: *по каждой оси произвольный вектор имеет как контравариантные проекции в прямом базисе, так и ковариантные проекции во взаимном базисе*, заданном выше. Таким образом, получаем два представления вектора в данной системе координат.

Аналогичные рассуждения можно повторить для *ортогональных осей*  $x_a$  взаимного базиса  $p^a$  и проекций вектора  $\mathbf{R}$  на эти оси, (обозначены чертой снизу, например,  $\underline{r}^x$ ), но здесь прямой базис и взаимный базис меняются ролями. Таким образом, получим два разных представления для одного и того же вектора и в этой системе координат. Следовательно, любой вектор  $\mathbf{R}$  имеет *четыре* представления при его разложении в системе координат произвольного вида:

$$\mathbf{R} = r^a p_a = r_a p^a = \underline{r}_a \underline{p}^a = \underline{r}^a \underline{p}_a$$

а поскольку  $p_a p^a = 1$  и  $\underline{p}^a \underline{p}_a = 1$ , то получим, что инвариант – квадрат абсолютной величины вектора – можно представить двояко:

$$|\mathbf{R}|^2 = r^a r_a = \underline{r}_a \underline{r}^a. \quad (2.27)$$

В декартовой системе координат эти представления совпадают. Аналогично в многомерном пространстве, где  $n$  чисел задают ковариантные или контравариантные проекции абстрактного вектора, а их как ковариантность или контравариантность зависит от закона преобразования при изменении системы координат.<sup>3</sup>

Таким образом, любой вектор обладает ковариантными и контравариантными компонентами. Контравариантные получаются при разложении вектора в прямом базисе. Ковариантные получаются при разложении вектора во взаимном базисе. Эти компоненты представляют один и тот же вектор, но взаимосвязаны: скалярное произведение ковариантных и контравариантных компонент есть инвариант, он не зависит от системы координат, поскольку ковариантные и контравариантные величины преобразуются с помощью взаимно обратных матриц.

Инвариант, который представляет собой сумму произведений ковариантных и контравариантных компонент, есть квадрат абсолютной величины (длина) вектора. В случае данного примера его можно представить в виде:

---

<sup>3</sup>Из тензорного анализа известно, что если задана система координат  $x^a$ , то любой контравариантный вектор  $\mathbf{R}$  с компонентами  $R^i(x^1, \dots, x^n)$  можно представить в виде инвариантной формы  $R = R^i(x^1, \dots, x^n) p_i(x^1, \dots, x^n)$  в базисе  $p_i$ , векторы которого называют ковариантными базисными векторами. Аналогично в той же системе координат каждый ковариантный вектор  $\mathbf{Q}$  с компонентами  $Q_i(x^1, \dots, x^n)$  можно также представить в виде инвариантной формы в базисе  $p^i$   $\mathbf{Q} = Q_i(x^1, \dots, x^n) p^i(x^1, \dots, x^n)$ , векторы которого называют контравариантными базисными векторами. Векторы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{Q}$  принадлежат, вообще говоря, различным векторным пространствам (см. Корн, 1977, с. 504).

$$|\mathbf{R}|^2 = r^{x1} r_{x1} + r^{x2} r_{x2} = \underline{r}^{x1} \underline{r}_{x1} + \underline{r}^{x2} \underline{r}_{x2} = r^a r_a = \underline{r}^a \underline{r}_a \quad (2.28)$$

В геометрии, в частности, в рассмотренном примере, вектор, или другой геометрический объект, может быть выражен в прямом или взаимном базисах. Он может быть выражен в данной системе координат, или при переходе к другой системе координат. При этом размерность самого пространства постоянная. В сетях ситуация сложнее, поскольку при изменении числа узлов меняется число базисных замкнутых, и, соответственно, разомкнутых путей; т.е. меняется размерность пространства. Матрицы преобразования путей в свободных ветвях в пути в связанных ветвях –  ${}^m C_a^a$ , и обратного преобразования –  ${}^j A_a^a$  могут оказаться прямоугольными, если в новой сети базисных путей данного типа, допустим, больше, чем в исходной сети. Прямоугольные матрицы не имеют обратных матриц, а, следовательно, и не образуют группу. Это делает задачу расчета изменения векторов процессов при изменении структуры вырожденной, т.е. расчет оказывается невозможным.

*Базис контуров ведет себя в сети как прямой, а базис разомкнутых путей – как взаимный (или наоборот). Замкнутые и разомкнутые пути независимы и в этом смысле ортогональны. Замкнутые пути составляют свое подпространство, а разомкнутые – свое подпространство сети, и они вместе дополняют друг друга до полного пространства сети. В двойственной сети замкнутые и разомкнутые пути меняются ролями.*

#### 2.4.4. Определение двойственных сетей

Рассмотрим сети, двойственные к данной сети. В теории графов двойственность связана с понятием планарности, т.е. определяется только для графов, которые укладываются на плоскости без пересечений. Планарный граф делит плоскость на *области* конечные, если конечна их площадь и бесконечные в противном случае. Ветви, охватывающие конечные области, образуют контуры, которые в теории графов называют *ячейки*. Каждая ветвь графа сети является общей не более чем для двух областей. Ячейки внутри графа имеют конечную площадь, а ячейка, дополняющая граф до всей плоскости – бесконечную площадь. Внутренние ячейки-контуры охватывают все ветви и составляют базис (прямой). Это ограничивает свободу выбора путей, в частности, *контур должен составлять непрерывную замкнутую линию*.

Для построения двойственного графа в каждую область помещается один узел, затем через каждую ветвь проводится линия, связывающая узлы в соединяемых ею областях, которая представляет ветвь в двойственной сети. Совокупность таких ветвей есть *двойственная сеть*. Таким образом, двойственными являются контуры и узлы. Пример такого построения дан на рис. 2.8.а. Из теории графов известно, что двойственным к двойственному является исходный граф. Это касается и сетей.



Будем, как и раньше, все величины и параметры, относящиеся к двойственной сети, обозначать той же буквой, что в данной сети, но с подчеркиванием. Например, данная сеть будет обозначаться как  $a$ -сеть, а двойственная – как  $\underline{a}$ -сеть; количество независимых контуров в  $\underline{a}$ -сети равно  $\underline{m}$  и т.д.

Инвариантом сетей является количество ветвей – оно одинаково для заданной и двойственной сети, и обозначается  $n = \underline{n}$ . Ранг одного из двойственных графов равен цикломатическому числу другого графа. Покажем, что в сетях это означает равенство числа линейно независимых замкнутых путей (контуров) одной сети графа числу линейно независимых разомкнутых путей двойственной сети.

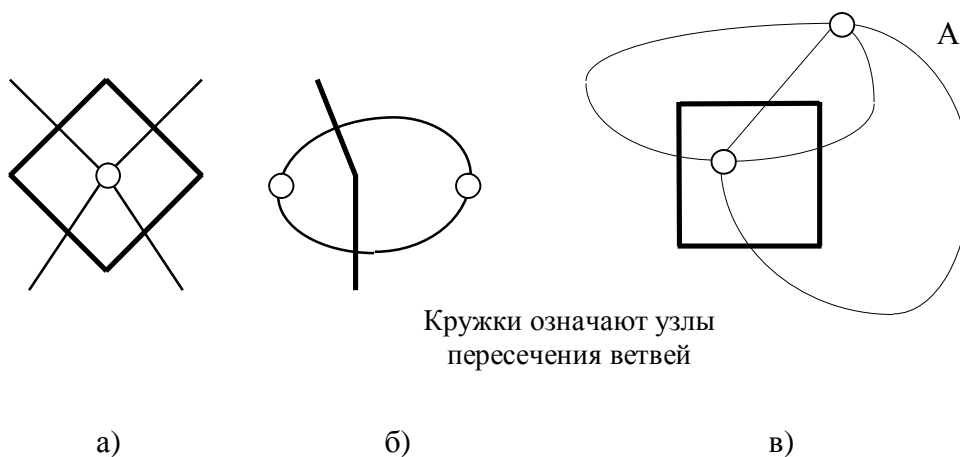


Рис. 2.13. Преобразование элементов двойственных сетей

Варианты преобразований показаны на рис. 2.13 а), б); где ветви заданной сети показаны жирными линиями, а двойственной – тонкими линиями. Маленькими кружками на схемах обозначены узлы пересечения ветвей. По построению, каждому независимому контуру, состоящему из  $b$  ветвей данной сети, соответствует «звезда» из  $\underline{b}$ -ветвей двойственной сети, расходящихся из узла, помещенного внутрь ячейки. Каждый узел данной сети, кроме одного, охватывается независимым контуром двойственной сети, поскольку все  $b$ -ветви, расходящиеся звездой из данного узла, пересекаются  $\underline{b}$ -ветвями, которые связывают соседние области.

Неохваченный узел соответствует узлу данной сети, расположенному в бесконечной области. На рис. 2.13.в, где жирными линиями показана заданная, а тонкими – двойственная сеть, узел А является таким узлом. Все контуры, построенные для двойственной сети, являются независимыми, поскольку каждый из них добавляет новую ветвь из числа инцидентных данному узлу, и эти контуры по построению перечисляют все ветви сети, следовательно, они составляют базис. Тогда число независимых контуров  $\underline{m}$  двойственной сети будет равно числу узлов исходной (связанной) сети без единицы, т.е.  $\underline{m} = J - 1 = j$ .

Поскольку для каждой отдельной подсети один узел выпадает из числа узлов, порождающих контуры в двойственной сети, то число независимых контуров  $\underline{m}$  в общем случае составит:

$$\underline{m} = J - s = j. \quad (2.29)$$

Получаем, что *количество независимых контуров в двойственной сети равно количеству независимых разомкнутых путей в исходной сети.*

Каждому контуру – ячейке данной сети соответствует узел и выходящая из него «звезда» ветвей в двойственной сети, которые в теории графов соответствуют разрезающим множествам, удаление которых отделяет данный узел от остального графа. Таким образом, каждый контур данной сети порождает узел в двойственной сети, плюс один узел располагается во внешней области. Отсюда следует, что число узлов  $\underline{J}$  в двойственной (связанной) сети равно числу контуров  $m$  в данной сети плюс один:

$$\underline{J} = m + 1;$$

следовательно, число независимых разомкнутых путей в двойственной сети равно числу контуров в данной сети, поскольку  $\underline{j} = \underline{J} - 1 = m$ .

Если имеем  $s$  независимых подсетей, то для каждой из них в двойственной сети окажется узлов  $\underline{J}_i = m_i + 1$  и общее число узлов составит:

$$\underline{J} = \underline{J}_1 + \dots + \underline{J}_s = m_1 + 1 + \dots + m_s + 1 = m + s,$$

откуда полное число независимых разомкнутых путей  $\underline{j}$  в двойственной сети:

$$\underline{j} = \underline{J} - s = m + s - s = m, \quad (2.30)$$

т.е. и в общем случае *количество независимых разомкнутых путей в двойственной сети равно количеству независимых контуров в данной сети.*

Таким образом, для двойственной сети размерности прямого базиса контуров и взаимного базиса разомкнутых путей меняются местами. При этом *сумма размерностей базисов контуров и сумма размерностей базисов разомкнутых путей в двух двойственных сетях постоянна*, при любом соединении ветвей в сети.

Общее число узлов в двух сетях  $J_0$  тогда составит:

$$J_0 = J + \underline{J} = j + s + \underline{j} + \underline{s} = j + s + m + \underline{s} = n + s + \underline{s}$$

т.е. суммарное число узлов в двух сетях постоянно при любой структуре:

$$J_0 = n + s + \underline{s} = n + 2s, \quad (2.31)$$

поскольку каждой независимой подсети соответствует независимая двойственная подсеть. Это очевидно из того, что топологические параметры таких подсетей удовлетворяют условиям двойственности, а связанность одной из них уменьшит как минимум на два число узлов и увеличит число контуров. Таким образом, для сетей постоянство числа узлов является инвариантом, как и для графов, но по отношению к двум двойственным сетям.

**Ориентация ветвей в двойственных сетях.** Однако перечисленных параметров недостаточно для однозначного определения и сопоставления двойственных сетей. Метод построения двойственной сети в теории графов касается конфигурации, связанной с инцидентностью ветвей и узлов, но не с ориентацией ветвей. В двойственной сети существует соответствие между ориентацией ветвей и матрицей преобразования. Рассмотрим пример на рис. 2.14, где соединяются две свободные ветви в связанную сеть. Заметим, что для свободных ветвей-контуров двойственными являются свободные разомкнутые ветви, поскольку замкнутому пути в данной сети соответствует разомкнутый путь в двойственной сети. И наоборот. Из этого рисунка видно, что если в одной сети ветви соединены последовательно, то в двойственной сети они *должны* соединяться параллельно, т.е. вход одной с входом другой, а выход с выходом. Внизу показано преобразование структуры при построении двойственной сети в теории графов.

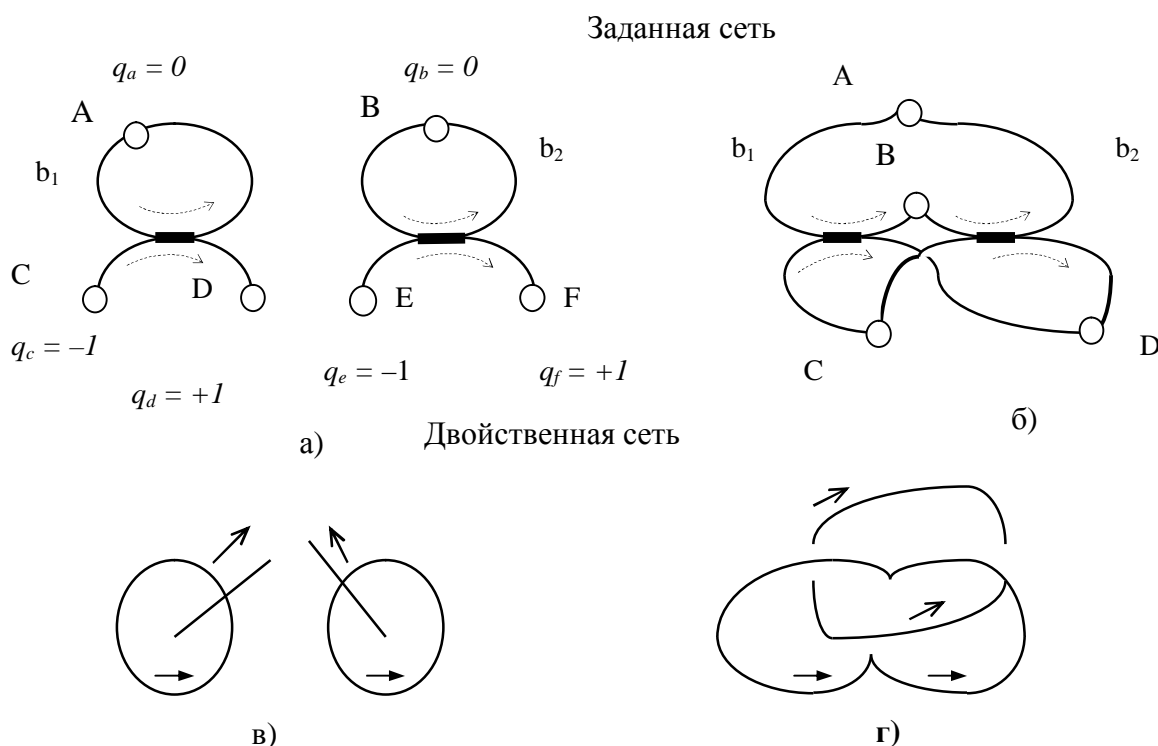


Рис 2.14. Двойственность последовательного и параллельного соединений при изменении структуры двойственных сетей

Аналогичный пример соединения трех ветвей был показан на рис. 2.4.

Обозначим *степень вершины (узла)* графа сети через  $q$  и будем считать, что она *равна числу всех входящих в узел ветвей минус число выходящих из узла ветвей*. Очевидно, что сумма всех степеней узлов  $J_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) данной сети равна нулю, поскольку любая ветвь, которая выходит из какого-нибудь узла, давая  $-1$ , входит затем в какой-нибудь другой узел, давая  $+1$ . Таким образом,  $\sum q_i = 0$ . Если брать значения степеней по модулю, т.е. их

абсолютные величины, то получается характеристика, которая зависит от ориентации ветвей, от изменения ориентации ветвей и постоянна для суммы двух двойственных сетей.

Оказывается, что *сумма модулей степеней узлов в двух двойственных сетях равна сумме числа их ветвей*. Обозначим сумму модулей степеней узлов в заданной сети  $\alpha$  через  $q_a$ , тогда  $q_a = \sum |q_i|$ , а сумму модулей степеней узлов в двойственной к заданной сети  $\underline{\alpha}$  через  $q_a = \sum |q_i|$ . Их полную сумму обозначим через  $q_0$  и она равна:

$$q_0 = q_a + q_a = \sum |q_i| + \sum |q_i| = n + \underline{n} = const \quad (2.32)$$

Эта величина *всегда постоянна* и характеризует структуру сети, в то время как степени узлов двойственных сетей могут меняться. Например, на рис. 2.14.а:

$$\begin{aligned} q_a &= \sum |q_i| = |q_A| + |q_B| = 0 + 0 = 0; \\ q_{\alpha} &= \sum |q_i| = |q_C| + |q_D| + |q_E| + |q_F| = |-1| + |1| + |-1| + |1| = 4 \\ q_0 &= q_a + q_a = 0 + 4 = 4 = n + \underline{n}. \end{aligned}$$

Для  $\alpha$  и  $\underline{\alpha}$  сетей на рис. 2.14.б получим:

$$\begin{aligned} q_a &= \sum |q_i| = |q_A| + |q_B| = 0 + 0 = 0; \\ q_a &= \sum |q_i| = |q_C| + |q_D| = |-2| + |2| = 4 \end{aligned}$$

Можно видеть, что сумма их,  $q_0$  остается прежней, равной сумме числа ветвей в двух сетях. Аналогичные соотношения выполняются для других сетей, например, на рис. 2.3, и др.

Соотношение (2.32) по сути, означает, что если в одной сети меняется ориентация ветви, то соответствующая ей ветвь в двойственной сети также меняет свою ориентацию. Это находит свое отражение в матрицах преобразования каждой из сетей, в которых изменение знаков при элементах, представляющих пути, показывает изменение ориентации ветвей. Фактически знаки элементов в матрице прямого преобразования двойственной сети, которая равна матрице обратного преобразования путей в заданной сети,  $\underline{C}_a^0 = A_0^a$ , определяют (задают) ориентацию ветвей в двойственной сети, соответствующую ориентации ветвей в заданной сети. Матрицы преобразования от свободных к связанным ветвям или, наоборот, от связанных ветвей к свободным ветвям, для двойственных сетей взаимно ортогональны, т.е.  $C_a^0 = \underline{A}_0^a = (\underline{C}_a^0)^{-1}$  и  $A_0^a = \underline{C}_a^0 = (\underline{A}_0^a)^{-1}$ . Ориентацию ветвей, и выбор путей в двойственной сети, определяют знаки элементов в матрицах преобразования.

Например, для сетей на рис. 2.14.а и 2.14.б эти матрицы для данной сети имеют вид:

$$C_a^0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} \quad A_0^a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} = \underline{C}_a^0$$

а для двойственной сети:

$$\underline{C}_a^0 = \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} i \\ m \end{array} \quad A_0^{a_t} = \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} i \\ m \end{array} = C_{a_t}^0$$

Изменения ориентации ветвей и матриц преобразования рассмотрим на примере сетей рис. 2.3, которые показаны на рис. 2.15. Здесь слева на рис. 2.15.а дана исходная сеть с узлами **A**, **B** и **F** (двойственная сеть нанесена тонкими линиями), а справа – двойственные к ней сети с узлами **D** и **E**. При этом сеть на рис. 2.15.б двойственна при ориентации ветви  $b_3$  на рис. 2.15.а, вниз, а сеть на рис. 2.15.в – при ориентации ветви  $b_3$  вверх. Разомкнутый путь  $3'$  проходит по ветви  $b_3$ . Замкнутому пути  $1'$  в  $\alpha$  сети соответствует разомкнутый путь  $\underline{1}'$  в  $\alpha$  сети; разомкнутым путям  $2'$  и  $3'$  в  $\alpha$  сети – контуры  $\underline{2}'$  и  $\underline{3}'$  в двойственной  $\alpha$  сети.

Выбор путей в сети соответствует составу ненулевых элементов в матрице  $C_{\alpha}^0$ . Выбор путей в двойственной сети определяется выбором путей в данной сети, т.е. ортогональная матрица преобразования  $\underline{C}_{\alpha}^0 = A_0^{\alpha}$  составом своих ненулевых элементов определяет выбор путей в двойственной сети. Знаки при ненулевых элементах определяют взаимную ориентацию путей и ветвей в двойственной сети.

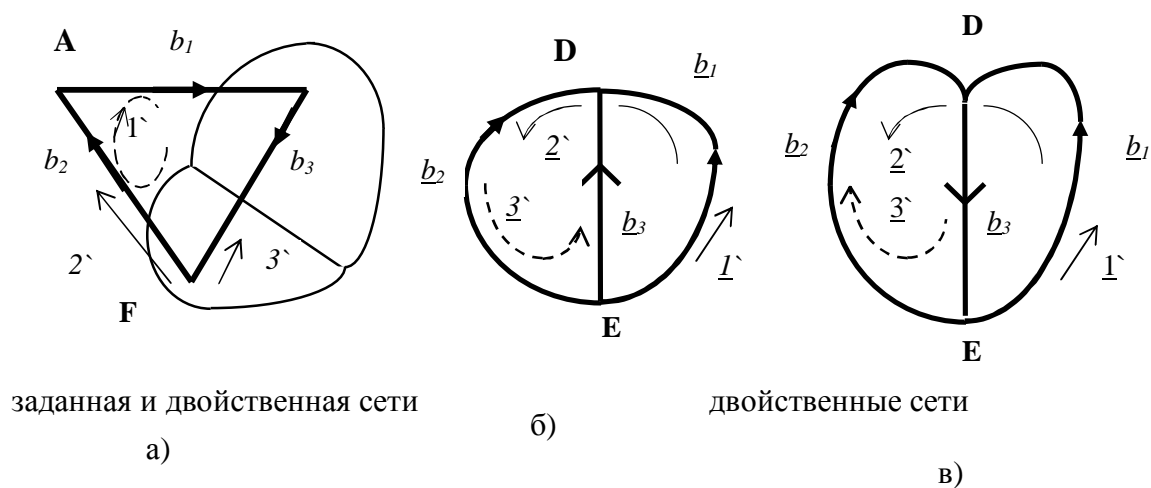


Рис. 2.15. Взаимные изменения ориентации ветвей в двойственных сетях

В первом случае сумма модулей степеней узлов в данной сети равна:

$$q_{a1} = \sum |q_i| = |q_A| + |q_B| + |q_F| = 0 + 0 + 0 = 0;$$

а в двойственной сети на рис. 2.15.б:

$$q_{a2} = \sum |q_i| = |q_D| + |q_E| = |+3| + |-3| = 6$$

сумма степеней узлов равна сумме числа ветвей в двух сетях:

$$q_{01} = q_{a1} + q_{a2} = 0 + 6 = 6 = n + \underline{n}.$$

Во втором случае  $\alpha$  сети на рис. 2.15.а, при ориентации ветви  $b_3$  вверх, получим:

$$q_{a2} = \sum |q_i| = |q_A| + |q_B| + |q_F| = 0 + |+2| + |-2| = 4;$$

в соответствующей двойственной сети,  $\underline{\alpha}$  сети на рис. 2.15.в:

$$q_{a2} = \sum |q_i| = |q_D| + |q_E| = |+1| + |-1| = 2$$

Сумма,  $q_{02}$  остается прежней, равной сумме числа ветвей в двух сетях:

$$q_{02} = q_{a2} + q_{a2} = 4 + 2 = 6 = n + \underline{n} = q_{01}$$

В первом случае матрицы преобразования сети  $\alpha$  на рис. 2.15.а имеют вид:

$$C_a^0 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} m \\ j \\ j \end{array} \quad A_0^{a_t} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} m \\ j \\ j \end{array} = \underline{C}_a^0 = (C_a^0)^{-1} \quad (2.33)$$

а для двойственной сети на рис. 2.15.б:

$$\underline{C}_a^0 = \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline -1 & 1 & \\ \hline -1 & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} j \\ m \\ m \end{array} \quad A_0^{a_t} = \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} j \\ m \\ m \end{array} = \underline{C}_a^0 \quad (2.34)$$

Во втором случае матрицы преобразования  $\alpha$  сети на рис. 2.15.а отличаются элементом  $C_a^0 [1,3]$  и имеют вид:

$$C_a^0 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} m \\ j \\ j \end{array} \quad A_0^{a_t} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} m \\ j \\ j \end{array} = \underline{C}_a^0$$

а для двойственной сети на рис. 2.15.в:

$$\underline{C}_a^0 = \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline -1 & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} j \\ m \\ m \end{array} \quad A_0^{a_t} = \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline -1 & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} j \\ m \\ m \end{array} = \underline{C}_a^0$$

Таким образом, особенности изменения структуры двойственных сетей сводятся к следующему. При разъединении одного узла на два в одной сети происходит слияние двух узлов в двойственной сети. При соединении замкнутых ветвей в сеть часть контуров размыкается, в двойственной сети соединяются разомкнутые ветви и столько же разомкнутых путей замыкается. Если в одной сети происходит разъединение узла, связывающего ветви и контур размыкается, то в двойственной сети происходит слияние узлов тех же ветвей, а соответствующий разомкнутый путь замыкается. Основные свойства изменения структуры двойственных сетей представлены в таблице.

### Соответствие преобразования структуры двойственных сетей

	Заданная сеть	Двойственная сеть
Тип соединения ветвей	параллельное	последовательное
Ориентация ветвей	встречная	одинаковая
Преобразование структуры	слияние узлов	разделение узлов
– изменение соединений	$J' = J - I$	$\underline{J}' = \underline{J} + I$
• изменение замкнутых путей (контуров)	возникает контур, тогда: $m' = m + I$	исчезает контур, тогда: $\underline{m}' = \underline{m} - I$
• изменение разомкнутых путей	исчезает разомкнутый путь, тогда: $j' = j - I$	возникает разомкнутый путь $\underline{j}' = \underline{j} + I$

При изменении структуры меняется количество замкнутых и разомкнутых путей в каждой сети, однако в двух двойственных сетях сумма замкнутых и сумма разомкнутых путей остается прежняя.

В результате можно отметить, что существуют следующие *инварианты двойственных сетей*, которые имеют место при любой структуре связи ветвей:

1. количество ветвей в каждой сети одинаково и постоянно  $n = \underline{n} = const$ ;
2. сумма независимых контуров в двух сетях постоянна:  $m + \underline{m} = n = const$ ;
3. сумма независимых разомкнутых путей в двух сетях постоянна:  $j + \underline{j} = n = const$ ;
4. полное число узлов в двух сетях постоянно:  $J + \underline{J} = n + 2s = const$ ;
5. сумма модулей степеней узлов в двух сетях, определяющая ориентацию ветвей относительно узлов, есть величина постоянная:  $q_a + \underline{q}_a = q_0 = n + \underline{n} = 2n = const$ .

Первый инвариант показывает, что размерность полного пространства сети постоянна при данной группе преобразований структуры, т.е. число элементов-ветвей не меняется. Меняется только размерность подпространств замкнутых и разомкнутых путей при разделении или соединении узлов. Второй и третий инварианты показывают, что в двух двойственных сетях суммарная размерность подпространств, как замкнутых путей, так и разомкнутых путей, постоянна при любых изменениях структуры, хотя в каждой из сетей эти размерности меняются. Четвертый инвариант показывает, что в двух сетях не меняется суммарное число узлов, которые определяют конфигурацию структуры сетей. Пятый инвариант показывает, что ветви в двух сетях дополняют друг друга по ориентации, и каждая ветвь реализует обе своих возможных ориентации.

#### 2.4.5. Ориентация и двойственность

Рассмотрим подробнее инвариант, связанный с ориентацией ветвей, в особенности с их взаимной ориентацией в двойственных сетях. Свойство ориентации ветвей, взаимной ориентации ветвей в сети вводится до выбора системы координат, т.е. до выбора путей в сети, и связанных с путями матриц преобразования. Двойственные сети возникают парами

одновременно, их структуры изменяются так, что сохраняется двойственность. Таким образом, при задании ориентации ветвей в одной сети, ветви в двойственной сети должны сразу получить определенную ориентацию. Это тензорное свойство, оно сохраняется при изменении координат, т.е. при изменении выбора путей, структуры двойственных сетей. Ориентация ветвей определяет знаки в матрицах преобразования путей.

Вопросы, связанные с выбором, сохранением, изменением ориентации ветвей в двойственных сетях имеют фундаментальный характер. Прежде всего, заметим, что само понятие двойственности связано с ориентацией, обусловлено существованием ориентации, направления. Дело в том, что движение вообще, в том числе движение потоков в сети, связано с направлением. Движение есть перемещение из одной области в другую область пространства (пространства протяженностей, или пространства длительностей, т.е. времени). Перемещение предполагает указание направления. Наличие одного направления предполагает существование обратного, противоположного направления. Движение потока предполагает наличие границ, некоторой «трубки», в пределах которой происходит движение в определенном направлении. В этом состоит асимметрия движения, связанная с выбором одной из двух возможностей. Для сохранения баланса должно существовать одновременно обратное направление движения, но в границах другой «трубки». Смысл двойственности состоит в том, что реализуются не только два варианта пути (возможного движения), т.е. замкнутый и разомкнутый, но также реализуются два варианта возможного движения по этому пути – в одном направлении, и в противоположном направлении. Заметим, что силовые линии, как «трубки» для перемещения электромагнитного потока, изучал Фарадей, а вслед за ним Максвелл. Силовые линии составляют структуру пространства в концепции электромагнитного поля, однако двойственная составляющая поля не изучена. В разделе 2.1.4 отмечено, что при изменении структуры ориентация ветвей однозначно определяет соответствие соединяемых и разъединяемых узлов в двойственных сетях. Если в данной сети соединяются начальные узлы ветвей, то в двойственной сети разделяются также начальные узлы тех же ветвей. И наоборот.

Следствием инварианта, связанного с реализацией двух возможных видов ориентации каждой ветви по отношению к другим ветвям, является ортогональность матриц преобразования двойственных сетей:

$$\begin{aligned} C_a^0 &= \underline{A}_0^a = (\underline{C}_a^0)_t^{-1} \text{ и} \\ A_0^a &= \underline{C}_a^0 = (\underline{A}_0^a)_t^{-1}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Или это можно записать иначе:

$$\begin{aligned} C_a^0 \underline{C}_a^0 &= \mathbf{1}, \text{ и} \\ A_0^a \underline{A}_0^a &= \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.36)$$



В каждой сети существует также своя ортогональность матриц преобразования:

$$\begin{aligned} C_a^0 &= (A_0^a)_i^{-1} \text{ и} \\ \underline{A}_0^a &= (\underline{C}_a^0)_i^{-1}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Суть этой ортогональности в том, что если в одной сети меняется направление ветви по отношению к другим связанным с нею ветвям, то одновременно меняется и направление той же ветви в двойственной сети по отношению к связанным с нею ветвям.

Изменения в матрицах преобразования происходят тогда, когда в процессе изменения соединений одна или несколько ветвей образуют новый контур или попадают в старый контур в качестве новых ветвей. Очевидно, что любая новая ветвь подключается к сети либо одним узлом, либо двумя узлами. В разделе 2.1.3 было показано, что подключение одного узла не меняет соотношения замкнутых и разомкнутых ветвей, поскольку исчезает и узел и подсистема (независимая подсеть), которую до того представляла собой данная ветвь. Подключить новую ветвь сразу двумя узлами можно двумя способами:

- соединить этой ветвью два имеющихся узла; тогда число разомкнутых путей  $j$  не изменится, а число контуров  $m$  возрастет на единицу;
- разделить, расслоить два имеющихся узла и вклинить эту ветвь между ними; тогда число узлов  $J$  и разомкнутых путей  $j$  возрастет на единицу, а число контуров  $m$  не изменится.

Для того чтобы указанные выше инварианты двойственности оставались постоянными, при каждом подключении новой ветви *должны* возникать оба варианта, причем один из них реализуется в заданной сети, а другой – в двойственной сети. Таким образом, если в одной сети новая ветвь вклинивается между двумя другими, то в другой сети она подключается к их стыку, добавляя в одном случае разомкнутый путь, а в другом случае замкнутый путь.

Если в одной сети ветвь ориентирована одинаково с уже включенными ветвями, то в двойственной сети она *должна быть* ориентирована противоположно с теми же ветвями. Взаимная ориентация ветвей определяется в контурах: последовательно – в одном направлении, или противоположно – навстречу друг другу; а также в узлах: если ветви все входят в узел или выходят, то они ориентированы противоположно; а если одна входит, а другая выходит – то они ориентированы одинаково.

На рис. 2.16.а показан фрагмент данной сети с последовательной ориентацией ветвей, и более тонкими линиями – двойственной сети со встречной ориентацией ветвей. На рис. 2.16.б показан тот же фрагмент, но с добавлением ветви  $b_4$ , которая в данной сети вставлена в контур за счет расщепления узла  $A$  и добавления нового узла  $A'$  (появился новый  $j$ -путь), с той же ориентацией в одинаковом направлении с ветвями  $b_1$  и  $b_3$ . В двойственной сети ветвь  $\underline{b}_4$  подключается к узлу  $B$ , образуя в двойственной сети где-то за пределами рисунка вторым

узлом замкнутый контур (показан пунктиром) и с ориентацией, противоположной ветвям, с которыми в данной сети она была последовательна, в данном случае это  $\underline{b}_1$  и  $\underline{b}_3$ .

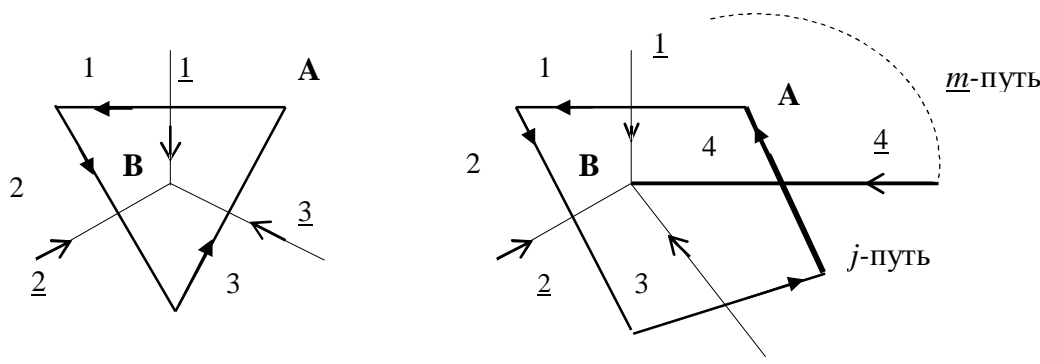


Рис. 2.16. Изменение ориентации в двойственных сетях при добавлении ветви

Изменение направления ветвей отражается в изменении знаков элементов, представляющих пути в матрицах преобразования. Например, для сети на рис. 2.15.а плюс единица в столбце 3 (строка 1) матрицы преобразования  $C_a^0$  в (2.33) показывает, что ветвь  $b_3$  ориентирована в том же направлении, что и ветви  $b_1$  и  $b_2$ . При этом минус единицы в столбце  $\underline{1}$  матрицы преобразования  $\underline{C}_a^0$  в (2.34) показывают, что ветвь  $\underline{b}_3$  ориентирована в противоположном направлении, чем ветви  $\underline{b}_1$  и  $\underline{b}_2$  в двойственной сети на рис. 2.15.б.

Сами по себе *изменения соединения ветвей в сетях образуют группу*:

- \* любое соединение ветвей есть сеть;
- \* любые два последовательных изменения соединений можно выполнить за один шаг или в любой очередности с тем же результатом;
- \* отсутствие соединений есть единичный элемент;
- \* соединению соответствует обратный процесс – разъединение, и наоборот.

Этому соответствует группа матриц преобразования путей в сети, рассмотренная выше. Если в одной сети свободные ветви все замкнуты, то в другой, двойственной сети свободные ветви составляют разомкнутые пути. Переход от свободных контуров к связанной сети происходит за счет размыкания контуров. Появляются разомкнутые пути, а контуры включают в себя новые ветви.

Одновременно в двойственной сети замыкание части свободных разомкнутых путей переводит, преобразует их в связанную сеть. Появляются контуры, включающие в себя новые ветви, а в матрицах преобразования появляются новые ненулевые элементы.

Матрицы преобразования в сетях частично соответствуют матрицам графов. Так, матрица  ${}^m C_0^\alpha$  – это цикломатическая матрица, а матрица  $({}^j A_a^0)_t$  – это матрица разрезов соответствующего графа. Однако в теории графов эти матрицы прямоугольные, они не предполагают возможности изменений при изменении структуры. В теории двойственных

сетей матрицы преобразования путей квадратные, однако, при расчетах используется та прямоугольная часть этих матриц, которая соответствует размерности базисов замкнутых или разомкнутых путей. В матрицах преобразования «лишние» столбцы и строки содержат запас возможности изменений структуры – появление и исчезновение новых путей.

Это значит, например, что при соединении ветвей, которое порождает новый контур, в матрице  ${}^m C$ , обеспечивающей расчет сети при внутренних воздействиях, появляется новый столбец. Одновременно в матрице  ${}^j C$  на один столбец становится меньше. При этом в матрице  ${}^j A$ , обеспечивающей расчет сети при внешних воздействиях, один столбец исчезает, а в матрице  ${}^m A$  на один столбец становится больше.

В двойственной сети (при возникновении контура в заданной сети) один контур исчезает, а на один разомкнутый путь в базисе становится больше. Это значит, что в матрице  ${}^m \underline{C} = {}^j A$ , обеспечивающей расчет двойственной сети при внутренних воздействиях, на один столбец становится меньше. Одновременно в матрице  ${}^j \underline{C} = {}^m A$  появляется новый столбец. При этом в матрице  ${}^j \underline{A} = {}^m C$ , обеспечивающей расчет двойственной сети при внешних воздействиях, на один столбец становится больше, а в матрице, дополняющей ее до квадратной, т.е. в матрице  ${}^m \underline{A} = {}^j C$  один столбец исчезает.

Таким образом, замкнутой ветви, определяющей замкнутый путь в одной сети, соответствует ветвь, определяющая разомкнутый путь в двойственной сети; заданной ориентации ветви по отношению к узлам (границам) в одной сети соответствует противоположная ориентация такой же ветви в двойственной сети. Следовательно, двойственность обеспечивает полноту возможных ориентаций ветвей и путей в структуре двух двойственных сетей.

Структуру двойственной сети можно определить с помощью ортогональной матрицы преобразования, которая является единственной к заданной матрице преобразования путей базиса. Знаки при ненулевых элементах матриц преобразования определяют направление ориентации каждой ветви по отношению к базису путей. Как было показано, в каждой сети возможны две равноправные противоположные ориентации ветвей и путей. Т.е. если сменить направления у всех ветвей и всех путей в сети на противоположные, то матрица преобразования не изменится. Таким образом, построив «каркас» структуры двойственной сети с помощью областей и узлов, можно выбрать в этой сети два варианта ориентации связанных ветвей и ориентации путей, выбранных в такой сети.

Однако пути – это координаты в заданном пространстве сети, которые являются вторичными по отношению к основным элементам. Сеть определяют ветви, а связи их границ образуют узлы и эти узлы определяют данную конфигурацию структуры. Если задать ориентацию каждой из свободных ветвей, и сохранять ее при соединении ветвей в сеть, то

каждая ветвь будет выходить из одного своего узла (границы), и входить в другой свой узел. Таким образом, ориентация ветвей по отношению к узлам (границам) задана еще до введения путей. Это тензорное свойство сети, которое существует независимо от того, введены координаты, т.е. пути, или не введены. При введении координат-путей ориентация ветвей принимает по отношению к этим путям определенное положительное или отрицательное значение, которое выражается знаком при соответствующем элементе в матрице преобразования путей.

Для представления связи ветвей и узлов с учетом их взаимной ориентации вводят матрицу инцидентностей (если ветвь соединена с узлом, то говорят, что они инцидентны). Эту матрицу обозначим как  $M_0^1$ , где индекс 0 обозначает 0-симплексы, узлы, которые связаны с 1-симплексами, ветвями. Столбцы  $M_0^1$  перечисляют узлы, а строки перечисляют ветви сети. В каждой строке знак  $-1$  стоит в столбце узла, из которого данная ветвь выходит, а знак  $+1$  стоит в столбце узла, в который данная ветвь входит. Введенная ранее «степень узла» равна алгебраической сумме по столбцу, который данному узлу соответствует. Матрица инцидентностей однозначно определяет структуру сети, т.е. как соединены между собой ветви границами, образующими узлы. При соединении и разъединении в сети, если меняется количество узлов, или меняется инцидентность узлов и ветвей, то меняется и матрица инцидентностей.

В заданной сети можно изменить направления у всех ветвей и всех путей на противоположные, т.е. можно выбрать два варианта ориентации ветвей и ориентации путей. В двойственной сети также можно изменить направления у всех ветвей и всех путей на противоположные, и при этом матрица преобразования не изменится, т.е. также можно выбрать два равноправных варианта ориентации ветвей и ориентации путей. Однако при изменении ориентации ветвей (по отношению к узлам) соответствующие матрицы инцидентностей для заданной сети и для двойственной сети, хотя и останутся прежними по составу ненулевых элементов, но знаки при этих ненулевых элементах изменятся на противоположные.

Например, матрица инцидентностей для сети на рис. 2.5, в которой четыре ветви соединены тремя узлами А, В и С, имеет вид следующий:

$$M_0^1 = \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \text{Сумма} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{А} & \text{В} & \text{С} \\ \hline -1 & & +1 \\ \hline -1 & +1 & \\ \hline & -1 & +1 \\ \hline & -1 & +1 \\ \hline -2 & -1 & +3 \\ \hline \end{array} = 0$$

В нижней строке показана сумма ориентации ветвей по каждому столбцу (степень соответствующего узла), а справа сумма ориентации всех столбцов. Она равна нулю, поскольку каждая ветвь выходит из одного узла и входит в другой узел.

Какой вид должна иметь матрица инцидентий для двойственной сети? Рассмотрим это на примере сети, которую уже анализировали ранее.

На рис. 2.17 представлена сеть, аналогичная сети на рис. 2.5. Двойственная сеть также имеет четыре ветви (обозначены тонкими линиями), соединенные в узлах D, E и F, которые обозначены кружками. Здесь на рис. 2.17.а представлены рассмотренные далее выбор ориентации ветвей для первого из рассматриваемых узлов в двойственной сети. На рис. 2.17.б показано, как выбранная ориентация одной из ветвей для первого узла, определяет ориентацию других ветвей для последующих узлов, инцидентных с данной ветвью.

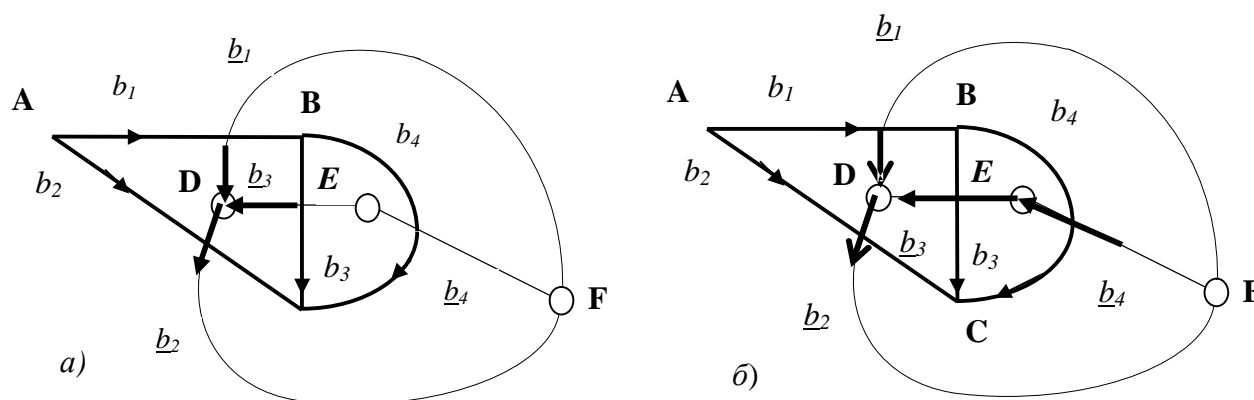


Рис. 2.17. Ориентация ветвей в двойственных сетях

- а) – выбор (назначение) ориентации ветвей  $b_1, b_2, b_3$  в двойственной сети для первого узла D  
 б) – задание ориентации  $b_4$  ветви для следующего узла E по выбранной ориентации ветви  $b_3$

По построению, совокупность ветвей, входящих в узел в двойственной сети, образует контур (область), замкнутый путь в исходной сети. И наоборот, каждый узел в исходной сети охватывается контуром (областью) в двойственной сети. Это является отражением известного в геометрии свойства двойственности точек и плоскостей, о чем говорилось в главе 1. Сумма ориентации ветвей относительно узла в одной сети равна сумме ориентации ветвей в контуре (ячейке), который охватывает этот узел, в двойственной сети. Наряду со степенью узла введем степень контура-ячейки, как сумму ориентации ветвей контура, имеющих одно направление, минус сумма ориентации ветвей имеющих противоположное направление. Степени контура и охватываемого им узла в двойственных сетях равны друг другу.

Выбор (назначение) ориентации ветвей в двойственной сети начнем с первого (любого) узла, относительно которого ориентации ветвей можно выбрать в одну сторону, или в

другую сторону. Ветви, получившие ориентацию относительно первого узла, связаны также с другими узлами, в которые входят другие ветви. Ориентации других ветвей зависят от выбора ориентации первых ветвей, и определяются уже в соответствии с этим выбором.

**Введем обозначения.** Обозначим сумму ориентации ветвей одной сети относительно узла  $A$  (степень узла) как  $q_A$ , сумму ориентации ветвей в контуре двойственной сети, охватывающем этот узел (степень контура), как  $q_{m_A}$ . В соответствии со сказанным выше о равенстве степени узла и степени охватывающего его контура,  $q_A = q_{m_A}$ . Ориентацию ветви  $b_x$  относительно, например, узла  $A$  обозначим как  $q_A(b_x)$ . Ориентацию ветви  $b_x$  относительно контура  $m_A$  (ячейки, охватывающей узел  $A$ ) обозначим как  $q_{m_A}(b_x)$ .

Рассмотрим ориентацию ветвей в контуре заданной сети, который охватывает узел  $D$ , выбранный в качестве первого узла, в двойственной сети на рис. 2.17.а:

$$q_{mD} = + q_{mD}(b_1) + q_{mD}(b_2) + q_{mD}(b_3) = + 1 - 1 + 1 = +1.$$

Такой же должна быть и сумма ориентации ветвей в узле  $D$  двойственной сети:

$$q_D = q_{mD} = + 1 = + q_D(\underline{b}_1) + q_D(\underline{b}_2) + q_D(\underline{b}_3).$$

Ориентации в узле  $D$  показаны на рис. 2.17.а, слева. В данном случае, для первого узла, эту ориентацию ветвей можно задать произвольно, но в соответствии с ранее принятым соглашением считаем, что ориентация ветви входящей в узел, равна  $+1$ , ветви, выходящей из узла равна  $-1$ . Выберем ориентации этих ветвей на рис. 2.17.а так, как это показано жирными стрелками, т.е. ветви  $\underline{b}_1$ ,  $\underline{b}_3$  входят в узел  $D$  в двойственной сети, а ветвь  $\underline{b}_2$  выходит из этого узла. В данном примере остается определить ориентацию ветви  $\underline{b}_4$  в двойственной сети. Эту ориентацию можно определить по узлу  $E$ , которому инцидентны ветви  $\underline{b}_3$  и  $\underline{b}_4$ . В соответствующем контуре (ячейке) данной сети  $m_E$ , ветви  $b_3$  и  $b_4$  ориентированы противоположно, навстречу друг другу, т.е.

$$q_{mE} = + q_{mE}(b_3) + q_{mE}(b_4) = + 1 - 1 = 0.$$

Такой же должна быть и сумма ориентации ветвей в узле  $E$  двойственной сети:

$$q_E = q_{mE} = 0 = + q_E(\underline{b}_3) + q_E(\underline{b}_4).$$

Ориентации в узле  $E$  показаны на рис. 2.17.б. Здесь ориентация ветви  $\underline{b}_3$  уже задана: в узел  $D$  эта ветвь входит с  $q_D(\underline{b}_3) = +1$ , следовательно, из узла  $E$  она выходит, имея значение  $q_E(\underline{b}_3) = -1$ . Для того чтобы  $q_E = 0$ , ориентация ветви  $\underline{b}_4$  в узле  $E$  должна равняться  $+1$ , т.е.  $q_E(\underline{b}_4) = +1$ . Таким образом, ветвь  $\underline{b}_4$  входит в узел  $E$ , и соединена в двойственной сети с ветвью  $\underline{b}_3$  последовательно, друг за другом. В исходной сети, как нетрудно видеть, эти ветви были соединены навстречу друг другу. При этом, как принято говорить в электротехнике, в данной сети эти ветви соединены параллельно, а в двойственной сети – последовательно. То есть и в этом отношении двойственные сети дополняют друг друга.

Затем можно *проверить правильность выбора ориентации* по оставшемуся узлу  $F$  и соответствующему ему контуру  $m_F$ . Узлу  $F$  инцидентны ветви  $\underline{b}_1$ ,  $\underline{b}_2$  и  $\underline{b}_4$ . В соответствующем «внешнем» контуре (бесконечной ячейке) данной сети, при условии его обхода против часовой стрелки, ветви  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_4$  имеют ориентации следующие:

$$q_{mF} = +q_{mF}(b_1) + q_{mF}(b_2) + q_{mF}(b_4) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

Такой же должна быть и сумма ориентации ветвей в узле  $F$  двойственной сети:

$$q_F = q_{mF} = -1 = +q_F(\underline{b}_1) + q_F(\underline{b}_2) + q_F(\underline{b}_4).$$

Здесь все ориентации ветвей уже заданы: в узел входит ветвь  $\underline{b}_2$  с  $q_F(\underline{b}_2) = +1$ , а выходят ветви  $\underline{b}_1$  и  $\underline{b}_4$  с  $q_F(\underline{b}_1) = -1$  и  $q_F(\underline{b}_4) = -1$ . Можно видеть, что эти ориентации ветвей, инцидентных узлу  $F$  не противоречат полученным ранее ориентациям ветвей в узле  $E$  и узле  $D$ . Ориентации ветвей в узле  $F$  показаны отдельно на рис. 2.18. Они такие же, как и для ветвей на рис. 2.17.б. Таким образом, получен однозначный и непротиворечивый выбор ориентации ветвей в двойственной сети по ориентациям ветвей в заданной сети.

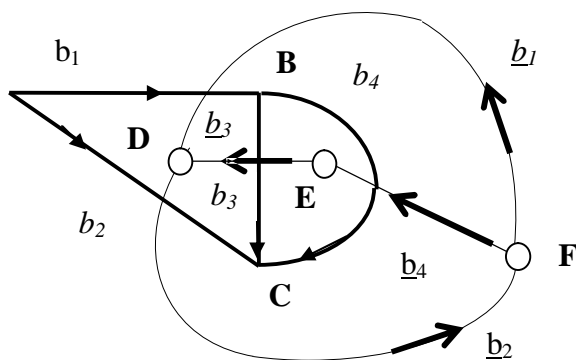


Рис. 2.18. Проверка правильности выбора ориентации ветвей в двойственной сети

На первый взгляд кажется, что ориентации ветвей в контуре  $m_F$  могут быть выбраны произвольно, лишь бы их сумма составляла требуемую степень контура, равную в данном случае минус единице. При обходе указанного контура по часовой стрелке сумма ориентаций составит плюс единицу, а при обходе против часовой стрелки – минус единицу, поскольку ориентации самих ветвей заданы исходно. Таким образом, степень контура зависит от выбора направления обхода контура. При изменении направления обхода меняется знак степени контура. Степень узла также зависит от выбора того, считать ли направление ветви в узел за плюс единицу, или за минус единицу. Отсюда видно, что направление ориентации всегда связано с выбором одного из двух возможных вариантов.

Надо еще договориться, при каких условиях степени контуров в двойственных сетях будут соответствовать степеням узлов. Дело в том, что направление обхода контура заранее не установлено – какое из них считать положительным.

Вместе с тем, обратим внимание, что указанная степень узла  $F$  и соответствующая ориентация инцидентных ему ветвей в двойственной сети возможна только при условии, что в контуре  $m_F$  исходной сети ориентации ветвей имеют такое направление, что  $q_{mF} = -1$ . Если ориентация контура, т.е. направление его обхода в исходной сети окажется в противоположном направлении, т.е.  $q_{mF} = +1$ , то в двойственной сети ориентации соответствующих ветвей окажутся в противоречии с ранее уже выбранными (заданными) ориентациями. Отсюда видно, что связь между ориентациями ветвей в данной сети и ветвей в двойственной сети имеет более строгую форму, чем ожидалось.

Задав ориентацию ветвей относительно одного узла в двойственной сети, мы задаем этим (диктуем) ориентации ветвей относительно других узлов, в соответствии с равенством степеней узлов и охватывающих их ячеек-контуров. Это с одной стороны. С другой стороны, мы диктуем тем самым ориентации контурам-ячейкам в исходной сети, если только степени соответствующих ячеек не равны нулю. Это задает то соответствие между ориентацией замкнутых и разомкнутых путей в двойственных сетях, которое отражается в ортогональности их матриц преобразования. Таким образом, выбор путей базиса в сети произволен (при условии независимости путей), но в двойственной сети выбранные пути задают конфигурацию путей, а также их ориентацию.

В соответствии с конфигурацией полученной ориентации ветвей, матрица инцидентий  $\underline{M}_0^I$  для двойственной сети, в которой четыре ветви соединены тремя узлами  $D$ ,  $E$  и  $F$ , имеет вид следующий:

$$\underline{M}_0^I = \begin{array}{l} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \\ \underline{b}_4 \\ \text{Сумма} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & D & E & F \\ \hline & +1 & & -1 \\ \hline & -1 & & +1 \\ \hline & +1 & -1 & \\ \hline & & +1 & -1 \\ \hline & +1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} = 0$$

В нижней строке показана сумма ориентации ветвей по каждому столбцу (степень соответствующего узла), а справа сумма ориентации всех столбцов. Поскольку каждая ветвь выходит из одного узла и входит в другой узел, то эта сумма равна нулю. В соответствии с (2.32), сумма модулей степеней узлов в двойственных сетях равна сумме числа их ветвей, т.е. удвоенному количеству ветвей в исходной (или двойственной) сети, т.е. равна 8.

$$q_0 = q_a + \underline{q}_a = \sum |q_i| + \sum |q_i| = |q_A| + |q_B| + |q_C| + |q_D| + |q_E| + |q_F| =$$



$$= |-2| + |-1| + |+3| + |+1| + |0| + |-1| = 6 + 2 = n + \underline{n} = 8.$$

Какой-либо закономерности между матрицами инцидентий для данной сети и двойственной сети не существует. Более того, матрицы инцидентий могут иметь различный вид при изменении структуры сетей. Например, рассмотрим две сети на рис. 2.19, где в одной сети четыре ветви соединены параллельно двумя узлами и образуют три контура, а в двойственной сети четыре узла и один контур.

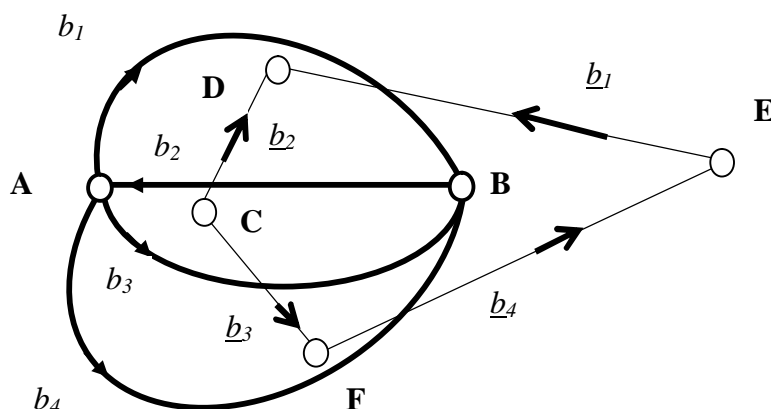


Рис. 2.19. В данной сети 2 узла, а в двойственной сети 4 узла – ориентация ветвей

Ориентации ветвей в сетях на рис 2.19 определены по алгоритму, который описан выше. В соответствии с полученной ориентацией ветвей, матрица инцидентий  $M_0^1$  для данной сети (жирные линии), два узла, A и B, имеет вид следующий:

$$M_0^1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{Сумма} \end{array} \begin{array}{cc} & A & B \\ \hline b_1 & -1 & +1 \\ b_2 & +1 & -1 \\ b_3 & -1 & +1 \\ b_4 & -1 & +1 \\ \hline & -2 & +2 & = 0 \end{array}$$

Матрица инцидентий  $\underline{M}_0^1$  для двойственной сети на рис 2.19 (показана тонкими линиями), в которой четыре ветви  $b_1, b_2, b_3, b_4$  соединяют четыре узла C, D, E и F, имеет вид следующий:

$$\underline{M}_0^1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{Сумма} \end{array} \begin{array}{cccc} & C & D & E & F \\ \hline b_1 & & +1 & -1 & \\ b_2 & -1 & +1 & & \\ b_3 & -1 & & & +1 \\ b_4 & & & +1 & -1 \\ \hline & -2 & +2 & 0 & 0 & = 0 \end{array}$$

В соответствии с (2.32), сумма модулей степеней узлов в двойственных сетях равна удвоенному количеству ветвей, т.е. равна 8.

$$\begin{aligned} q_0 &= q_a + \underline{q}_a = \sum |q_i| + \sum |\underline{q}_i| = (|q_A| + |q_B|) + (|q_C| + |q_D| + |q_E| + |q_F|) = \\ &= |-2| + |+2| + |-2| + |+2| + |0| + |0| = 4 + 4 = n + \underline{n} = 8. \end{aligned}$$

Таким образом, изменение структуры связей ветвей сетей, которые были представлены на рис. 2.17, привело к изменению их матриц инциденций. Это те же сети, но совершенно другие графы. Соотношение между модулями степеней для них также выполняется.

Рассмотрим матрицы инциденций для сети рис. 2.10 и двойственной к ней сети, которые представлены на рис. 2.20. Здесь двойственная сеть представлена жирными линиями, а исходная – тонкими линиями.

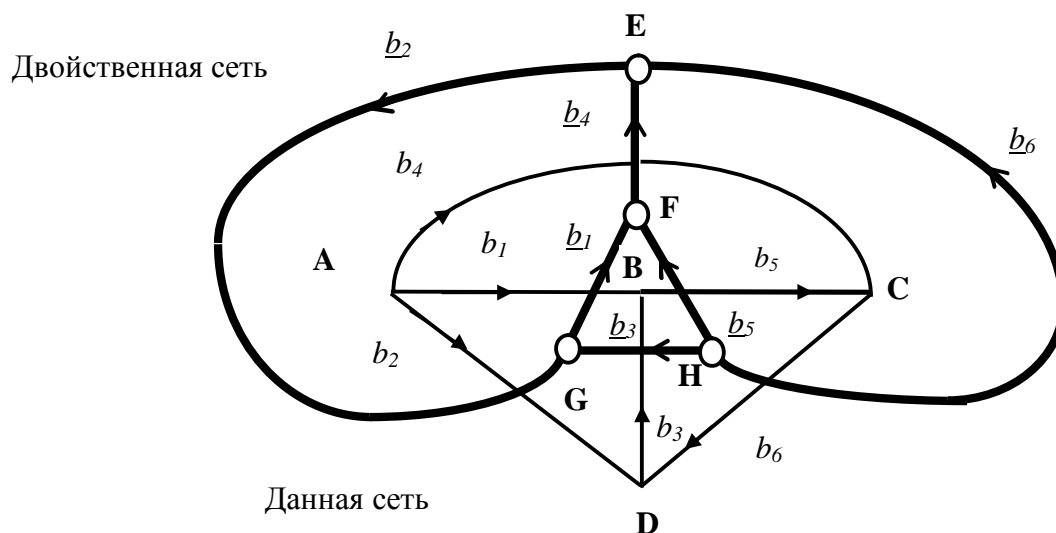


Рис. 2.20. Ориентация ветвей в двойственных сетях из 6 ветвей

Эти двойственные сети обладают одинаковыми топологическими параметрами.

- В данной сети:  $n = 6$ ,  $J = 4$ ,  $s = 1$ ,  $j = 3$ ,  $m = 3$ .
- В двойственной сети:  $\underline{n} = 6$ ,  $\underline{J} = 4$ ,  $\underline{s} = 1$ ,  $\underline{j} = 3$ ,  $\underline{m} = 3$ .

Однако матрицы инциденций у них разные. Ориентация ветвей в исходной сети задана такая же, как и на рис. 2.10. Ориентацию ветвей в двойственной сети получим в соответствии с тем же алгоритмом, который использовался в предыдущем случае построения ориентации ветвей для сетей на рис. 2.17. Для этого можно начать с узла  $F$  двойственной сети, контур-ячейку для которого составляют ветви  $b_1$ ,  $b_4$  и  $b_5$  в данной сети, выбрать первые ориентации для ветвей  $\underline{b}_1$ ,  $\underline{b}_4$  и  $\underline{b}_5$  и так далее. Полученные ориентации ветвей представлены стрелками на ветвях двойственной сети.

Матрица инциденций  $M_0^I$  для данной сети, с узлами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  на рис. 2.20 имеет вид следующий (сумма степеней узлов равна нулю):

	$A$	$B$	$C$	$D$	
$b_1$	-1	+1			
$b_2$	-1			+1	
$b_3$		+1		-1	
$b_4$	-1		+1		
$b_5$		-1	+1		
$b_6$			-1	+1	
Сумма	-3	+1	+1	+1	= 0

Матрица инциденций для  $M_0^I$  для двойственной сети, с узлами  $E, F, G$  и  $H$ , которые выделены кружками на рис. 2.20 имеет вид следующий (сумма степеней узлов равна нулю):

$$M_0^I = \begin{array}{c} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \\ \underline{b}_4 \\ \underline{b}_5 \\ \underline{b}_6 \\ \text{Сумма} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & F & G & H \\ \hline & +1 & -1 & \\ \hline -1 & & +1 & \\ \hline & & +1 & -1 \\ \hline +1 & -1 & & \\ \hline & +1 & & -1 \\ \hline +1 & & & -1 \\ \hline +1 & +1 & +1 & -3 \\ \hline \end{array} = 0$$

В соответствии с (2.32), сумма модулей степеней узлов в двух двойственных сетях равна удвоенному количеству ветвей, т.е. равна 12.

$$q_0 = q_a + q_a = \sum |q_i| + \sum |q_i| = (|q_A| + |q_B| + |q_C| + |q_D|) + (|q_E| + |q_F| + |q_G| + |q_H|) = \\ = |-3| + |+1| + |+1| + |+1| + |+1| + |+1| + |+1| + |-3| = 6 + 6 = n + \underline{n} = 12.$$

Таким образом, представленная в (2.32) закономерность, которая состоит в том, что сумма модулей степеней узлов в двух двойственных сетях равна сумме числа их ветвей, дает алгоритм получения ориентации ветвей в двойственной сети. С помощью этого алгоритма можно получить матрицу инциденций двойственной сети, которая определяет ее структуру. В структуре можно выбрать пути и получить матрицу преобразования путей в двойственной сети. Таким образом, можно установить соответствие между ориентацией (направлением) ветвей в двойственных сетях еще до введения координат-путей.

Можно также поступить наоборот, и использовать матрицу преобразования путей в двойственной сети. Она равна транспонированной матрице обратного преобразования путей в исходной сети, и ортогональна матрице преобразования путей от свободных ветвей к связанным ветвям в исходной сети. Ортогональность обеспечивает единственность, т.е. соединяя ветви в соответствии с составом ненулевых элементов в путях-столбцах матрицы преобразования  $\underline{C}_a^0 = A_a^0$ , можно построить структуру двойственной сети. По этой структуре можно затем построить матрицу инциденций двойственной сети.

Например, матрицы преобразования, соответствующие выбору путей, который показан для сети на рис. 2.10.а, были представлены в разделе 2.3.2.

На рис. 2.20, по сравнению с рис. 2.10, направления ветвей  $b_3$  и  $b_5$  в исходной сети изменены на обратные. Выбор путей при этом остался прежний, как на рис. 2.10.а по этой причине матрицы преобразования отличаются от тех, которые даны в разделе 2.3.2. Исходная сеть с выбранными путями представлена отдельно на рис. 2.21.

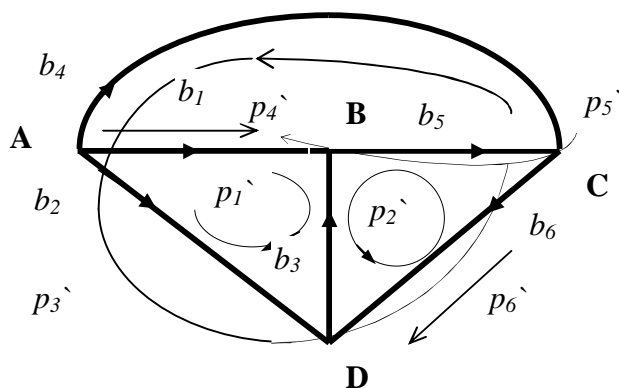


Рис. 2.21. Выбор путей в исходной сети рис. 2.20 из 6 ветвей

Матрица *прямого* преобразования путей свободных ветвей в пути связанных ветвей для сети на рис. 2.20 имеет вид:

	$p_1^0$	$p_2^0$	$p_3^0$	$p_4^0$	$p_5^0$	$p_6^0$	
$p_1^`$	1	-1	-1				$m$
$p_2^`$			-1		-1	-1	$m$
$p_3^`$		1		-1		-1	$m$
$C_a^0 = p_4^`$	1						$j$
$p_5^`$					-1		$j$
$p_6^`$						1	$j$

Далее выразим ветви, точнее пути в базисе свободных ветвей, через пути соответствующих базисов в сети связанных ветвей, тогда получим матрицы обратных преобразований. Матрица *обратного* преобразования путей связанных ветвей в пути свободных ветвей  $A_0^a$  имеет следующий вид:

	$p_1^`$	$p_2^`$	$p_3^`$	$p_4^`$	$p_5^`$	$p_6^`$	
$p_1^0$				1			
$p_2^0$	-1	1		1	-1	1	
$p_3^0$		-1			1	-1	
$A_0^a = p_4^0$	-1	1	-1	1	-1		
$p_5^0$					-1		
$p_6^0$						1	
	$m$	$m$	$m$	$j$	$j$	$j$	

Можно проверить, что эти матрицы обратные, т.е. что выполняется  $C_a^0 A_0^a = I$ . Таким образом, для заданной сети получены прямые и обратные матрицы преобразования от базиса путей свободных ветвей к базису путей связанных ветвей и обратно. При этом:

- матрица  $C_a^0$  преобразуют пути свободных ветвей в пути связанных ветвей
- матрица  $A_0^a$  преобразуют пути связанных ветвей в пути свободных ветвей.

Транспонированная матрица  $A_0^a$  является матрицей *прямого* преобразования базиса путей свободных ветвей в базис пути связанных ветвей *двойственной сети*  $\underline{C}_a^0$ , которая, соответственно имеет вид:

$$\underline{C}_a^0 = A_0^a =$$

	$p_1^0$	$p_2^0$	$p_3^0$	$p_4^0$	$p_5^0$	$p_6^0$	
$p_1$		-1		-1			$i$
$p_2$		1	-1	1			$i$
$p_3$				-1			$i$
$p_4$	1	1		1			$m$
$p_5$		-1	1	-1	-1		$m$
$p_6$		1	-1			1	$m$

Помимо транспонирования, в матрице преобразования двойственной сети замкнутые и разомкнутые пути меняются местами. Эти пути показаны в двойственной сети на рис. 2.22, кроме пути  $p_2$ , который соединяет узлы  $H$  и  $F$ , а проходит по ветвям  $+b_2$ ,  $-b_3$  и  $+b_4$ .

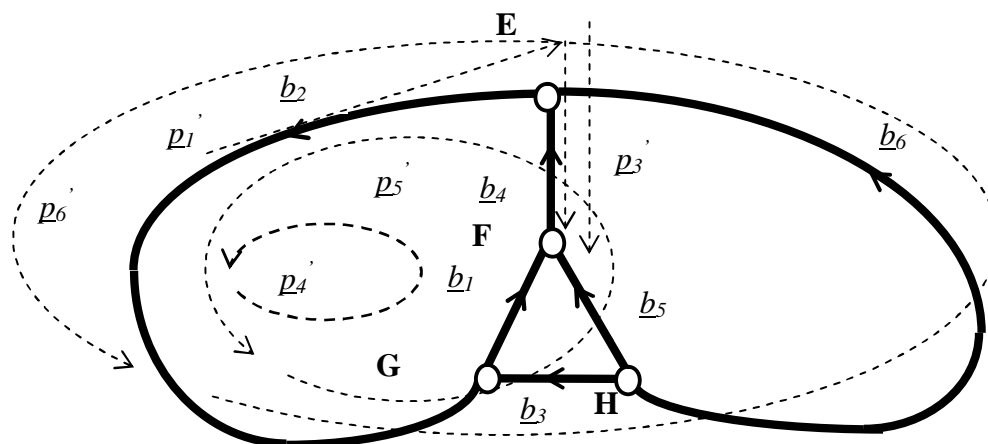


Рис. 2.22. Выбор путей в двойственной сети рис. 2.20 из 6 ветвей

Матрица инцидентий однозначно определяет конфигурацию структуры сети, граф сети. Использование матрицы инцидентий имеет практическое значение для применения тензорного метода двойственных сетей в информационно-аналитических системах управления сложными системами, в том числе управления устойчивым развитием. Матрица инцидентий позволяет автоматизировать процесс построения матриц преобразования путей, которые необходимы для тензорных преобразований.

Автор предложил алгоритм (Петров, 1984) построения одного из вариантов матрицы преобразования по матрице инцидентий. Это важно для сложных сетей из многих элементов, когда матрица инцидентий для сети получается однозначно регулярным образом, путем просмотра связей ветвей и узлов, а выбор базисов замкнутых и разомкнутых путей не очевиден. Все матрицы преобразования путей равноправны, поскольку равноправны все допустимые выборы координат в пространстве (в данном случае в пространстве сети), поэтому построение хотя бы одного варианта базиса путей и соответствующей матрицы преобразования, позволяет приступить к решению задачи.

Суть данного алгоритма состоит в последовательном обходе строк и столбцов матрицы  $M_0^1$  для построения столбцов матрицы  $C_a^0 = ({}^m C, {}^j C)$ , которые соответствуют рассмотренным в конце раздела 2.2.2 условиям построения базисов замкнутых и разомкнутых путей. Напомним, что условия построения базиса путей состоит в том, что:

- разомкнутые пути должны охватить все узлы;
- замкнутые пути должны охватить все ветви (включая входящие в разомкнутые пути).

Таким образом, столбцы подматрицы  ${}^m C$  должны содержать все ветви, причем каждый новый столбец, представляющий независимый путь, должен добавить хотя бы одну новую ветвь к уже охваченным ветвям. Критерием нахождения замкнутого пути в матрице  $M_0^1$  является возврат в исходную точку поиска, т.е. в первый ненулевой элемент этой матрицы при начале очередного поиска. Полученный при этом набор ветвей составляет очередной найденный путь. Критерием завершения построения подматрицы  ${}^m C$  является прохождение всех строк матрицы  $M_0^1$ , т.е. отсутствие новых ветвей.

Столбцы подматрицы  ${}^j C$  должны содержать все узлы. Если при поиске нет возврата в исходную точку поиска, т.е. в первый ненулевой элемент, то получен разомкнутый путь. В качестве первого разомкнутого пути можно взять ветвь первой строки матрицы  $M_0^1$ , соединяющую два узла. Следующий разомкнутый путь начинается с любого ненулевого элемента в столбцах-узлах первого пути. Если таковых нет, а это значит, что первая ветвь образует отдельную подсеть, то в качестве следующего разомкнутого пути выбирается вторая строка-ветвь, и т.д. Критерием нахождения независимого разомкнутого пути в матрице  $M_0^1$  является наличие при поиске хотя бы одного нового столбца, представляющего узел, представленного в матрице  $M_0^1$ . Поиск заканчивается, когда все узлы-столбцы попали хотя бы в один разомкнутый путь. Полученные разомкнутые пути составляют базис, а соответствующие столбцы – подматрицу  ${}^j C$  матрицы  $C_a^0$ .

## 2.5. Метрика и структура двойственных сетей

При изменении числа узлов в одной сети меняются размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей. В результате меняется абсолютная величина вектора (внешнего, заданного в разомкнутых путях, или внутреннего, заданного в замкнутых путях). Относительно таких векторов (представляющих процессы, потоки энергии в сети, системе) одна сеть не образует полного пространства. Такое пространство образуют только две двойственных сети. В геометрии объекты не меняются при изменении системы координат.

Для двух двойственных сетей при изменении структуры постоянны суммы размерностей подпространств замкнутых и разомкнутых путей, квадрат величины вектора. Заданный вектор расположен одновременно в двух сетях. Матрицы преобразования путей двойственных сетей связывает инвариант, который обеспечивает преобразованиям структуры свойства, аналогичные группе преобразования координат в геометрии.

### 2.5.1. Метрика в геометрии

*Сходство* аффинной геометрии и геометрии сети. Оказывается, что понятие метрики (и связанные с этим понятия расстояния, абсолютной величины вектора и т.д.) не следуют из ранее введенных понятий, и требуют введения двойственного пространства.

*Различие* состоит в том, что в геометрии абсолютная величина вектора инвариантна относительно преобразований координат в одном пространстве (поэтому они образуют группу), а в сети величина вектора становится инвариантом преобразования структуры *двух* двойственных сетей.

Метрика, расстояние на множестве  $X$  – это определенная на декартовом произведении  $X * X$  функция  $r$  с неотрицательными действительными значениями, удовлетворяющая для любых  $x, y \in X$  условиям:

- $r(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$  (аксиома тождества);
- $r(x, y) + r(y, z) \geq r(x, z)$  – (аксиома треугольника);
- $r(x, y) = r(y, x)$  – (аксиома симметрии).

Множество  $X$ , наделенное некоторой метрикой, называется метрическим пространством. В качестве метрики здесь будем рассматривать функцию, которую можно трактовать как величину вектора в многомерном пространстве:

$$r(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$$

В римановом пространстве метрика определяется метрическим тензором или линейной квадратичной формой, которая в некотором смысле представляет собой аналог приведенной выше функции (см., например, *Куратовский К.*, 1966).

В геометрии метрика вводится через понятия скалярного произведения и двойственного пространства. Из ранее введенных понятий (линейной независимости векторов, базисов, ковариантных и контравариантных законов преобразования) не следует понятие *расстояние между двумя точками* векторного пространства. Это обстоятельство отмечал в «Пролегоменах» И. Кант. «Что прямая линия есть кратчайшая между двумя точками, это – синтетическое понятие, так как мое понятие прямого не содержит ничего о величине, а содержит только качество. Понятие кратчайшего, следовательно, целиком прибавляется, и никаким расчленением не может быть извлечено из понятия прямой линии. Здесь, следовательно, необходимо прибегнуть к помощи созерцания, посредством которого только и возможен синтез». (Кант, 1783, соч., т. 4 (1), с. 83).

Рассмотрим введение скалярного произведения и двойственного пространства в геометрии (Вейль, 1986, гл. 1), а затем по аналогии – для пространства путей в сети.

Функция  $L(r)$  произвольного вектора  $\mathbf{r}$ , имеющая вид:

$$L(r) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (2.38)$$

называется *линейной формой* (Вейль, 1986, с.29). Это понятие инвариантно в смысле аффинной геометрии и удовлетворяет свойствам, определяющим векторное пространство. В системе координат  $e_i$  вектор  $\mathbf{r}$  представляется в виде  $r = x^i e_i$ , тогда для линейной формы  $L(r)$ :

$$L(r) = x^i L(e_i) = a_i x^i, \text{ где } a_i = L(e_i).$$

При переходе к другой системе координат по отношению к базису компоненты вектора преобразуются контравариантно, а линейная форма принимает вид:

$$a_i x^i = a_r x^i,$$

откуда получаем, что коэффициенты линейной формы преобразуются контравариантно относительно компонент  $x^i$  вектора  $\mathbf{r}$ , а, следовательно, они преобразуются ковариантно по отношению к векторам базиса.

Как компоненты вектора  $x^i$ , так и коэффициенты линейной формы  $a_i$  можно рассматривать как равноправные переменные. Когда не все  $a_i$  равны нулю, тогда уравнение  $L(r) = 0$  определяет  $(n-1)$ -мерное подпространство, гиперплоскость, в которой лежит вектор  $\mathbf{r}$ , если его компоненты удовлетворяют этому уравнению, и можно рассмотреть множество всех векторов, лежащих в такой плоскости. Но можно также рассмотреть множество всех плоскостей, проходящих через данный ненулевой вектор. Коэффициенты линейной формы можно рассматривать как второе векторное пространство, той же размерности, что и первое.

Это второе пространство назовем двойственным пространством, обозначим его как  $\underline{P}$ . По компонентам  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  вектора  $\mathbf{q}$  из  $\underline{P}$  и  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  вектора  $\mathbf{r}$  из  $\underline{P}$  можно построить скалярное произведение:

$$(\mathbf{q} \mathbf{r}) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n, \quad (2.39)$$



которое инвариантно, поскольку при разложении сомножителей этого произведения в новой системе координат, они преобразуются по противоположным законам и в силу ортогональности их матриц преобразования значение произведения не изменится.

Вейль подчеркивает, что *двойственное пространство* вводится дополнительно, синтезируется с ранее введенными понятиями, а не выводится из них аналитически. Этот шаг необходим для введения понятия *абсолютной величины вектора* с помощью *квадрата абсолютной величины* (Вейль Г., 1986, с. 30). Квадрат абсолютной величины вектора  $\mathbf{r}$  есть действительное число  $r^2$ , которое в случае евклидовой геометрии является суммой квадратов его компонент. А в общем случае – это положительно определенная эрмитова форма от компонент вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r}^2 = \underline{x}_1 x_1 + \underline{x}_2 x_2 + \dots + \underline{x}_n x_n, \quad (2.40)$$

где подчеркивание обозначает комплексно сопряженное число.<sup>4</sup>

Система координат называется *нормальной*, если квадрат длины вектора  $\mathbf{r}^2$  выражается формулой (2.40). Преобразования, которые переводят одну нормальную систему координат в другую нормальную, оставляя форму (2.40) инвариантом, называются *унитарными*. Они аналогичны ортогональным преобразованиям в аналитической геометрии.

Для унитарного пространства комплексно сопряженное пространство совпадает с двойственным к нему пространством, т.е. вектор  $\underline{\mathbf{r}}$ , комплексно сопряженный к  $\mathbf{r}$ , можно одновременно рассматривать как двойственный к нему. Таким образом, квадрат абсолютной величины вектора остается инвариантом преобразований координат в данном и в двойственном пространстве, размерности которых одинаковы<sup>5</sup>, абсолютная величина вектора полностью принадлежит пространству, в котором он задан, а переход от аффинной к метрической геометрии можно осуществить введением аксиомы: *Квадрат абсолютного значения вектора  $\mathbf{r}$  есть действительное число  $r^2$ , которое является положительно определенной эрмитовой формой от компонент вектора  $\mathbf{r}$ .*

Предполагается, что квадрат по каждой компоненте составляется из произведения компоненты  $x$  данного пространства и комплексно сопряженной компоненты  $\underline{x}$  из

<sup>4</sup> Для комплексных чисел умножение на комплексно сопряженное необходимо, чтобы  $r^2$  обращалась в нуль только тогда, когда все слагаемые обратились в нуль. В нашем случае речь идет пока о действительных, а не о комплексных числах, как у Вейля, поэтому далее будем говорить о положительно определенной квадратичной форме.

<sup>5</sup> Если есть  $m$ -мерное линейное пространство  $\mathbf{R}$ , натянутое на линейно независимые векторы  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ , то пусть вектор  $\mathbf{q}$  принадлежит пространству  $\mathbf{Q}$ , только тогда, когда он перпендикулярен всем векторам из  $\mathbf{R}$ . Из этого следует, что  $\mathbf{Q}$  является  $(n - m)$ -мерным, дополняющим  $\mathbf{R}$  до полного  $n$ -мерного, пространства  $\mathbf{R} + \mathbf{Q}$ , поскольку если сумма векторов из этих двух пространств равна нулю, то это означает, что вектор принадлежит обоим пространствам, а, следовательно, перпендикулярен сам себе, что возможно только в случае, если он равен нулю. Отсюда следует, что, оперируя с унитарными преобразованиями можно всегда найти инвариантные подпространства (составляющие целое пространство), в которых векторы не меняют своей величины при таких преобразованиях.

двойственного пространства. Метрические свойства пространства определяет, как отмечалось, фундаментальная матрица  $g_{\alpha\beta}$ , представляющая собой произведение векторов базиса:

$$g_{ab} = (\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b^t)$$

Эта матрица для ортогональных векторов базиса в евклидовой геометрии представляет собой единичную матрицу, а для базиса на рис. 2.12 – матрицу:

$$g_{ab} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \cos q \\ \cos q & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.41)$$

Обратная матрица к фундаментальной матрице (они представляют метрический тензор) определяется через взаимный базис:  $g^{ab} = (\mathbf{p}^a \mathbf{p}^b_t)$ , где  $g_{ab} g^{ab} = \mathbf{1}$ .

### 2.5.2. Метрика в сети

Для сети фундаментальную матрицу, определяющую метрику, введем аналогично, с помощью попарного произведения векторов базисов путей. Это произведение также отличается от скалярного произведения компонент двух векторов. Скалярное произведение компонент векторов получается при умножении вектора-строки на вектор-столбец и дает число (скаляр), например,  $A = (a, b, c)_t * (d, e, f) =$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \boxed{A = a d + b e + c f}$$

Если умножить наоборот, вектор-столбец на вектор-строку, то получится матрица, например:  $A = (d, e, f) * (a, b, c)_t =$

$$\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d a & d b & d c \\ e a & e b & e c \\ f a & f b & f c \end{bmatrix}$$

Построив такое произведение двух векторов базисных путей, получим для сети матрицу  $Z_{ab}$ , аналогичную фундаментальной матрице  $g_{ab}$  в геометрии. Элементами этой матрицы могут быть произвольные рациональные (и даже комплексные) числа. Если не заданы веса ветвей, то получим единичную матрицу, поскольку каждый путь содержит только ту ветвь, по которой проходит, и не зависит от других. Если для ветвей веса заданы, то их значения являются мерой взаимодействия путей.

Будем для простоты считать, что в свободных ветвях  $\alpha_0$  сети пути либо все замкнутые, либо все разомкнутые. Тогда в двойственной  $\underline{\alpha}_0$  сети, наоборот: пути – все разомкнутые или все замкнутые. Полагаем, что базис замкнутых путей-контуров в данной сети есть прямой базис, обозначается как  ${}^m p_a^0$ . Матрица  $Z_{ab}$  такого базиса равна  $Z_{ab} = ({}^m p_a^0 {}^m p_b^0_t)$ .



Матрицы  $g^{ab}$  и  $g_{ab}$  в геометрии связывают ковариантные и контравариантные геометрические объекты (говорят, что они поднимают и опускают индексы), например:

$$p^a = g^{ab} p_b, \text{ или } p_a = g_{ab} p^b.$$

Это соотношение получим, приравняв через единичную матрицу произведение взаимных базисов  $(p_a p^b_t)$  и произведение взаимно обратных метрических тензоров, выраженных через произведение базисов, т.е.  $g_{ab} g^{ab} = (p_a p_{bt} p^a p^b_t)$ :

$$d_a^b = (p_a p^b_t) = (p_a p_{bt} p^a p^b_t) = (g_{ab} p^a p^b_t).$$

Взяв отсюда соотношение  $p_a p^b_t = g_{ab} p^a p^b_t$ , и приравняв коэффициенты при векторах  $p^b_t$ , получим связь прямого и взаимного базисов через метрический тензор.

Аналогичную роль такие матрицы играют для сетей, связывая прямые и взаимные базисы в сетях, а также базисы двойственных сетей, например:

- для данной сети:  ${}^m p_a^0 = Z_{ab} {}^m p^b_0 = \underline{Y}^{ab} {}^m p^b_0 = \underline{Y}^{ab} j^b_0$ ,
- для двойственной сети:  ${}^j p_a^0 = \underline{Z}_{ab} {}^j p^b_0 = Y^{ab} j^b_0 = Y^{ab} {}^m p^b_0$ .

Здесь последние равенства показывают, что двойственность сетей состоит, помимо прочего, в том, что ковариантные компоненты (прямые базисы) связаны через метрический тензор, а контравариантные компоненты (взаимные базисы) двойственных сетей связаны через обратный метрический тензор. Таким образом:

$${}^m p_a^0 = \underline{Y}^{ab} j^b_0, j^b_0 = Y^{ab} {}^m p^b_0 \text{ и}$$

$${}^m p^b_0 = j^b_0, j^b_0 = {}^m p^b_0.$$

Таким образом, *одинаковые по верхним или нижним индексам объекты в двойственных сетях ведут себя как противоположные по отношению друг к другу в смысле метрики*, т.е. они связаны метрическим тензором как ковариантные и контравариантные объекты. Наоборот, ковариантные и контравариантные объекты в двойственных сетях ведут себя как одинаковые объекты в смысле метрики. Далее это будет важно при выводе формул расчета изменений процессов в сети при изменении структуры.

*Полученные соотношения связывают в сети структуру, представленную базисами путей, и метрику, описывающую физические, материальные свойства ветвей.* Метрика, представленная матрицей  $g_{\alpha\beta}$ , определяет масштабы расстояний по каждому независимому направлению в сети и этим задает масштабы, абсолютную величину вектора, т.е. понятия, аналогичные расстоянию между векторами и т.д.

Если ветви не имеют связанных с ними рациональных чисел – весов, и метрические матрицы для свободных ветвей единичные, то есть,  $Z_{ab} = Y^{ab} = \mathbf{1}$ , то для связанных ветвей они определяются произведением матриц преобразования векторов базиса путей:

$$Z_{ab'} = C_a^a (C_{b'}^b)_t \text{ и} \quad (2.44)$$

$$Y^{ab'} = A_a^{a'} (A_b^{b'})_t$$

В этом случае численные значения контравариантных и ковариантных компонент векторов совпадают и для свободных ветвей и для связанных ветвей. На этой основе можно установить новые соотношения между подматрицами матриц преобразования путей свободных ветвей в пути связанных ветвей. Эти соотношения нетривиальны, поскольку в связанной сети появляются независимые базисы как замкнутых, так и разомкнутых путей. Действительно, если для связанных сетей подставить в  $Z_{ab} Y^{ab} = Z_{a'b'} Y^{a'b'} = I$ , их выражения через  $C_a^{a'}$  и  $A_a^{a'}$  из (2.42) и (2.44), затем принять, что  $Z_{ab} = Y^{ab} = I$ , и разделить их на подматрицы  $m$  и  $j$  путей, то получим:

$$\begin{aligned} Z_{a'b'} Y^{a'b'} &= (C_a^{a'} (C_b^{b'})_t) (A_a^{a'} (A_b^{b'})_t) = I = \\ &= m \begin{array}{c|c} & j \\ \hline m & {}^m C^m C_t \\ j & {}^j C^m C_t \end{array} \begin{array}{c|c} & j \\ \hline m & {}^m A^m A_t \\ j & {}^j A^m A_t \end{array} = m \begin{array}{c|c} & j \\ \hline m & 1 \\ j & 0 \end{array} \begin{array}{c|c} & j \\ \hline m & 0 \\ j & 1 \end{array} = \\ &= \begin{array}{c|c} & j \\ \hline m & {}^m C^m C_t {}^m A^m A_t + {}^m C^j C_t {}^j A^m A_t \\ j & {}^j C^m C_t {}^m A^m A_t + {}^j C^j C_t {}^j A^m A_t \end{array} \end{aligned}$$

Приравнивая каждый элемент в полученной таким образом матрице его значению в единичной матрице, получим соотношения, которые являются следствием метрических свойств сети и которые нельзя вывести из свойств ортогональности матриц преобразования, т.е. из свойств самой структуры сети:

$$\begin{aligned} {}^m C^m C_t {}^m A^m A_t + {}^m C^j C_t {}^j A^m A_t &= I, \\ {}^j C^m C_t {}^m A^m A_t + {}^j C^j C_t {}^j A^m A_t &= I, \\ {}^j C^m C_t {}^m A^m A_t &= -{}^j C^j C_t {}^j A^m A_t, \\ {}^m C^m C_t {}^m A^m A_t &= -{}^m C^j C_t {}^j A^m A_t. \end{aligned} \quad (2.45)$$

При этом последние два выражения нельзя упростить за счет «сокращения» одинаковых сомножителей типа  ${}^j C$  или  ${}^m A_t$  в обеих частях уравнения, поскольку в алгебре матриц это недопустимо. Например,  ${}^m C_t {}^m A^1 - {}^j C_t {}^j A$ , хотя можно было бы ожидать их равенство в третьем и четвертом из уравнений (2.45).

Полученные метрические свойства матриц преобразования *прибавляются* к структурным свойствам. Они не являются следствием ортогональности этих матриц, которая представлена в (2.24). Покажем это на примере матриц преобразования, которые даны в соотношениях (2.33) и (2.34) для двойственных сетей, представленных на рис.2.15 а и б:

$$C_a^{a'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} m \\ j \\ j \end{matrix} \quad A_a^{a'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} m \\ j \\ j \end{matrix} \quad (2.46)$$

Получим фундаментальные матрицы для соответствующих связанных сетей.

Для заданной сети:  $Z_{a'b'} = C_a^{a'} C_a^{a' t} =$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

Для двойственной сети  $Y^{a'b'} = A_a^{a'} A_a^{a' t} =$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

Таким образом, в связанных двойственных сетях метрические матрицы отличаются как от единичных матриц, так и друг от друга. При этом в сетях из свободных ветвей эти матрицы были одинаковы. Эти матрицы обратные, т.е.:  $Z_{a'b'} Y^{a'b'} = \mathbf{1}$ . Индексы  $m$  и  $j$  в матрицах  $C_a^{a'}$  и  $A_a^{a'}$  показывают те подматрицы, к которым относятся данные строки. Подставляя их в первое уравнение (2.45) получим для первого слагаемого

$${}^m C {}^m C_t {}^m A {}^m A_t =$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ \\ \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Для второго слагаемого  ${}^m C {}^j C_t {}^j A {}^m A_t =$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ \\ \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Сумма этих двух слагаемых равна как раз  $3 - 2 = 1$ , при совпадении индексов путей, к которым они относятся, т.е. данное соотношение выполняется. Аналогично можно проверить и выполнение других соотношений (2.45). Заметим также, что если в третьем (или четвертом) из уравнений (2.45) попытаться упростить выражение, полагая, что умножение справа и слева на одинаковые матрицы дает равенство только для одинаковых матриц, т.е. заменить выражение:

$${}^j C {}^m C_t {}^m A {}^m A_t = -{}^j C ({}^j C_t {}^j A) {}^m A_t,$$

на выражение  ${}^m C_t {}^m A = -{}^j C_t {}^j A$ , то получим при умножении слева матрицу:

$${}^m C_t {}^m A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \underline{1} \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \hline 1 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

а при умножении справа – матрицу:

$${}^j C_t {}^j A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} \\ \hline & \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline -1 & 1 & \\ \hline -1 & & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \hline & & \\ \hline -1 & 1 & \\ \hline -1 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Эти матрицы, хотя и представлены в одинаковых координатах, но никоим образом не равны друг другу, т.е. получаем, что  ${}^m C_t {}^m A \neq {}^j C_t {}^j A$ . В то же время, полное выполнение умножений на одни и те же матрицы в (2.45) дает в результате:

$${}^j C ({}^m C_t {}^m A) {}^m A_t = \begin{array}{c} \underline{1} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad {}^j C ({}^j C_t {}^j A) {}^m A_t = \begin{array}{c} \underline{1} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

что соответствует данному соотношению.

Если ветви имеют связанные с ними веса, представленные рациональными числами, то формулы (2.45) принципиально не изменятся; только добавятся соответствующие блоки матриц  $Z$  и  $Y$  между матрицами преобразования.

Таким образом, получаем для матриц преобразования соотношения *двух типов*: одни на основе рассуждений об изменениях в структуре, связанных с изменением числа узлов, и другие на основе рассуждений об изменении метрических свойств сети, происходящих при изменении структуры. Эти соотношения не следуют друг из друга и получены из двух разных составляющих понятий сети – структуры и метрики, таким образом, они представляют собой суждения синтетические.

Несмотря на то, что при изменениях связей, связанных с изменением числа узлов, меняется размерность подпространств замкнутых и разомкнутых путей, базисы этих путей можно выразить друг через друга, поэтому в *каждой одной из двойственных сетей преобразования структуры образуют группу*.

Однако наибольший интерес представляют *векторы других типов*, которые ведут себя как объекты, *наложенные на сеть извне*. Для них появляется другой инвариант и, соответственно, другой алгебраический объект, аналогичный группе преобразований. Этот алгебраический объект можно рассматривать как оператор преобразования структуры двойственных сетей. Важную роль для понимания этого играют преобразования базисов в двойственных сетях, которые имеют противоположный, но двойственный характер.

### 2.5.3. Преобразования базисов в двойственных сетях

Графы двойственны, если существует такое взаимно однозначное соответствие их ребер, что для каждого множества ребер, составляющих циклический вектор одного графа, соответствующее множество ребер другого графа образует вектор разрезающего множества (Свами, 1984, с.143).

В сетях аналогичная двойственность существует между замкнутыми и разомкнутыми путями. Для сетей из свободных, *несвязанных* ветвей это означает, что каждой замкнутой ветви одной сети соответствует разомкнутая ветвь в двойственной сети, и наоборот. В этом смысле сети на рис. 2.3.ж и на рис. 2.3.а двойственные. Другие примеры двойственных сетей были даны на рис. 2.8 и на рис. 2.15.

Отличие от графов состоит во встречном характере изменения структуры двойственных сетей, при соединении свободных ветвей в сеть. Дело в том, что если в  $\alpha$ -сети свободные ветви все замкнуты (и преобразуются как прямой базис), то в  $\underline{\alpha}$ -сети свободные ветви все разомкнуты (и преобразуются подобно взаимному базису). Или если в одной сети часть свободных ветвей замкнута, а часть разомкнута, то во второй сети картина обратная, но в любом случае – замкнутой свободной ветви в одной сети соответствует разомкнутая ветвь в другой сети. Тогда в  $\alpha$ -сети переход к связанной сети с  $m$  контурами и  $j$  разомкнутыми путями происходит от  $n$  контуров свободных ветвей, а в  $\underline{\alpha}$ -сети происходит переход от  $n$  разомкнутых путей свободных ветвей к связанной сети с обратным соотношением –  $\underline{m} = j$  контуров и  $\underline{j} = m$  разомкнутых путей.

Таким образом, преобразования базисов при связывании свободных ветвей в двойственных сетях происходят в противоположных направлениях: в одной при этом частично размыкаются контуры, а в другой частично замыкаются разомкнутые пути. В каждой из сетей уменьшается число путей исходного типа, т.е. того типа, который имели свободные ветви, поэтому *каждое из этих преобразований является вырожденным*: сети теряют часть исходных степеней свободы, но получают взамен степени в двойственной сети. Таким образом, при изменении структуры сети с изменением числа узлов, размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей (и соответствующие блоки матриц преобразования) меняются. Однако, как показано в разделе 2.4.4, размерности этих подпространств в сумме двух двойственных сетей постоянны.

Тем не менее, при рассмотрении базисов путей и их преобразований можно обнаружить прямые аналогии с метрической геометрией. В разделе 2.4.5 было показано, что матрицы преобразования базисов в двойственных сетях ортогональны благодаря дополнению взаимной ориентации соединяемых ветвей. Кроме прямых базисов  $p_a$  и  $\underline{p}_a$ , существуют также и взаимные базисы  $p^a$  и  $\underline{p}^a$  в каждой из сетей. Взаимный базис в сети



подобен взаимному базису в геометрии, векторы которого задаются как ковариантные, т.е. парой упорядоченных поверхностей, ортогональных по отношению к соответствующим векторам прямого базиса. Взаимные базисы в сети определяются, как и в геометрии, скалярными произведениями типа  $p_a p_t^b = d_a^b$ , (где  $d_a^b = 1$  при  $a = b$ , и  $d_a^b = 0$  в противном случае). В соответствии с этим формулы преобразования базисов при изменении структуры связей в сети имеют следующий вид:

Прямой базис в заданной  $\alpha$  сети преобразуется по формуле:

$$p_{a'} = C_a^a p_a.$$

Взаимный базис в  $\alpha$  сети – по формуле  $p_{a'} p^{a'} = C_a^a p_a p^{a'} = p_a p^a$ , откуда:

$$p^{a'} = A_a^{a'} p^a = (C_a^a)^{-1} p^a.$$

Прямой базис в двойственной  $\underline{\alpha}$  сети преобразуется по формуле:

$$p_{a'} = \underline{C}_a^a p_a = A_a^{a'} p_a. \quad (2.47)$$

Взаимный базис в  $\underline{\alpha}$  сети, аналогично  $\alpha$  сети, преобразуется по формуле:

$$p^{a'} = \underline{A}_a^{a'} p^a = (\underline{C}_a^a)^{-1} p^a = C_a^a p^a. \quad (2.48)$$

При этом заметим, что в двойственной сети матрицы преобразования имеют те же элементы, что и соответствующие ортогональные матрицы исходной сети. Расположение индексов в этих матрицах исходной сети указывает на то, что в двойственной сети прямой базис и взаимный базис меняются ролями по сравнению с прямым базисом и взаимным базисом исходной сети.

До этого момента базисы путей и их преобразования при изменении выбора путей и/или изменении структуры сети формально ничем не отличаются от аналогичных преобразований в геометрии, пример которых был дан ортогональными друг другу системами координат на рис. 2.12.

При появлении в сети произвольного, «наложенного» вектора ситуация меняется. Произвольный вектор в сети может быть задан, возникать, либо в замкнутых путях, либо в разомкнутых путях; поэтому его компоненты располагаются либо в тех, либо в других путях. Полная размерность базиса как замкнутых, так и разомкнутых путей остается постоянной в совокупности двух двойственных сетей, при любых изменениях структуры. По этой причине полностью вектор можно представить (разложить) компонентами в прямом или взаимном базисе в совокупности данной сети и двойственной сети. Таким образом, по аналогии с (2.26), произвольный вектор в сети (или другой геометрический объект) можно представить его компонентами в четырех возможных базисах:

- прямой базис в данной сети и двойственной сети,
- взаимный базис в данной сети и в двойственной сети:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_\alpha + \underline{\mathbf{d}}_\alpha = d^a p_a + \underline{d}^a \underline{p}_a = d_a p^a + \underline{d}_a \underline{p}^a, \quad (2.49)$$

которые в совокупности дают четыре разных набора компонент для одного и того же вектора. В следующем разделе такое представление вектора компонентами более подробно рассмотрено для замкнутых путей и разомкнутых путей.

Абсолютная величина (длина) вектора определяется тогда одинаково в каждой из двойственных сетей, с учетом метрических соотношений в связанной сети, которые представлены в (2.42) и имеет вид для заданной сети, в которой располагается часть вектора  $\mathbf{d}_\alpha$  (подобно (2.27)):

$$|\mathbf{d}_\alpha|^2 = d^a p_a d^b p_b = d^a (p_a p_{bt}) d^b_t = d^a (Z_{ab}) d^b_t = d^a d_{at}, \quad (2.50)$$

где надо помнить, что набор компонент  $d^a$  – это вектор-строка. Аналогично, для двойственной сети, в которой располагается часть вектора  $\underline{\mathbf{d}}_\alpha$ , абсолютная величина вектора имеет вид:

$$|\underline{\mathbf{d}}_\alpha|^2 = \underline{d}^a \underline{p}_a \underline{d}^b \underline{p}_b = \underline{d}^a (\underline{p}_a \underline{p}_{bt}) \underline{d}^b_t = \underline{d}^a (Y^{ab}) \underline{d}^b_t = \underline{d}^a \underline{d}_{at}, \quad (2.51)$$

или можно то же самое записать иначе, с использованием взаимного базиса:

$$|\underline{\mathbf{d}}_\alpha|^2 = \underline{d}^a \underline{p}_a \underline{d}_b \underline{p}^b = \underline{d}^a (\underline{p}_a \underline{p}^b_t) \underline{d}_{bt} = \underline{d}^a (\underline{d}_a^b) \underline{d}_{bt} = \underline{d}^a \underline{d}_{at}. \quad (2.52)$$

При изменении системы координат формулы (2.49–2.52) преобразуются с помощью преобразования новых базисов по формулам типа (2.47–2.48).

Особенность двойственных сетей состоит, как отмечалось, в том, что при связывании свободных ветвей:

- в одной сети производится разъединение контуров,
- в другой сети – замыкание разомкнутых путей.

Таким образом, эти преобразования производятся как бы в противоположных направлениях.

Прямой базис в свободной  $\alpha$  сети  $p_a = {}^m p_a$ , состоящий из контуров, при связывании ветвей преобразуется в базис  $p_a^{\prime}$  связанной  $\alpha^{\prime}$  сети, который можно представить в виде:

$$p_a^{\prime} = ({}^m p_a^{\prime}, {}^j p_a^{\prime}),$$

где контуры и разомкнутые пути сгруппированы по отдельности. Этот базис преобразуется по формуле:

$$p_a^{\prime} = \begin{bmatrix} {}^m C_a^{\prime a} \\ {}^j C_a^{\prime a} \end{bmatrix} {}^m p_a = \begin{matrix} {}^m C_a^{\prime a} {}^m p_a = {}^m p_a^{\prime} \\ {}^j C_a^{\prime a} {}^m p_a = {}^j p_a^{\prime} \end{matrix} \quad (2.53)$$

где часть  $m_0$  свободных, несвязанных контуров при соединении ветвей была разомкнута и превратилась в  $j^{\prime}$  разомкнутых путей связанной сети.

Аналогично в двойственной  $\alpha$  сети, когда свободные разомкнутые ветви с базисом путей  $p_a = {}^j p_a$  связываются в соединенную сеть с базисом  $p_a'$  при помощи двойственной матрицы преобразования, то получим следующее:

$$p_a' = ({}^m p_a, {}^j p_a)_t = \underline{C}_a{}^a p_a (= A_a{}^a p_a = A_a{}^a Z_{ab} p^b),$$

где, как и в исходной сети, аналогично (2.53), имеем:

$$\begin{aligned} {}^m p_a' &= {}^m \underline{C}_a{}^a {}^j p_a = ({}^j A_a{}^a) {}^j p_a; \\ {}^j p_a' &= {}^j \underline{C}_a{}^a {}^m p_a = ({}^m A_a{}^a) {}^m p_a, \end{aligned} \quad (2.54)$$

поскольку число замкнутых путей двойственной сети  $\underline{m}$  равно числу разомкнутых путей исходной сети  $j$ , т.е.  $\underline{m} = j$ , а число разомкнутых путей двойственной сети  $\underline{j}$  равно числу замкнутых путей исходной сети  $m$ , т.е.  $\underline{j} = m$ .

*Замечание.* В каждой сети прямой базис и взаимный базис связаны метрическим тензором. Преобразование базиса в двойственной сети контравариантное по отношению к преобразованию базиса исходной  $\alpha$  сети: матрица преобразования в  $\alpha$  сети  $\underline{C} = A$ , т.е. равна матрице преобразования взаимного базиса в  $\alpha$  сети. Таким образом, в двух сетях *два прямых базиса и два взаимных базиса*, всего четыре базиса, *преобразуются двумя матрицами преобразования*, что связывает обе сети в единую алгебраическую конструкцию.

Показано, что особенность пространства сети состоит в преобразованиях структуры, связанных с изменением числа узлов, при которых меняется размерность подпространств замкнутых и разомкнутых путей. Сами пути при этом выражаются друг через друга, поэтому в одной сети их преобразования образуют группу.

Однако оказывается, что, кроме путей, векторов-путей, *существуют векторы других типов*, которые ведут себя как объекты, *наложенные извне* на пространство сети («внедренные», или воздействующие). Поведение этих векторов при изменении структуры сети показывает, что в двойственных сетях есть инвариант, который отличается от ранее рассмотренных инвариантов, и к ним не сводится. Особенность таких векторов состоит в том, как отмечалось в главе 1, что *эти векторы располагаются либо в замкнутых, либо в разомкнутых путях*, которые при преобразовании структуры ведут себя по отношению друг к другу как ортогональные. В каждой из сетей величина вектора при изменении структуры меняется, а матрицы преобразования прямоугольные и не образуют группу. Однако постоянным оказывается квадрат величины вектора в *сумме двух двойственных сетей*, что обеспечивает возможность преобразований структуры сетей и расположенных в них объектов.

## 2.6. Векторы в пространстве двойственных сетей

Понятие вектора, наложенного на пространство сети, определяет наиболее важные особенности геометрии двойственных сетей.

### 2.6.1. Векторы-процессы в сети

Рассмотрим *векторы, которые не являются путями*, т.е. не принадлежат непосредственно к пространству путей, а как бы «наложены», внедрены в это пространство. В отличие от векторов-путей, будем называть их просто *векторы*. Все предыдущие разделы были подготовкой к их введению. Векторы, наложенные на пространство, в данном случае пространство сети, могут иметь *произвольные рациональные значения по каждой ветви*. Это соответствует определению векторного пространства сети как множества над полем рациональных чисел.

Именно наложенные векторы, их компоненты в базисах путей разного типа (замкнутых путей или разомкнутых путей), их преобразования, а также другие, связанные с ними объекты, имеют важнейшее значение, поскольку они и представляют процессы в сети. Пространство путей в сети играет роль «среды обитания» для этих векторов. Наложённый вектор, в зависимости от способа задания, проявляет себя *только в одном из двух возможных типов путей: либо в разомкнутых путях, либо в замкнутых в путях*. В этом состоит их существенное отличие от произвольных векторов-путей.

В каких путях – разомкнутых или замкнутых путях – располагается, проявляет себя вектор, зависит от того, каким является этот вектор по отношению к самой сети – внешним или внутренним. Если компоненты вектора заданы на границах элементов системы, то они характеризуют взаимодействие системы с внешней средой, тогда компоненты вектора располагаются в базисе разомкнутых путей. Если компоненты вектора заданы в самих ветвях, элементах сети, тогда они характеризуют внутренние процессы в самой системе, компоненты вектора располагаются в базисе замкнутых путей.

Наложённые векторы располагаются в совокупности *всех путей «своего» типа*, которые есть в двух двойственных сетях, т.е. в совокупности либо *всех замкнутых путей*, либо *всех разомкнутых путей*. При этом, разумеется, вектор имеет компоненты во всех ветвях, т.е. элементах сети, системы. Каждая ветвь определяет одно измерение в пространстве сети.

С точки зрения физики, наложенные на сеть векторы с произвольными рациональными компонентами, соответствуют процессам, в виде протекающих по сети потоков энергии, которые проявляют себя (измеряются) в виде откликов одних величин под действием других величин. Роль воздействий могут играть величины двух типов. Это «продольные» величины, измеримые в одной точке – для внешних источников энергии (контравариантные

компоненты). Или это «поперечные» величины, измеримые как разность значений в двух точках (ковариантные компоненты), – для внутренних источников энергии, расположенных в самой сети. В главе 1 понятия продольных и поперечных величин рассмотрены более подробно.

Такие потоки распространяются через ветви сети (системы), обладающие свойствами материи, например, сопротивлением, инерцией. С точки зрения математики, физические свойства материи характеризуются как собственными весами (числами, приписанными ветвям), так и взаимными, отражающими взаимодействие отдельных ветвей. Если воздействия и отклики численно совпадают, то собственные веса единичные, а взаимные – нулевые. Такие сети обладают, как показано, единичной метрической матрицей. Но и в этом случае при переходе от свободных ветвей к связанной сети фундаментальная матрица принимает сложный вид.

Например, в электрической сети токи (измеряются в ветвях) могут протекать под действием напряжений (измеряются как разность значений между эквипотенциальными поверхностями) в структуре связанных ветвей и таким образом распространяется поток электрической энергии. Сами ветви сети существуют и без потока энергии, обладая всеми рассмотренными выше свойствами путей (Крон называл такие сети «мертвыми», а возбужденные, в которых протекает поток энергии – «живыми»). Токи и напряжения играют при этом роли контравариантных и ковариантных компонент вектора потока энергии, наложенного на электрическую сеть.<sup>6</sup>

В математике элементы пространства (множества) принято считать однородными, одинаковыми, а наложенные векторы рассматриваются как принадлежащие к другому пространству, которое «соприкасается» с рассматриваемым. Такие окружающие пространства для математической модели сложной системы могут образовать весьма сложный конгломерат пространств вокруг пространства сети. В этом подходе содержится некоторое противоречие, поскольку статичные элементы множества не предполагают изменений, с которыми связаны все протекающие процессы, а, следовательно, возникают проблемы с введением переменных.<sup>7</sup>

---

<sup>6</sup>Первым, по-видимому, кто обнаружил контравариантный характер токов и ковариантный характер напряжений в электрической цепи, был Герман Вейль (*Weyl H.*, 1923).

<sup>7</sup> В частности, Н. Бурбаки полагают, что «некоторые свойства, например,  $x = x$ , истинны для всех элементов множества, любые два таких свойства эквивалентны» - эта полная часть есть не что иное, как само множество. Напротив, некоторые свойства, например  $x \neq x$ , не истинны ни для какого элемента множества и любые два таких свойства эквивалентны, а определяемая ими часть называется пустой частью множества. (*Н. Бурбаки*, 1965, с. 355). Таким образом, любые переменные, любые изменения элементов делают их не тождественными самим себе и тогда они оказываются в пустой части множества, т.е. фактически выходят из рассмотрения.

В реальном мире мы имеем дело с окружающим *пространством*, обладающим некоторыми геометрическими свойствами, а также *физическими телами*, погруженными в это пространство, расположенными в нем. Тела представляют собой ограниченные участки пространства, наполненные материей. Соединение границ тел между собой образует некоторую *структуру*. В этих телах распространяются *процессы*, потоки энергии, которые можно отобразить, измерить в виде откликов одних величин, возникающих под воздействием других величин. Это позволяет «инертную» основу системы с протекающими процессами (потоками энергии) рассматривать как единую математическую модель в виде пространства путей сети с наложенными на него векторами (представляющими процессы, потоки энергии).

Вектор нового вида, наложенный на пространство сети, будем обозначать буквой **d**. Его можно представить, как отмечалось выше, через контравариантные компоненты  $d^\alpha$  в путях  $p_\alpha$  прямого базиса сети в следующем виде:  $\mathbf{d} = d^a p_a$  или через ковариантные компоненты как  $\mathbf{d} = d_a p^a$  – во взаимном базисе.

Вектор **d** может быть задан двумя способами:

- в совокупности замкнутых путей двух двойственных сетей,  $\alpha$  и  $\underline{\alpha}$ , обозначим как  ${}^m\mathbf{d}$ ,
- в совокупности разомкнутых путей двух двойственных сетей,  $\alpha$  и  $\underline{\alpha}$ , обозначим как  ${}^j\mathbf{d}$ .

Можно задать вектор **d** и в виде комбинации векторов  ${}^m\mathbf{d} + {}^j\mathbf{d}$ , но это будет фактически совокупность независимых векторов в ортогональных подпространствах, где все преобразования будут происходить отдельно, независимо друг от друга. Составляющие таких векторов в элементах системы налагаются друг на друга по принципу суперпозиции.

Введем обозначения для компонент вектора каждого типа в прямом и взаимном базисах двух двойственных сетей.

Заданная сеть		Двойственная сеть	
Компоненты вектора ${}^m\mathbf{d}$ в прямом и взаимном базисах двойственных сетей			
прямой базис, $m$ -путей, ${}^m p_a$	${}^m d^a$	${}^m \underline{d}^a$	прямой базис, $m$ -путей, ${}^m p_a$
взаимный базис ${}^m p^a$	${}^m d_a$	${}^m \underline{d}_a$	взаимный базис ${}^m p^a$
Компоненты вектора ${}^j\mathbf{d}$ в прямом и взаимном базисах двойственных сетей			
прямой базис, $j$ -путей, ${}^j p_a$	${}^j d^a$	${}^j \underline{d}^a$	прямой базис, $j$ -путей, ${}^j p_a$
взаимный базис ${}^j p^a$	${}^j d_a$	${}^j \underline{d}_a$	взаимный базис ${}^j p^a$

Рассмотрим введенные обозначения более подробно.

Если вектор **d** задан в замкнутых путях как  ${}^m\mathbf{d}$ , то он имеет по каждой оси координат (ветви, или пути) две компоненты – контравариантную в прямом базисе, и ковариантную –

во взаимном базисе. Обозначим набор независимых контравариантных компонент как  ${}^m d^a$  в прямом базисе  $m$ -путей, контуров  ${}^m p_a$  и набор ковариантных компонент как  ${}^m d_a$  во взаимном базисе  ${}^m p^a$  в  $\alpha$  сети. Аналогично, обозначим компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в двойственной  $\underline{\alpha}$  сети: в  $m$ -путях в прямом базисе  ${}^m p_a$  – набор компонент вектора как  ${}^m \underline{d}^a$ , а во взаимном базисе  ${}^m p^a$  обозначим его компоненты – как  ${}^m \underline{d}_a$ .

Представление компонент произвольного вектора  $\mathbf{d}$  в базисах четырех видов для двойственных сетей было дано в соотношении (2.49). Разложение заданного в замкнутых путях вектора  ${}^m \mathbf{d}$  по совокупности контуров данной  $\alpha$  сети и двойственной  $\underline{\alpha}$  сети в прямом и взаимном базисе принимает вид:

$${}^m \mathbf{d} = {}^m \mathbf{d}_\alpha + {}^m \underline{\mathbf{d}}_\alpha = {}^m d^a {}^m p_a + {}^m \underline{d}^a {}^m p_a = {}^m d_a {}^m p^a + {}^m \underline{d}_a {}^m p^a. \quad (2.55)$$

Если все контуры сосредоточены в одной из сетей, то во второй сети этот вектор не имеет компонент. Например, если в  $\alpha$  сети ветви не связаны (свободные ветви) и образуют отдельные контуры,  $m$ -пути, то тогда:

$${}^m \mathbf{d} = {}^m d_0^a {}^m p_a^0 = {}^m d_a^0 {}^m p_0^a,$$

где 0 – индекс, показывающий, что это сеть из свободных ветвей. В двойственной  $\underline{\alpha}$  сети при этом все ветви, соответственно, разомкнуты, поэтому вектор  ${}^m \mathbf{d}$  не имеет там компонент, поскольку нет замкнутых путей.

В свободных ветвях – контурах метрика задана матрицей  $Z_{ab}$ , на главной диагонали которой стоят собственные метрические параметры ветвей, а вне диагонали – взаимные метрические параметры, отражающие взаимное влияние ветвей (если такого влияния нет, то матрица диагональная). В этом случае контравариантные и ковариантные компоненты вектора связаны соотношением:

$${}^m d_a^0 = Z_{ab} {}^m d_0^b, \quad (2.56)$$

что соответствует формулам поднимания и опускания индексов в обычной геометрии, рассмотренным в разделе 2.5.2.

Аналогично, если вектор задан в разомкнутых путях, и обозначается как  $\mathbf{d} = {}^j \mathbf{d}$ , то по каждой ветви (или каждому пути) он также имеет две компоненты: контравариантную в прямом базисе и ковариантную – во взаимном базисе. Обозначим набор независимых компонент  ${}^j d^a$  в прямом базисе  $j$ -путей  ${}^j p_a$ , и  ${}^j d_a$  во взаимном базисе  ${}^j p^a$  в  $\alpha$  сети. В двойственной  $\underline{\alpha}$  сети: в  $j$ -путях обозначим набор компонент  ${}^j \underline{d}^a$  в прямом базисе  ${}^j p_a$  и  ${}^j \underline{d}_a$  во взаимном базисе  ${}^j p^a$ . Разложение вектора  ${}^j \mathbf{d}$  в совокупности разомкнутых путей  $\alpha$  и  $\underline{\alpha}$  сетей в прямом и взаимном базисе принимает вид:

$${}^j \mathbf{d} = {}^j \mathbf{d}_\alpha + {}^j \underline{\mathbf{d}}_\alpha = {}^j d^a {}^j p_a + {}^j \underline{d}^a {}^j p_a = {}^j d_a {}^j p^a + {}^j \underline{d}_a {}^j p^a. \quad (2.57)$$

Если все  $j$ -пути сосредоточены в одной из двойственных сетей, то во второй сети этот вектор  ${}^j\mathbf{d}$  не имеет компонент. Например, если в  $\alpha$  сети ветви не связаны и образуют разомкнутые пути, или  $j$ -пути, то:

$${}^j\mathbf{d} = {}^j d_0^a {}^j p_a^0 = {}^j d_a^0 {}^j p_0^a,$$

где индекс 0, показывает, что это сеть из свободных ветвей. В  $\alpha$  сети при этом все ветви замкнуты, поэтому  ${}^j\mathbf{d}$  не имеет там компонент, поскольку нет разомкнутых путей. Свободные сети из отдельных ветвей Крон называл *простейшими* или *примитивными сетями* – primitive network (Крон, 1978).

Пусть в свободных разомкнутых ветвях данной сети метрические параметры заданы матрицей  $Y^{ab} = (Z_{ab})^{-1}$ , на главной диагонали которой стоят собственные метрические параметры каждой ветви, а вне диагонали – метрические параметры, отражающие взаимное влияние несвязанных ветвей (если такого влияния нет, то матрица диагональная). Тогда контравариантные и ковариантные компоненты вектора связаны соотношением:

$${}^j d_0^a = Y^{ab} {}^j d_b^0, \quad (2.58)$$

– аналогично формулам поднимания и опускания индексов.

Итак, вектор (при задании в замкнутых и разомкнутых путях) может иметь по каждому измерению пространства сети (т.е. в каждой ветви, каждом элементе) по две компоненты в прямом базисе и по две – во взаимном базисе в каждой из двойственных сетей. Наличие четырех типов проекций вектора в каждой из двойственных сетей – это аналог разложения обычного вектора по взаимно ортогональным системам координат. Это было показано в разделе 2.4.3 на рис. 2.12, где вектор имеет две компоненты, ковариантная и контравариантная, по каждой оси (в заданной и ортогональной системах координат) прямого базиса и две компоненты по каждой оси координат взаимного базиса. При этом вектор можно задать в замкнутых путях или в разомкнутых путях, а можно задать одновременно и в замкнутых и в разомкнутых путях. То есть, в совокупности *двух* сетей получаем вдвое большее число компонент, равное восьми. Таким образом, *заданный вектор в каждой ветви сети в совокупности замкнутых и разомкнутых путей в двух двойственных сетях может иметь в общей сложности восемь параметров.*

Как отмечалось, сами *замкнутые и разомкнутые пути* равноправно представляют друг друга при изменении базиса в сети с прежней или новой структурой. Однако *по отношению к представлению наложенных векторов* они *независимы и ортогональны*. При изменении структуры в каждой сети уменьшение числа независимых замкнутых путей базиса приводит к росту числа разомкнутых, и наоборот. Таким образом, при изменении структуры, связанном с изменением числа узлов (слияние или разделение границ элементов)



размерности подпространств замкнутых путей и подпространств разомкнутых путей изменяются.

Сумма числа замкнутых путей в совокупности двух двойственных сетей всегда постоянна, остается неизменной (и равна числу ветвей сети). Сумма числа разомкнутых путей в совокупности двух двойственных сетей также всегда постоянна, остается неизменной (равна числу ветвей). В геометрии размерности подпространств не меняются при изменении системы координат, поэтому матрицы преобразования образуют группу.

В каждой отдельной сети изменение числа  $m$  и  $j$  путей не гарантирует существования обратного преобразования (поскольку не существует матрицы, обратной к прямоугольной матрице), поэтому эти преобразования группу не образуют. Однако *постоянство суммы  $m$  и  $j$  путей в двух двойственных сетях позволяет построить такую алгебраическую последовательность (оператор) преобразований компонент вектора, которая обладает свойствами, аналогичными группе.*

Эта последовательность преобразований существует потому, что не меняется сам вектор и квадрат его величины при изменении структуры сетей, поскольку при этом постоянны полные размерности подпространств замкнутых путей *в совокупности двух двойственных сетей*, и разомкнутых путей *в совокупности двух двойственных сетей*. Таким образом, число линейно независимых векторов, составляющих базис замкнутых путей в двух двойственных сетях, или базис разомкнутых путей в двух двойственных сетях, остается постоянным, не меняется.

Это означает, что как бы ни менялось распределение замкнутых и разомкнутых путей между двойственными сетями, сам вектор, наложенный на пространство сети, остается инвариантным, поскольку остается постоянной суммарная размерность базиса, в котором он представлен. Таким образом, вектор в любой структуре двойственных сетей представляется своими компонентами по базисам замкнутых путей, или базисам разомкнутых путей в совокупности двух сетей, а все изменения соединения ветвей рассматриваются как преобразования координат. Компоненты вектора меняются при изменении структуры. Они преобразуются линейно, с помощью умножения на матрицы преобразования путей. То есть, *наложенный на сеть вектор является тензором*. Этот тензор и представляет поток энергии в структуре систем.

Это свойство инвариантности вектора  $\mathbf{d}$ , записанное в (2.55) и (2.57), соответствует обычным представлениям в геометрии о неизменности вектора (или другого тензора) при изменении координат.

В этой связи сделаем несколько замечаний. В классической физике предполагается, что объект не меняется при наблюдении, измерении, т.е. объект не меняется при изменении

положения наблюдателя, при изменении системы координат. В современных физических теориях предполагается, что наблюдение, измерение оказывает влияние на объект наблюдения. Объект после измерения рассматривается как отличающийся от объекта до измерения. Вопрос в том, какова степень изменения, внесенная измеряющим наблюдателем.

Задача измеряющего наблюдателя (исследователя) состоит в том, чтобы по результатам измерения, проводимого в разных системах координат, разными средствами измерения, получить сведения о реальном состоянии объекта, которое он имел бы, если бы не подвергался измерениям. Или определить, какие изменения произошли в объекте при измерении. Определить степень изменения состояния объекта, или его постоянство позволяет уверенность в сопоставимости результатов измерения, сделанных не только в одной системе координат, одними средствами, но также и сделанных в разных системах координат, разными средствами. Такую уверенность обеспечивают тензорные методы преобразования координат, в основе которых предположение о неизменности объекта при изменении систем координат.

Вместе с тем вопрос взаимодействия объекта и наблюдателя за объектом имеет определенное философское значение. Казалось бы, есть процессы в неживой природе, протекающие от галактических масштабов до микромира, которые происходили и до появления живой материи. Живое, во всех его проявлениях, от простейших организмов до высших форм, в лице «человека измеряющего», подчиняется своим законам развития, в ходе которого отражает окружающий мир. Это отражение явлений, процессов в живой и неживой природе можно рассматривать как измерение. В какой-то степени процедура измерения всегда оказывает воздействие на измеряемый объект, следовательно, может его изменить. Задача ученого как раз и состоит в том, чтобы при измерении оказать наименьшее воздействие на объект измерения, изучать его в чистом виде. Это необходимо для получения объективных знаний, минимально искаженных наблюдающим субъектом. Такая объективность называется «воспроизводимость результатов» и является основой любой науки. Если один наблюдатель обнаружил явление, то его должен обнаружить и другой наблюдатель при заданных условиях, хотя бы и в другом месте, в другое время, другими средствами, т.е. в другой системе координат. Иначе «новое» явление будет отнесено к ошибкам конкретного эксперимента. За рубежом журнал научного юмора называется «Журнал невозпроизводимых результатов» (Journal of irreproducible results).

Из разложения вектора по базисным  $m$  или  $j$  путям двойственных сетей получим выражение для квадрата его величины, которое даст *новое соотношение*, связывающее матрицы преобразования в двойственных сетях. Это соотношение по сути своей *синтетическое* по отношению к рассмотренным выше как структурным, так и к метрическим соотношениям и не выводимое из них.

Выражение для *квадрата абсолютной величины вектора в двух сетях* является следствием ортогональности путей в двойственных сетях. В самом деле, рассмотрим,

например, квадрат величины вектора  ${}^m\mathbf{d}$  (заданного в замкнутых путях), используя соотношение (2.55), для замкнутых путей в двух двойственных сетях:

$$\begin{aligned} \zeta^m \mathbf{d} \zeta^2 &= {}^m d_0^a {}^m d_{at}^0 = ({}^m d^a {}^m p_a + {}^m \underline{d}^a {}^m \underline{p}_a) ({}^m d^a {}^m p_a + {}^m \underline{d}^a {}^m \underline{p}_a) = \\ &= ({}^m d^a {}^m p_a {}^m p_{at} {}^m d^a_t) + 2 ({}^m d^a {}^m p_a {}^m \underline{p}_{at} {}^m \underline{d}^a_t) + ({}^m \underline{d}^a {}^m \underline{p}_a {}^m \underline{p}_{at} {}^m \underline{d}^a_t). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Как было показано в разделе 2.5.2 в соотношении (2.43),  $({}^m p_\alpha {}^m \underline{p}_\beta) = 0$ , в силу ортогональности этих базисных путей в двойственных сетях, поэтому средняя скобка, с коэффициентом 2, в соотношении (2.59) равна нулю, и тогда получаем для квадрата величины вектора выражение:

$$\begin{aligned} |{}^m \mathbf{d}|^2 &= {}^m d^a {}^m d_{at}^0 = ({}^m d^a {}^m p_a {}^m p_{at} {}^m d^a_t) + ({}^m \underline{d}^a {}^m \underline{p}_a {}^m \underline{p}_{at} {}^m \underline{d}^a_t) = \\ &= ({}^m d^a {}^m Z_{ab} {}^m d^b_t) + ({}^m \underline{d}^a {}^m \underline{Z}_{ab} {}^m \underline{d}^b_t) = ({}^m d^a {}^m d_{at}) + ({}^m \underline{d}^a {}^m \underline{d}_{at}) = |{}^m \mathbf{d}|^2 + |{}^m \underline{\mathbf{d}}|^2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Это выражение представляет собой сумму произведений контравариантных и ковариантных компонент в базисных контурах данной и двойственной сетей для вектора, заданного в замкнутых путях (замкнутая система).

Проведя аналогичные рассуждения, точно такое же, но двойственное соотношение можно записать и для вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , заданного в разомкнутых путях (открытая система), заменяя при этом все величины на двойственные величины:

$$|{}^j \mathbf{d}|^2 = {}^j d_0^a {}^j d_{at}^0 = ({}^j d^a {}^j d_{at}) + ({}^j \underline{d}^a {}^j \underline{d}_{at}) = |{}^j \mathbf{d}|^2 + |{}^j \underline{\mathbf{d}}|^2. \quad (2.61)$$

Почти аналогично определялся квадрат величины вектора в (2.50–2.51) для сети, или в (2.40) для метрической геометрии, но с той разницей, что теперь слагаемые, составляющие этот квадрат, располагаются в разных сетях, принадлежащих к разным подпространствам. По форме выражение для квадрата величины вектора подобно теореме Пифагора.

Преобразования векторов базисов  $m$  и  $j$  путей при связывании ветвей уже были получены для двойственных сетей: в (2.53) для  $\alpha$  сети и в (2.54) – для  $\underline{\alpha}$  сети. Теперь получим формулы преобразования ковариантных и контравариантных компонент вектора  $\mathbf{d}$  в этих базисах при связывании ветвей в сеть. При этом, как отмечалось, будем использовать следующие *допущения* (аксиомы):

- Вектор  $\mathbf{d}$  не меняется (инвариантен) при изменении структуры  $\alpha$ – $\underline{\alpha}$  сетей. Это соответствует обычному предположению о неизменности произвольного вектора в пространстве, но теперь касается двух подпространств сетей, двойственных и ортогональных друг к другу.
- Вектор  $\mathbf{d}$  задан в путях только одного типа (или замкнутых, или разомкнутых) и при всех преобразованиях структуры (изменениях способов соединения ветвей) двух сетей имеет компоненты только в совокупности путей данного типа и не имеет компонент в путях другого типа.

*Второе допущение* связано с независимостью и ортогональностью замкнутых и разомкнутых путей, что было рассмотрено в предыдущих разделах, в частности, в разделе 2.4.2. То есть, если вектор  $\mathbf{d} = {}^m\mathbf{d}$  имеет ненулевые компоненты в  $m_0$  путях свободных ветвей  $\alpha$  сети, то и в связанных ветвях он будет иметь ненулевые компоненты только в  $m'$  путях данной  $\alpha$  сети, и (или) в  $m'$  путях двойственной  $\underline{\alpha}$  сети. Если вектор  $\mathbf{d} = {}^j\mathbf{d}$  имеет ненулевые компоненты в  $j_0$  путях свободных ветвей  $\alpha$  сети, то и в связанных ветвях он будет иметь ненулевые компоненты только в  $j'$  путях данной  $\alpha$  сети, и (или) в  $j'$  путях двойственной  $\underline{\alpha}$  сети.

Двойственные сети  $\alpha$  и  $\underline{\alpha}$  при задании вектора  $\mathbf{d}$  могут, конечно, меняться местами. Вектор  $\mathbf{d}$ , как отмечалось, может быть задан и в виде комбинации компонент в  $m_0$  и  $j_0$  путях (т.е. одновременно задается и внешнее воздействие, и внутреннее воздействие), но при этом компоненты каждого вида будут далее преобразованы каждая по своим формулам и независимо друг от друга. То есть фактически это будут результаты преобразования разных векторов. Компоненты этих векторов по каждой ветви-оси налагаются друг на друга по принципу суперпозиции. С точки зрения физики, эти компоненты (отклики на источники воздействия разных видов) измеряются в каждой ветви в совокупности как единое целое, хотя можно рассчитать вклад «контурной» и «узловой» составляющей.

### 2.6.2. Задача расчета сети и ее инварианты

Задачу расчета сети можно сформулировать следующим образом. Заданы ветви с их метрическими характеристиками. Заданы источники воздействия на сеть в виде наложенного вектора, (в реальности он представляет собой вектор потока энергии). Возможные преобразования состоят в изменении структуры, т.е. изменении соединения ветвей в двойственных сетях. Необходимо рассчитать распределение вектора (потока энергии) в виде его ковариантных и контравариантных компонент по ветвям двух двойственных сетей при изменении структуры соединения ветвей.

Когда ветви свободны, т.е. не соединены друг с другом (или, что почти то же самое, соединены по одному узлу), то двойственные сети оказываются независимыми и по существу не оказывают влияния друг на друга. Для свободных ветвей задача сети решается обращением метрической матрицы при условии, что каждой ветви соответствует один путь, т.е. пути выбраны по «своим» ветвям. Обратная метрическая матрица в этом случае является матрицей решения. Умножение матрицы решения на вектор воздействия дает вектор откликов, т.е. распределения компонент наложенного вектора по ветвям, которое является решением задачи.

Можно пути в свободных ветвях выбрать иначе, например, проходящими через другие ветви, или через несколько ветвей. Тогда расчет откликов в свободных ветвях производится

как для связанных сетей, но матрицы преобразования все равно остаются квадратными, поскольку количество путей совпадает с количеством ветвей. Такие преобразования можно рассматривать как тождественные, поскольку в результате получаем в качестве матрицы решения такую же обратную метрическую матрицу, как и в предыдущем случае. Пример такого расчета представлен в разделе 3.2.

Пусть вектор  $\mathbf{d} = {}^m\mathbf{d}$  задан в  $m_0$  путях свободных ветвей, которые все были замкнуты, т.е.  $m_0 = n, j_0 = 0$ , а затем связаны в сеть, в результате чего получились  $m'$ -пути в данной сети и  $\underline{m}'$ -пути в двойственной сети. При этом  $m_0 = m' + \underline{m}' = n$ . Тогда, в соответствии с (2.55), его можно разложить в свободных ветвях как вектор  ${}^m\mathbf{d}_0$ , а в связанных ветвях двойственных сетей как сумму векторов  ${}^m\mathbf{d}_\alpha + \underline{m}\mathbf{d}_\alpha$ :

$$\mathbf{d} = {}^m\mathbf{d} = {}^m\mathbf{d}_0 = {}^m d_0^a m p_a^0 = {}^m d^{a'} m p_a + {}^m \underline{d}^{a'} m p_a = {}^m\mathbf{d}_\alpha + \underline{m}\mathbf{d}_\alpha,$$

где штрихи означают, что компоненты вектора относятся к системе координат независимых контуров сети соединенных ветвей, соответственно, заданной сети и двойственной сети. Отсюда, используя (2.53) и (2.54), получим:

$${}^m d_0^a m p_a^0 = {}^m d^{a'} m C_a^{a'} m p_a^0 + {}^m \underline{d}^{a'} j A^{a'} j p_a^0.$$

Поскольку свободные ветви в данной сети первоначально все были замкнуты, то в двойственной сети свободные ветви все были разомкнутыми, т.е.  $\underline{m}_0 = 0$ , а  $j_0 = n$ . Соответственно при соединении получится в базисе разомкнутых путей  $j' = n - m' = \underline{m}'$  путей в данной сети и  $j' = n - \underline{m}' = m'$  путей в двойственной сети. При этом  $j_0 = j' + j' = n$ . Тогда, используя выражение вектора прямого базиса двойственной сети через метрический тензор и вектор прямого базиса заданной сети, получим, что

$$j p_a^0 = \underline{Z}_{ab} j p_b^0 = Y^{ab} j p_b^0 = Y^{ab} m p_b^0.$$

Тогда, приравнивая коэффициенты при одинаковых векторах прямого базиса  ${}^m p_\alpha^0$ , получим формулу преобразования контравариантных компонент вектора  ${}^m\mathbf{d}$ :

$${}^m d_0^a = {}^m d_c^{a'} + {}^m \underline{d}_c^{a'} = {}^m d^{a'} m C_a^{a'} + {}^m \underline{d}^{a'} j A^{a'} j Y^{ab} = ({}^m C_a^{a'})_t {}^m d^{a'} + (j A^{a'} j)_t Y^{ab} \underline{m} d^{b'}, \quad (2.62)$$

где  ${}^m d_c^{a'}$  и  ${}^m \underline{d}_c^{a'}$  обозначают контравариантные компоненты вектора  ${}^m\mathbf{d}$  в отдельных ветвях каждой из двойственных соединенных сетей. Отсюда ясно, что нельзя получить компоненты вектора  ${}^m\mathbf{d}$  для связанной сети непосредственно по их значениям в свободных ветвях, поскольку они распадаются на сумму компонент в двух двойственных сетях и только в сумме дают компоненты полного вектора.

Часть вектора  ${}^m\mathbf{d}$ , которая при связывании свободных ветвей оказалась в данной сети, т.е.  ${}^m\mathbf{d}_\alpha$ , представлена компонентами двух видов. Компоненты  ${}^m d^{a'}$  представляют разложение этого вектора в системе координат независимых контуров связанной сети, а компоненты  ${}^m d_c^{a'}$  представляют разложение этого же вектора, которые он имеет в элементах, отдельных ветвях

связанной сети. Расчет сети по своей сути есть решение системы уравнений, составленных для независимых переменных, которыми в данном случае являются независимые контуры, замкнутые пути. В результате решения получаем значения неизвестных, это компоненты вектора (потока энергии) в контурах. Однако в соединенной сети контуров меньше, чем ветвей, поскольку в процессе соединения часть контуров размыкается, поэтому каждый контур может проходить по нескольким ветвям.

Таким образом, через одну ветвь может проходить несколько контуров. Тогда компоненты вектора в этих контурах,  ${}^m d^a$ , складываются в каждой ветви (в соответствии с их ориентацией) и оказывают на ветвь совокупное воздействие. Для определения результатов этого воздействия необходимо рассчитать компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}_\alpha$  в каждой ветви, т.е. рассчитать  ${}^m d_c^a$ . Это нужно, например, для контроля предельно допустимых значений потока в каждом элементе системы в целях обеспечения безопасности. Именно значения компонент вектора в отдельных ветвях используются для проверки выполнения законов Кирхгоффа в цепи, что служит контролем правильности полученного решения.

Представленные рассуждения точно так же касаются компонент вектора  ${}^m \mathbf{d}_\alpha$  в замкнутых путях  ${}^m \underline{d}^b$  и ветвях  ${}^m \underline{d}_c^a$  двойственной сети. При соответствующих двойственных заменах эти рассуждения касаются также компонент вектора  $\mathbf{d} = {}^j \mathbf{d}$ , т.е. заданного в разомкнутых путях данной сети и двойственной сети.

Проводя аналогичные рассуждения, получим двойственную формулу для компонент вектора  $\mathbf{d} = {}^j \mathbf{d}$ , т.е. заданного в разомкнутых путях. Но здесь надо учитывать разницу между векторами в замкнутых путях  ${}^m \mathbf{d}$ , и в разомкнутых путях  ${}^j \mathbf{d}$ , поскольку их задание по определению имеет двойственное различие. Дело в том, что вектор  ${}^m \mathbf{d}$  задается в свободных замкнутых ветвях ковариантными компонентами  ${}^m d_a$ . То есть, во взаимном базисе  ${}^m p^a$  сети  $\alpha$  этот вектор определяется, задается как:  ${}^m \mathbf{d} = {}^m d_a {}^m p^a$ .

Вектор  ${}^j \mathbf{d}$  задается в свободных разомкнутых ветвях контравариантными компонентами. Таким образом, в прямом базисе этот вектор задается компонентами  ${}^j d^\alpha$  в координатах  ${}^j p_\alpha$  базиса разомкнутых путей:  ${}^j \mathbf{d} = {}^j d^a {}^j p_a$ . Тогда, в соответствии с (2.57), его можно разложить на компоненты в свободных ветвях как вектор  ${}^j \mathbf{d}_0$ . В связанных ветвях двух двойственных сетей этот вектор можно представить контравариантными компонентами в прямых базисах и ковариантными компонентами во взаимных базисах, т.е. как сумму векторов  ${}^j \mathbf{d}_\alpha + {}^j \underline{\mathbf{d}}_\alpha$ :

$$\mathbf{d} = {}^j \mathbf{d} = {}^j \mathbf{d}_0 = {}^j d_0^a {}^j p_a^0 = {}^j d^a {}^j p_a + {}^j \underline{d}^a {}^j \underline{p}_a = {}^j d_a {}^j p^a + {}^j \underline{d}_a {}^j \underline{p}^a = {}^j \mathbf{d}_\alpha + {}^j \underline{\mathbf{d}}_\alpha,$$

где штрихи означают, что компоненты вектора относятся к системе координат независимых разомкнутых путей сети соединенных ветвей, соответственно, заданной сети и двойственной

сети. Таким образом, все величины в (2.62) меняются на двойственные. Тогда ковариантные компоненты вектора  ${}^j\mathbf{d}$  преобразуются по формуле:

$${}^j d_a^0 = {}^j d_a^c + \underline{{}^j d}_a^c = ({}^j A^{a\prime}{}_a)_t \cdot {}^j d_a + ({}^m C_{a\prime}{}^a)_t Z_{ab} \underline{{}^j d}_b. \quad (2.63)$$

Здесь  ${}^j d_a^c$  и  $\underline{{}^j d}_a^c$  обозначают ковариантные компоненты вектора  ${}^j\mathbf{d}$  в отдельных ветвях каждой из двойственных сетей. Эти слагаемые дают преобразование от разомкнутых независимых путей базиса в связанных ветвях (в совокупности двойственных сетей), к значениям компонент вектора в отдельных ветвях, но также *связанной сети*; причем только сумма компонент по обеим двойственным сетям дает исходное значение компоненты  ${}^j\mathbf{d}$  для каждой свободной ветви. Физический смысл введения компонент вектора в путях и в отдельных ветвях двойственных сетей был рассмотрен выше.

Таким образом, соотношения (2.62) и (2.63) показывают, что *получить значения компонент вектора в связанной сети по исходным компонентам в свободных ветвях невозможно*, как для вектора, заданного в замкнутых путях, так и для вектора, заданного в разомкнутых путях. Компоненты вектора в свободных ветвях распадаются на компоненты в двух двойственных сетях в соответствии с распределением замкнутых и (или) разомкнутых путей между ними. Поэтому *преобразования координат-путей в данном случае группу не образуют*.

*Расчет сети для вектора  ${}^m\mathbf{d}$ , заданного в контурах (закрытая сеть)*. Решение задачи состоит в получении значений контравариантных компонент вектора (потока) в отдельных ветвях связанной сети по ковариантным компонентам, которые заданы в контурах свободных ветвей.

Получим значения контравариантных компонент  ${}^m d^a$  в данной сети, или  ${}^m \underline{d}^a$  в двойственной сети (в базисных контурах, или в связанных отдельных ветвях, где производятся измерения) по заданным в свободных ветвях ковариантным компонентам  ${}^m d_{a\prime}^0$  вектора  ${}^m\mathbf{d}$ . Для этого нужно получить формулы преобразования двойственных, в данном случае ковариантных, компонент вектора при связывании ветвей, используя метрические соотношения. С этой целью в формулу (2.60) выражения распределения квадрата величины вектора в двойственных сетях, которая представляет собой инвариантную форму, подставим формулу преобразования контравариантных компонент из (2.62):

$$|{}^m\mathbf{d}|^2 = {}^m d^a{}_0 \cdot {}^m d_{a\prime}^0 = ({}^m d^{a\prime} \cdot {}^m d_{a\prime}) + ({}^m \underline{d}^{a\prime} \cdot {}^m \underline{d}_{a\prime}) = {}^m d^{a\prime} \cdot {}^m C_{a\prime}{}^a \cdot {}^m d^0_{a\prime} + {}^m \underline{d}^{a\prime} \cdot {}^j A^{a\prime}{}_a \cdot Y^{ab} \cdot {}^m d^0_{a\prime},$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых векторах  ${}^m d^{a\prime}$  и  ${}^m \underline{d}^{a\prime}$ , получим *две отдельные* формулы преобразования ковариантных компонент вектора во взаимном базисе

при переходе от свободных ветвей к связанным ветвям (с учетом транспонирования), а именно, для данной сети<sup>8</sup>:

$${}^m d_{a^i} = {}^m C_a^a \cdot {}^m d_{a^0}, \quad (2.64)$$

а для двойственной сети:

$${}^m \underline{d}_{a^i} = {}^j A_a^a \cdot Y^{ab} \cdot {}^m d_{a^0}. \quad (2.65)$$

Эти формулы получены из предположения о постоянстве квадрата величины вектора при изменении структуры двойственных сетей, и они обеспечивают преобразование ковариантных компонент вектора при связывании свободных ветвей в сеть.

Заметим еще раз, что Крон не использовал двойственную сеть, поэтому *при выводе формул* преобразования источников напряжения и тока от простейшей сети к соединенной сети ему пришлось использовать *обратную прямоугольную* матрицу преобразования (которой не существует). Из окончательных формул расчета это противоречие, упомянутое в главе 1, исчезает. То есть, в конце концов, обращается квадратная матрица сопротивлений контуров (или квадратная матрица проводимостей пар узлов), однако данный недостаток построения тензорного анализа сетей Крона являлся объектом критики.

Теперь получим по этим формулам *контравариантные* компоненты вектора в связанных двойственных сетях.

Для этого используем метрические соотношения, полученные в разделе 2.5.2. В частности, используем формулы (2.42) и (2.43) для преобразования матриц  $Z_{ab}$  и  $Y^{ab}$  при изменении структуры сети. Из этих формул следует, что в связанной сети метрические отношения между прямыми и взаимными базисами можно представить в виде следующего соотношения:

$${}^m \begin{bmatrix} p_a \\ p_a \end{bmatrix} = {}^m \begin{bmatrix} Z_{mm} & Z_{mj} \\ Z_{jm} & Z_{jj} \end{bmatrix} {}^j \begin{bmatrix} p^a \\ p^a \end{bmatrix} = {}^m \begin{bmatrix} {}^m C Z^m C_t & {}^m C Z^j C_t \\ {}^j C Z^m C_t & {}^j C Z^j C_t \end{bmatrix} {}^j \begin{bmatrix} p^a \\ p^a \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Здесь через  $Z$  обозначена фундаментальная матрица для свободных ветвей (матрица комплексных сопротивлений, импедансов, в терминологии Крона), текущие индексы для краткости опущены. Отсюда получим выражение контурной части прямого базиса в связанной сети через вектор взаимного базиса:

$${}^m p_a = Z_{mm} {}^m p^a + Z_{mj} {}^j p^a. \quad (2.67)$$

Подставим это выражение для  ${}^m p_a$  в выражение для разложения по векторам базиса той части  ${}^m \underline{d}_a$  вектора  ${}^m \underline{d}$ , которая расположена в данной сети (см. 2.61):

<sup>8</sup>Следует помнить, что при разложении произвольного вектора по векторам базиса, составляющим столбец, компоненты этого вектора составляют строку.



$${}^m \mathbf{d}_a = {}^m d^a {}^m p_a = {}^m d^a (Z_{mm} {}^m p^a + Z_{mj} {}^j p^a). \quad (2.68)$$

Согласно второму допущению, вектор, заданный в замкнутых путях, не имеет составляющих в разомкнутых путях, а, следовательно,  ${}^m d^a Z_{mj} {}^j p^a = 0$ . Тогда получим, что

$${}^m d^a Z_{mm} = {}^m d_a$$

Это и есть компоненты разложения вектора  ${}^m \mathbf{d}_a$  во взаимном базисе  ${}^m p^a$  связанной сети. В электротехнике аналогом этого выражения является закон Ома для контурной цепи. Подставляя сюда значение  ${}^m d_a$  из (2.64), получим выражение контравариантных компонент  ${}^m d^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в замкнутых путях связанной сети через заданные ковариантные компоненты в свободных ветвях  ${}^m d^0_a$ :

$${}^m d^a = (Z_{mm})^{-1} {}^m d_a = ({}^m C_a^a Z_{ab} {}^m C_b^b)^{-1} {}^m C_b^b {}^m d^0_b. \quad (2.69)$$

Итак, получили выражение контравариантных компонент  ${}^m d^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в замкнутых путях одной из связанных двойственных сетей через его ковариантные компоненты  ${}^m d^0_b$  в свободных ветвях. Чтобы получить отсюда значения контравариантных компонент  ${}^m d^a_c$  вектора *в отдельных ветвях* связанной сети, подставим полученное выражение в (2.62):

$${}^m d^a_c = {}^m C_a^a {}^m d^a = {}^m C_a^a ({}^m C_a^a Z_{ab} {}^m C_b^b)^{-1} {}^m C_b^b {}^m d^0_b. \quad (2.70)$$

Это и есть решение поставленной задачи расчета сети при возбуждении, заданном внутри сети, в замкнутых путях.

Проделав точно такие же, но двойственные рассуждения для компонент  ${}^m d^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в двойственной сети, но, подставляя вместо  ${}^m d_a$  его значение из (2.65), получим и для этой сети выражение контравариантных компонент, которое примет вид:

$${}^m d^a_c = {}^j A^a_a {}^m d^a = {}^j A^a_a ({}^j A^a_a Y^{ab} {}^j A^b_b)^{-1} {}^j A^b_b Y^{ab} {}^m d^0_b, \quad (2.71)$$

где  ${}^j A^b_b$  записано вместо  ${}^m C_a^a$ , для более наглядного сопоставления друг с другом компонент вектора в двойственных сетях.

**Расчет сети для вектора  ${}^j \mathbf{d}$ , заданного в разомкнутых путях (открытая сеть).** Решение задачи состоит в получении значений ковариантных компонент вектора (потока) в отдельных ветвях связанной сети по контравариантным компонентам, которые заданы в разомкнутых путях свободных ветвей.

Все рассуждения по расчету сети для вектора, заданного в замкнутых путях, можно повторить для вектора  ${}^j \mathbf{d}$ , заданного контравариантными компонентами  ${}^j d^0_b$  в разомкнутых путях, сделав двойственные замены фундаментальных матриц и матриц преобразования. В силу *Замечания*, сделанного в разделе 2.5.3, о том, что только две матрицы связывают преобразования четырех базисов в двух двойственных сетях, очевидно, что формулы (2.70) и (2.71), а также ковариантные и контравариантные компоненты вектора просто поменяются местами. Для разомкнутых путей в данной сети получим выражение ковариантных

компонент вектора *в отдельных ветвях* связанной сети через его контравариантные компоненты, заданные в свободных ветвях:

$${}^j d_a^c = {}^j A_a^{a'} {}^j d_a = {}^j A_a^{a'} ({}^j A_a^{a'} Y^{ab} {}^j A_b^{b'})^{-1} {}^j A_b^{b'} {}^j d_0^b. \quad (2.72)$$

Это и есть решение поставленной задачи расчета данной сети при возбуждении, заданном извне, т.е. на узлах-границах сети, в разомкнутых путях.

Проделав двойственные рассуждения для компонент  ${}^j d_a$  вектора  ${}^j \mathbf{d}$  для  $\alpha$  сети, получим для нее выражение ковариантных компонент *в отдельных ветвях* связанной двойственной сети через контравариантные компоненты, заданные в свободных ветвях, которое примет следующий вид:

$${}^j d_a^c = {}^m C_a^{a'} {}^j d_a = {}^m C_a^{a'} ({}^m C_a^{a'} Z_{ab} {}^m C_b^{b'})^{-1} {}^m C_b^{b'} Z_{ab} {}^j d_0^b, \quad (2.73)$$

где  ${}^m C_a^{a'}$  записана вместо  ${}^j A_a^{a'}$ , чтобы более наглядно сопоставить друг с другом выражения для компонент вектора в двойственных сетях.

Таким образом, вместо группы преобразований путей в сети, получаем для наложенных векторов алгебраическую последовательность преобразований (оператор), которая позволяет получать ковариантные и контравариантные компоненты вектора в связанной сети по их значениям в несвязанной сети. Для этого используются формулы (2.70–2.73), которые получены для двух видов компонент-откликов в двух двойственных сетях при двух видах воздействия на сеть (возбуждения). Совокупность (множество) таких последовательных преобразований обладает свойствами группы при изменении структуры (изменении соединений элементов) двойственных сетей.

Важность такого оператора, обладающего свойствами группы, проявляется тогда, когда при изменении структуры возникают прямоугольные матрицы преобразования. Преобразования с прямоугольными матрицами преобразования возникают тогда, когда меняется число узлов сети при изменении ее структуры, следовательно, меняется число замкнутых и разомкнутых путей, составляющих базис, т.е. отражающих размерность соответствующего подпространства. Инвариант таких преобразований – квадрат величины вектора, который остается постоянным при изменении размерностей подпространств путей, когда меняется структура сети и двойственной к ней сети. Постоянство квадрата величины вектора соответствует постулату об инвариантности мощности Крона, но он выполняется только для двух двойственных сетей.

### 2.6.3. Инвариант подпространств путей с переменной размерностью

Итак, матрицы преобразования, связывающие пути базиса в одной сети и пути базиса в другой сети (когда при изменении структуры меняется число узлов) – прямоугольные. Прямоугольные матрицы, как отмечалось, не образуют группу, поскольку нет обратного преобразования.

Напомним, что есть два простых критерия определить, что выбранный набор путей образует базис в пространстве сети. Критерий того, что замкнутые пути, контуры, образуют базис – пути базиса должны пройти по всем ветвям сети. Критерий того, что разомкнутые пути образуют базис – пути базиса должны связать все пары узлов в сети.

Как показано, особенность *наложенных* на сеть векторов (они представляют протекающий в сети поток энергии) состоит в том, что они заданы только в замкнутых или только в разомкнутых путях (поскольку представляемые ими потоки в сети замкнутые или разомкнутые). Изменение компонент таких векторов при изменении структуры *одной* сети нельзя определить из-за прямоугольности матриц преобразования. *То есть, по набору компонент вектора в одном базисе, нельзя определить его компоненты в другом базисе, если его размерность меньше или больше* размерности исходного базиса. Фактически одна сеть для таких векторов не обладает свойствами полного пространства.

Как было показано в соотношении (2.62), для каждой ветви  $b_\alpha$  в двух двойственных сетях сумма контравариантных компонент вектора  ${}^m d_c^a$  (см. 2.70) и  ${}^m \underline{d}_c^a$  (см. 2.71), равна значению компоненты  ${}^m d_0^a$  в этой свободной ветви, т.е.:

$$\begin{aligned} {}^m d_0^a &= (Z_{ab})^{-1} {}^m d_b^0 = {}^m d_c^a + {}^m \underline{d}_c^a = \\ &= {}^m C_a^a \cdot ({}^m C_a^a Z_{ab} {}^m C_b^b)^{-1} {}^m C_b^b {}^m d_b^0 + Y^{ab} j_{A_a^a} (j_{A_a^a} Y^{ab} j_{A_b^b})^{-1} j_{A_b^b} Y^{ab} {}^m d_b^0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

где справа и слева входят одинаковые по типу векторы. Поскольку  ${}^m \underline{d}_c^a$  является величиной, обратной по своей вариантности к  ${}^m d_c^a$  (т.е. если одна из них ковариантная, то другая контравариантная, и наоборот), в силу двойственного характера всех величин в  $\alpha$  сети, то во втором слагаемом слева появляется матрица  $Y^{ab}$ , умножение на которую приводит эти компоненты к одинаковому типу. Из (2.74) можно видеть, что:

- сумма контравариантных компонент вектора по каждой ветви всегда постоянна, вне зависимости от сложности той структуры, в которую включена данная ветвь;
- во все слагаемые входят одни и те же ковариантные компоненты вектора  ${}^m d_b^0$ , поэтому, приравняв коэффициенты при них, получим выражение для структурных и метрических характеристик только самой сети.

Это соотношение выражает свойство двойственных сетей:

$$(Z)^{-1} = Y = {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C + Y^j A_t (j A Y^j A_t)^{-1} j A Y. \quad (2.75)$$

Данное соотношение можно рассматривать как следствие предположений о свойствах наложенных векторов, однако оно характеризует только свойства самого пространства сети и при этом не следует из других соотношений между матрицами преобразования. Кроме того, это соотношение выражает структурные свойства сети и матриц преобразования, вне

зависимости от метрических характеристик сети. Действительно, если ветвям не приписаны никакие веса и метрическая матрица  $Z$  единичная ( $Z = Y = I$ ), то получим следующее:

$${}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} {}^m C + {}^j A_t ({}^j A {}^j A_t)^{-1} {}^j A = I. \quad (2.76)$$

Данное соотношение связывает только матрицы преобразования в двойственных сетях и не является следствием ортогональности этих матриц, т.е. это чисто структурное свойство двойственных сетей. Вместе с тем это соотношение (2.76) связывает матрицы преобразования даже в одной сети.

Аналогичное соотношение связывает матрицы преобразования путей при изменении структуры двух двойственных сетей (см. *Замечание* в разделе 2.5.3):

$${}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} {}^m C + {}^m \underline{C}_t ({}^m \underline{C} {}^m \underline{C}_t)^{-1} {}^m \underline{C} = I \quad (2.77)$$

Соотношения (2.76) и (2.77) представляют собой объективные закономерности преобразования структуры двойственных сетей. Данные закономерности выполняются при любых изменениях структуры, в том числе при изменении размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей, т.е. при изменении числа узлов в сети, когда матрицы преобразования становятся прямоугольными.

С точки зрения физики, соотношения (2.76) и (2.77) отражают структурные свойства материи, которые обеспечивают выполнение закона сохранения потока энергии. «Расщепление» компонент вектора потока энергии по двум двойственным сетям показывает, что поток энергии остается постоянным при изменении структуры. Это происходит потому, что при распространении потока энергии в любой структуре любой сложности, одновременно существует двойственная «невидимая» структура, которая сопровождает наблюдаемые системы, включая живые системы. Когда в наблюдаемой структуре происходят изменения, вызывающие изменения величины потока энергии, то в двойственной структуре происходят «компенсирующие» изменения, которые обеспечивают сохранение постоянства потока энергии.

#### 2.6.4. Преобразования сетей с переменной структурой

Рассмотрим в качестве примера выполнения данной закономерности, инварианта двойственных сетей, значения произведений матриц, входящих в (2.77), для подматриц в выражениях (2.33) и (2.34), представляющих контуры двойственных сетей рис. 2.15.а и 2.15.б. В первой из этих сетей один контур  $p_1$ , которому в (2.33) в матрице  $C_a^0$  соответствует подматрица  ${}^m C_a^0$ , состоящая из одной первой строки:

$${}^m C_a^0 = 1 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} m \quad (2.78)$$

а во второй – подматрица  ${}^m C_a^0$ , состоящая из двух строк в (2.34), соответствующих замкнутым путям  $p_2$  и  $p_3$ :

$${}^m C_a^0 = \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{2} & -1 & 1 & \\ \underline{3} & -1 & & 1 \end{matrix} \begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \quad (2.79)$$

Вычислим первое слагаемое в (2.77). Выражение в скобках имеет вид:

$${}^m C {}^m C_t = \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{1} & 1 & 1 & 1 \end{matrix} m \times \begin{matrix} & \underline{1} \\ \underline{1} & 1 \\ \underline{2} & 1 \\ \underline{3} & 1 \end{matrix} = \underline{1} \begin{matrix} \underline{1} \\ 3 \end{matrix}$$

Обращение такой матрицы, состоящей из единственного элемента, соответствует обращению числа и принимает вид дроби:

$$({}^m C {}^m C_t)^{-1} = \underline{1} \begin{matrix} \underline{1} \\ 1/3 \end{matrix}$$

Эту матрицу надо слева и справа умножить на исходную матрицу преобразования путей  ${}^m C_a^0$ . Тогда по формуле (2.77):

$${}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} = \begin{matrix} & \underline{1} \\ \underline{1} & 1 \\ \underline{2} & 1 \\ \underline{3} & 1 \end{matrix} \underline{1} \begin{matrix} \underline{1} \\ 1/3 \end{matrix} = \begin{matrix} & \underline{1} \\ \underline{1} & 1/3 \\ \underline{2} & 1/3 \\ \underline{3} & 1/3 \end{matrix}$$

Затем умножим результат справа на  ${}^m C$ , получим первое слагаемое – квадратную матрицу. Порядок этой матрицы равен размерности пространства сети, т.е. числу ветвей:

$${}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} {}^m C = \begin{matrix} & \underline{1} \\ \underline{1} & 1/3 \\ \underline{2} & 1/3 \\ \underline{3} & 1/3 \end{matrix} \times \underline{1} \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{1} & 1 & 1 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{1} & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \underline{2} & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \underline{3} & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{matrix}$$

Вычислим второе слагаемое в (2.77). Произведение в скобках матриц (2.79) для этого слагаемого имеет вид матрицы:

$${}^m C {}^m C_t = \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{2} & -1 & 1 & \\ \underline{3} & -1 & & 1 \end{matrix} \begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \times \begin{matrix} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{1} & -1 & -1 \\ \underline{2} & 1 & \\ \underline{3} & & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{2} & 2 & 1 \\ \underline{3} & 1 & 2 \end{matrix}$$

Обратная матрица к этой матрице имеет вид:

$$({}^m C {}^m C_t)^{-1} = \begin{matrix} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{2} & 2/3 & -1/3 \\ \underline{3} & -1/3 & 2/3 \end{matrix}$$

ее надо слева и справа умножить на исходную матрицу  ${}^m C_a^0$ . Тогда в соответствии с соотношением (2.77):

$${}^m C_I ({}^m C {}^m C_I)^{-1} = \begin{matrix} & \underline{2} & \underline{3} \\ 1 & \begin{matrix} -1 & -1 \end{matrix} \\ 2 & \begin{matrix} 1 & \end{matrix} \\ 3 & \begin{matrix} & 1 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{2} & \begin{matrix} 2/3 & -1/3 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} -1/3 & 2/3 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \underline{2} & \underline{3} \\ 1 & \begin{matrix} -1/3 & -1/3 \end{matrix} \\ 2 & \begin{matrix} 2/3 & -1/3 \end{matrix} \\ 3 & \begin{matrix} -1/3 & 2/3 \end{matrix} \end{matrix}$$

и, умножая, полученное выражение справа на  ${}^m C$ , получим второе слагаемое. Это слагаемое также представляет собой квадратную матрицу, с порядком, равным размерности пространства сети:

$${}^m C_I ({}^m C {}^m C_I)^{-1} {}^m C = \begin{matrix} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{1} & \begin{matrix} -1 & -1 \end{matrix} \\ \underline{2} & \begin{matrix} 2 & -1 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} -1 & 2 \end{matrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{3} \times \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{2} & \begin{matrix} -1 & 1 & \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} -1 & & 1 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{1} & \begin{matrix} 2 & -1 & -1 \end{matrix} \\ \underline{2} & \begin{matrix} -1 & 2 & -1 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} -1 & -1 & 2 \end{matrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{3}$$

Суммируя эти слагаемые так, как показано в (2.77) получим единичную матрицу:

$$\begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ 1 & \begin{matrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{matrix} \\ 2 & \begin{matrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{matrix} \\ 3 & \begin{matrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{matrix} \end{matrix} + \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \underline{1} & \begin{matrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{matrix} \\ \underline{2} & \begin{matrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ 1 & \begin{matrix} 1 & & \end{matrix} \\ 2 & \begin{matrix} & 1 & \end{matrix} \\ 3 & \begin{matrix} & & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Очевидно, что если взять матрицу  ${}^j A_0^a$  из (2.33) и выполнить те же расчеты по формуле (2.76), то результат не изменится. Важно то, что закономерность, представленная в (2.76) и (2.77) связывает параметры подпространств сетей с переменной размерностью, связывает матрицы преобразования, число строк и столбцов в которых изменяется при изменении соединения ветвей.

Результат не изменится при изменении числа строк и столбцов матриц преобразования, обусловленных изменением соединений в сети, разделением на подсети и т.д. Таким образом, полученное соотношение представляет собой инвариант преобразований структуры двойственных сетей. Этот инвариант не следует из соотношений между ветвями и путями, а является новой объективной закономерностью двойственных сетей, а также сложных систем, представимых сетевыми моделями.

## Результаты главы 2

1. При изменении соединений ветвей (структуры) сети может измениться количество узлов. Это приводит к изменению числа независимых замкнутых и разомкнутых путей. Пути в сети образуют векторное пространство, его размерность равна числу ветвей. Замкнутые и разомкнутые пути определяют в нем ортогональные подпространства. Матрицы преобразования путей базиса при изменении структуры образуют группу. Произвольный путь преобразуется контравариантно по отношению к преобразованию базиса путей.

2. Компоненты заданного в сети вектора, который представляет процесс распространения потоков энергии, располагаются или в замкнутых, или в разомкнутых

путях. Если вектор задан внешними источниками (поток входит в одних узлах и покидает в других), то он представлен в разомкнутых путях. Это открытая сеть, которая может моделировать открытые системы. Если вектор задан внутренними источниками (поток проходит внутри сети) – то в замкнутых путях. Это замкнутая сеть, которая может моделировать замкнутые системы. При изменении структуры меняется размерность подпространств замкнутых и разомкнутых путей, меняется величина вектора. Матрицы преобразования при изменении структуры с изменением числа узлов становятся прямоугольные, группу не образуют и поэтому нельзя рассчитать изменение процессов при изменении структуры, когда увеличивается число переменных.

3. Автором найден новый инвариант преобразования структуры двойственных сетей, который выражается соотношением между матрицами преобразования путей:

$$C (C_t C)^{-1} C_t + A (A_t A)^{-1} A_t = I,$$

а в более общем виде, если метрические веса ветвей заданы матрицей  $Z = Y^{-1}$ :

$$(Z)^{-1} = Y = {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C)^{-1} {}^m C + Y^j A_t ({}^j A Y^j A_t)^{-1} {}^j A Y.$$

Этот инвариант преобразований структуры двойственных сетей объективно существует не только в сетях, но и в системах, которые можно представить сетевыми моделями. В двух двойственных сетях постоянными являются как сумма независимых замкнутых путей, так и сумма независимых разомкнутых путей, хотя в каждой из сетей эти числа меняются при изменении структуры.

4. Существование данного инварианта обеспечивает изменениям структуры *двух* двойственных сетей свойства группы. Преобразования структуры становятся аналогичны группе преобразований координат в геометрии. Это обеспечивает постоянство величины вектора (представляющего потоки энергии) в совокупности двойственных сетей. Параметры всех величин, заданных на структуре двойственных сетей (например, заданного вектора, ковариантные и контравариантные компоненты которого представляют воздействия и отклики, характеризующие потоки энергии), могут быть рассчитаны при изменении структуры как преобразования координат.

Это позволяет для каждой новой структуры получать уравнения поведения (а также их решение), как преобразование тех, которые ранее были уже получены для одной из структур, а не выводить (и решать) эти уравнения каждый раз заново. Величины и уравнения поведения сетей и систем целесообразно приводить к тензорному виду, поскольку преобразование тензоров при изменении структуры носит линейный характер, что упрощает анализ и управление поведением систем. Только для тензорной формы описания возможно сетевое моделирование одновременно процессов и структуры систем, которое обеспечивает полноту их расчета, анализа и прогнозирования поведения.

### 3. РАСЧЕТ СЕТЕЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СТРУКТУРЫ

Процессы в сложных системах представляют собой потоки энергии через соединенные элементы, материя которых оказывает сопротивление потоку. Эти потоки можно изучать через измерение откликов на воздействия в структуре соединенных элементов.

Для проектирования, анализа, управления сложными системами необходимо выполнять расчеты откликов на приложенные воздействия. Необходим также расчет изменения откликов, как при изменении воздействий, так и при изменении структуры, т.е. соединения элементов. Изменение структуры происходит, например, при изменении конструкции технической системы в процессе проектирования, при анализе последствий разрушения или отключения части систем жизнеобеспечения в условиях техногенных аварий или природных катастроф, при проведении структурных реформ в экономических системах.

Применение двойственных сетей дает единый метод расчета изменения процессов при изменении структуры сложных систем, относящихся к разным предметным областям.

Технология применения метода двойственных сетей рассмотрена в главе 1 и состоит из следующих основных этапов.

- Найти инварианты и привести уравнения поведения исследуемой сложной системы к тензорному виду, т.е. к измеримым величинам.
- Установить аналогии между понятиями процессов и структуры данной системы и математической модели – сети.
- Построить сетевую модель, которая представит взаимодействие процессов и структуры исследуемой сложной системы. Двойственная сеть модели с новым инвариантом может дать новую информацию о свойствах исследуемой реальной системы, которые ранее не были известны, или не принимались во внимание.
- Провести на сетевой модели расчеты откликов на воздействия для различных вариантов компоновки, изменения структуры связей, различных вариантов способов и величины воздействий на систему, включая возможные аварийные или экстремальные ситуации.
  - *Основой экспериментов на сетевой модели является расчет изменения откликов при изменении структуры связей элементов. Это и есть предмет исследования в данной главе.*
- Полученные результаты использовать для расчета, проектирования, построения, управления, прогнозирования поведения реальной экономической или технической системы.

Таким образом, метод двойственных сетей обеспечивает расчеты изменения параметров процессов в сложных технических, экономических системах при изменении их структуры. Решение, полученное для одной структуры, преобразуется в решение для любой



другой структуры как преобразование компонент геометрического объекта (вектора) при изменении координат (путей). Изучение поведения сложной системы при реформах, авариях, катастрофах, других экстремальных ситуациях, проводится на математической модели, а не на реальной системе.

В главе 2 в основном рассматривались свойства путей в сети как координат, преобразование координат при изменении выбора путей, или изменении структуры сети. В данной главе в основном рассматривается поведение компонент векторов (наложенных на сеть векторов, представляющих потоки энергии) при изменении структуры сети и двойственной сети. Представлен метод расчета сетей (основы сетевых моделей) при различных вариантах изменения структуры, например:

- соединение отдельных элементов, свободных ветвей в связанную сеть, или разделение связанной сети на свободные ветви;
- разделение связанной сети на независимые подсистемы и расчет по частям, или соединение сети из подсистем;
- изменение соединений ветвей в связанной сети (соединение или разъединение).

Легко видеть, что первый вариант является частным случаем второго. Третий вариант является наиболее общим случаем, частными случаями которого являются первые два. Например, последовательное разъединение ветвей может разделить связанную сеть на свободные ветви.

В первом варианте изменения структуры производится расчет откликов в ветвях связанной сети по заданным воздействиям в свободных ветвях (используя решение для свободных ветвей). Во втором варианте производится расчет изменения откликов в ветвях при соединении подсетей в связанную сеть или декомпозиции связанной сети на подсети (используя результаты расчета подсетей). В третьем варианте производится расчет изменения откликов в ветвях связанной сети при изменении структуры (соединение или разъединение узлов-границ ветвей) на основании ранее полученного решения для другой структуры.

Второй вариант является общим подходом к решению задачи разделения целого (системы) на части, или соединения из частей (подсистем) целого. Разделение целого на части или соединение частей в целое играет важную роль для организации параллельных вычислений на сетях и применения компьютеров с параллельной архитектурой.

Задача расчета сети состоит в определении неизвестных компонент вектора (откликов) по известным заданным компонентам вектора (воздействиям). Значения откликов-решений на ветвях должны обеспечивать сохранение потока в замкнутых и разомкнутых путях сети. В этом отношении задача расчета сети аналогична задаче расчета электрической цепи, в

которой решение должно подчиняться законам Кирхгофа. Это означает, что сохраняются напряжения в замкнутых путях, т.е. сумма напряжений в контуре равна нулю и сохраняются токи в разомкнутых путях, т.е. сумма токов в узле равна нулю.

Задача расчета сетевых моделей сложных систем с переменной структурой состоит в определении изменения откликов на приложенные воздействия при изменениях структуры связей ветвей. Это достижимо путем преобразования ранее полученных решений для сети из тех же ветвей и источников воздействия, но с другой структурой. Такие преобразования обеспечивают инварианты, представленные в предыдущей главе. Наиболее важную роль играет среди них инвариант постоянства квадрата величины вектора при изменении структуры двойственных сетей.

### **3.1. Расчет сети при связывании свободных ветвей**

В данном разделе представлен расчет изменения компонент векторов при связывании свободных ветвей в сеть. Проведено сопоставление двойственных сетей с электрическими цепями и сетевыми моделями сложных систем. Когда установлено соответствие между этими объектами, тогда можно применять сети для расчета изменений процессов в сложных системах при изменении их структуры.

Изменение структуры включает в себя как частный случай декомпозицию сетевой модели на подсистемы, т.е. разделение целого на части. Для расчета частей можно применять отдельные процессоры вычислительных систем с параллельной архитектурой. При этом инвариант – постоянство величины вектора при изменении структуры двойственных сетей – позволил построить алгоритмы соединения результатов расчета частей в целое без итераций. Это стало возможно потому, что изменения величины вектора процесса в одной (заданной) сети компенсируются противоположными изменениями дополняющей его величины в двойственной сети.

Физическим проявлением постоянства величины вектора при изменении структуры двойственных сетей является постоянство потока энергии при изменении структуры сложных систем. Закономерность постоянства потока энергии при изменении структуры двух двойственных сетей применяется для расчета сетевых моделей технических, экономических систем. При изменении количества узлов в процессе изменения структуры величина вектора меняется в одной сети, но в сумме двух двойственных сетей постоянна. Это связано не только с тем, что размерности подпространств замкнутых путей и разомкнутых путей в совокупности двойственных сетей постоянны при любых изменениях структуры. Главным оказалась закономерность постоянства величины вектора при изменении структуры совокупности двойственных сетей. Эта найденная автором

неизвестная ранее закономерность имеет вид инвариантного соотношения, которое связывает матрицы преобразования при изменении структуры двойственных сетей.

Если рассматривать одну сеть как одно пространство, то изменение числа узлов, при сохранении тех же ветвей, приводит не просто к изменению выбора базисов, связанных с независимыми замкнутыми и разомкнутыми путями, а изменяет размерность соответствующего подпространства сети. При изменении размерности подпространства величина заданного в нем вектора может меняться независимо от выбора координат, связанных с ними базисов.

В геометрии величина вектора не меняется при изменении координат, если размерность пространства постоянна. В пространстве сетей при изменении размерности подпространства замкнутых или разомкнутых путей величина вектора в любой сети может меняться при изменении структуры, которое связано с изменением количества узлов. Однако в совокупности двух двойственных сетей величина вектора постоянна при изменении количества узлов, поскольку замыканию узлов в одной сети соответствует размыкание узлов в двойственной сети, при этом суммарное количество как замкнутых, так и разомкнутых путей остается постоянным. Следовательно, постоянна и суммарная размерность соответствующих подпространств, представляющих две двойственных сети. Это обеспечивает преобразование компонент вектора при изменении координат-путей, связанных с изменением структуры.

В геометрии преобразования координат образуют группу, что О. Веблен полагал одной из важнейших аксиом геометрии. Преобразования координат в пространстве сети при перекрестном изменении размерности базисов замкнутых и разомкнутых путей в каждой из двойственных сетей образуют математический объект, более сложный, чем группа. Полученная алгебраическая последовательность преобразований обеспечивает матрицам преобразования двойственных сетей свойства, аналогичные группе преобразования координат в геометрии. Эти свойства основаны на инварианте двойственных сетей. При этом сами матрицы преобразования путей в каждой из двух двойственных сетей прямоугольные. Таким образом, эти матрицы не имеют обратных матриц и группу не образуют. По сути, и по форме преобразований данный математический объект преобразования двойственных сетей аналогичен проекторам в геометрии.

### **3.1.1. Воздействия и отклики в двойственных сетях**

Измеряемая величина в реальной системе или в математической сетевой модели системы с точки зрения физики предстает перед исследователем как набор компонент – показаний совокупности приборов, которые обеспечивают ее достаточно полное описание. С

точки зрения геометрии измеримая величина предстает как набор компонент в системе линейно независимых координат, представляющих базис данного пространства.

«Мертвая» система, как отмечалось в главе 1, состоит из материальных элементов, соединенных между собой. Ее математическая модель в простейшем случае представляет собой сеть из соединенных одномерных элементов (ветвей). Эта сеть отличается от ориентированного графа только возможностью менять число узлов (вершин) в процессе соединения.

Система становится «живой», возбужденной, когда на нее оказано воздействие, например, в виде потока энергии, который распространяется через структуру ее элементов. Данный поток энергии проявляется (и измеряется) через значения величины источников воздействия и значения величины откликов в элементах системы. В известных физических, технических (а также экономических) системах произведение физической размерности величин воздействия и отклика всегда дает размерность энергии в единицу времени, т.е. мощности, или потока энергии. Этот вопрос рассматривался в главе 1. При этом вид энергии зависит от вида системы. Это может быть механическая, электрическая, электромагнитная, тепловая энергия, а также энергия, вложенная в продукты труда.

В сетевой модели потоку энергии соответствует наложенный на сеть вектор, который проявляется своими компонентами в координатах-путях и может быть реально измерен в ветвях. Компонентами такого вектора являются воздействия, принимаемые как постоянные, и отклики, которые рассматриваются как переменные. Отклики меняются, например, при изменении количества элементов, их материальных (метрических) характеристик, при изменении соединения элементов. В данной работе предметом рассмотрения является именно изменение откликов при изменении структуры соединения элементов.

С точки зрения физики, *наложенный на сеть вектор – это источник потока энергии*. Его компоненты можно рассчитать в любых выбранных путях, но измерить их можно только на ветвях сети (поскольку через каждую ветвь может проходить не один путь; все зависит от выбора путей). По этой причине все расчеты откликов следует доводить до расчета их значений в отдельных ветвях. При этом производится расчет ковариантных и контравариантных компонент вектора на каждой ветви. Эти значения, помимо основных целей расчета и анализа, используются также для проверки законов сохранения потока (аналоги законов Кирхгоффа) в базисах замкнутых и разомкнутых путей, для контроля правильности вычислений. Величину, ориентацию вектора потока энергии можно определить, таким образом, по значениям его компонент в некоторой системе координат.

Вместе с тем поток энергии в системах «расщепляется» на воздействия и отклики. Соответственно, наложенный вектор в сетевой модели также «расщепляется» на компоненты

в прямом и взаимном базисах, т.е. на ковариантные и контравариантные компоненты. Именно произведение ковариантной и контравариантной компонент дает квадрат величины вектора, что соответствует величине потока энергии, т.е. мощности. Однако ковариантность и контравариантность воздействий и откликов зависит от структуры самих элементов-ветвей сети. В двойственной сети ковариантность и контравариантность одинаковых по физической сути воздействий и откликов сохраняется, но меняется размерность и базис соответствующего подпространства, которое дополняет подпространства заданной сети до полной размерности пространства сети, определяемого количеством элементов.

Ветвь, в которой задан вектор (как источник энергии), может быть либо замкнутая, либо разомкнутая. В первом случае вектор в каждой ветви задается своими ковариантными компонентами, а во втором – контравариантными. Предполагается, что сами эти *заданные* компоненты (воздействия) постоянны при изменении метрических параметров ветви или при изменении структуры связей ветвей. Реакцией системы, которая определяет изменение величины вектора (потока энергии) является изменение откликов в ответ на изменение воздействий, метрики (сопротивления) элементов, соединений элементов или всех этих причин вместе. Получить отклики можно с помощью измерения их значений в различных частях системы (сети) или с помощью соответствующего расчета.

Если элементы с их метрикой прежние, воздействия также прежние, т.е. постоянные, а меняется только структура связей, то это означает, что меняется двойственная к воздействию компонента отклика, поскольку они связаны через метрическую матрицу  $Z_{ab}$ .

Связь ковариантной и контравариантной компонент вектора представлена соотношениями (2.56) и (2.58), которые здесь имеют вид – для замкнутых ветвей:

$${}^m d_a^0 = Z_{ab} {}^m d_0^b, \quad (3.1)$$

а для разомкнутых путей:

$${}^j d_0^a = Y^{ab} {}^j d_b^0 = (Z_{ab})^{-1} {}^j d_b^0. \quad (3.2)$$

Если свободные ветви не взаимодействуют друг с другом, то матрицы  $Z_{ab}$  и  $Y^{ab}$  – диагональные, и тогда ковариантные и контравариантные компоненты связаны по каждой ветви только собственным метрическим параметром. Уменьшение  $Z$  для замкнутой ветви приводит к увеличению контравариантной компоненты и наоборот, так что заданная ковариантная компонента  ${}^m d_a^0$  остается постоянной. Аналогично для разомкнутой ветви, где ковариантные и контравариантные компоненты меняются местами.

Постоянная заданная компонента вектора будет называться *воздействие*, а переменная, зависящая от метрики ветви, – *отклик*.<sup>1</sup>

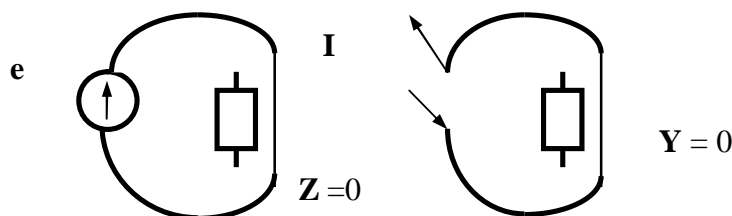


Рис. 3.1. Связь вида воздействия и вида структуры в отдельной ветви

Каждая из ветвей определяет независимое измерение пространства сети. Выбор или задание тех компонент вектора  $\mathbf{d}$ , которые мы считаем постоянными (ковариантных или контравариантных), фактически определяет вид структуры и вид метрики самих ветвей, т.е. ту роль, которые они будут играть в процессе данного расчета. В самом деле, рассмотрим два случая, представленных на рис. 3.1, когда в ветви задан вектор  $\mathbf{d}$ , а метрический параметр равен либо нулю, либо бесконечности.

Если метрический параметр равен нулю,  $Z = 0$  и вектор  $\mathbf{d}$  задан ковариантной компонентой  ${}^m d_a^0$ , то контравариантная компонента,  ${}^m d_0^a$  в (3.1) может принимать любое произвольное значение. Такую ситуацию можно представить себе в том случае, когда *ветвь замкнута* как бы в обход того участка (точки) в котором расположен ее метрический параметр. Величина самого вектора  $\mathbf{d}$  в этом случае не определена, поскольку один из сомножителей,  ${}^m d_0^a$  произволен.

Если метрический параметр  $Z$  равен бесконечности, то в соотношении (3.1) обе компоненты оказываются неопределенными, но при этом обратный к  $Z$  параметр равен нулю,  $Y = 0$  и можно рассмотреть соотношение (3.2). Вектор  $\mathbf{d}$  можно тогда задать контравариантной компонентой  ${}^j d_0^a$ , а ковариантная компонента  ${}^j d_a^0$  будет равна любому произвольному, даже бесконечному значению. Это возможно в том случае, когда *ветвь разомкнута* и в ней удален участок с метрическим параметром. Величина вектора  $\mathbf{d}$  в этом случае также не определена.

В обоих случаях *вид метрики предопределяет вид структуры ветви* – т.е. окажется ли она замкнутой или разомкнутой (это отражено в  $m$  и  $j$  обозначениях компонент в каждом

<sup>1</sup>В электротехнике этому соответствует то, что задано либо напряжение (ковариантная компонента), либо ток (контравариантная компонента) ветви. Меняется, соответственно, либо ток в контуре, либо напряжение (разность потенциалов) на узлах разомкнутой ветви.

случае). Таким образом, при задании вектора потока энергии с помощью одной из его компонент, *метрика и структура связаны изначально*.

Если в первом случае метрический параметр  $Z$  начинает возрастать от нуля и до бесконечности, то *контравариантная* компонента  ${}^m d_0^a$  начинает уменьшаться от бесконечности до нуля. Поскольку ковариантная компонента  ${}^m d_a^0$  при этом постоянна, то для каждого значения метрики можно определить квадрат величины вектора  $\mathbf{d}$ , которая будет изменяться соответственно. Во втором случае, аналогично, при изменении метрики получаем обратные изменения *ковариантной* компоненты. При постоянной контравариантной компоненте квадрат величины вектора  $\mathbf{d}$  будет определен, поскольку метрика позволяет определить одну компоненту при наличии другой.

В тех случаях, когда число путей каждого типа в сети не меняется при изменении соединений ветвей, любые компоненты вектора можно получить с помощью соотношений типа (3.1) и (3.2), по заданным компонентам, с помощью матриц преобразования, которые при этом образуют группу.

Если же число путей каждого типа при соединении ветвей изменяется, то в одной сети изменяется (перераспределяется) размерность подпространств соответствующих путей, подматрицы преобразования путей становятся прямоугольными, и уже не образуют группу. Тогда для получения одних компонент вектора по другим компонентам необходимо использовать цепочку преобразований, рассмотренную в предыдущей главе, которая фактически заменяет собой группу, благодаря использованию нового инварианта квадрата величины вектора. Этот инвариант не выводится из отношений между путями в сети. Постоянство данного соотношения представляет собой самостоятельную закономерность, которая связывает матрицы преобразования путей в сети.

### 3.1.2. Задача расчета сети

Задача расчета сети состоит в определении значений откликов на приложенные воздействия при изменении связей ветвей. *Воздействия* в электротехнике – это источники электродвижущей силы (эдс). Они могут быть источниками напряжения (внутреннее сопротивление равно нулю, ветвь замкнута, что определяет ее замкнутый путь) или тока (внутреннее сопротивление равно бесконечности, проводимость – нулю, т.е. структура такой ветви представляет собой разомкнутый путь). Абстрактность данных понятий определяется тем, что реально сопротивление может быть очень маленьким, но не нулевым, или очень большим, но не бесконечным.

*Отклики* – это величины, которые меняются в зависимости от значения метрического параметра (сопротивления, или комплексного сопротивления, *импеданса*). Источник напряжения в некоторых пределах (изменения нагрузки) дает постоянное напряжение, а

откликом является ток, который зависит от сопротивления (метрики). Источник тока в некоторых пределах (изменения нагрузки) дает постоянный ток, а откликом является напряжение, которое зависит от проводимости (комплексной проводимости или адмиттанса, т.е. величины, обратной импедансу).

Источники задают в свободных ветвях, предполагая, что эти значения остаются постоянными в любой структуре, при любых соединениях ветвей. Если источники постоянные, то отклики меняются в зависимости от изменения метрических параметров и (или) от изменения структуры. Постоянным должен также оставаться поток энергии через сеть. Квадрат величины потока энергии, определяемый суммой произведений воздействий и откликов по каждой ветви (или по совокупности независимых путей), представляет собой мощность.

*Мощность, рассеиваемая в ветви* электрической цепи, определяется как произведение значения тока, проходящего через ветвь, на значение разности потенциалов на границах ветви. *Мощность, рассеиваемая в сети*, определяется как сумма мощностей, рассеиваемых на всех ветвях сети (цепи). Это и есть сумма произведений контравариантных (токов) и ковариантных (напряжений) компонент вектора в элементах системы, т.е. на ветвях сети.

Из электротехники известно, однако, что *мощность*, характеризующая величину потока энергии в сети (электрической цепи), *меняется при изменении структуры* (наложении связей на сеть, изменении числа узлов). Изменение величины заданного вектора потока с изменением структуры подтверждается также теоремами теории графов о свойствах не усиления в резистивных цепях: величина напряжения на всех резисторах (сопротивлениях) не выше суммы напряжений на источниках. Это доказано Волавером на основе специального случая леммы Минти о раскраске дуг графа (см. *Свами*, 1984, с. 241). То есть, речь идет о не увеличении мощности в сети при соединении ветвей. В главе 2 было показано, что предположение о постоянстве квадрата величины вектора в совокупности двойственных сетей позволяет проводить расчет изменений откликов при изменении структуры сетей, в том числе, при изменении числа узлов. *Это наиболее важный результат*. Он показывает, что не усиление мощности в одной сети при наложении связей компенсируется точно таким же не уменьшением мощности в двойственной сети, где разрываются связи. Это происходит так, что суммарная мощность, представляющая собой *квадрат* величины вектора потока энергии, *остается постоянной*.

Будем далее рассматривать задачу расчета сети как задачу геометрии двойственных сетей о нахождении компонент наложенного вектора в путях и ветвях связанной сети по заданным компонентам этого вектора в свободных ветвях. Такая абстрактная постановка (и



решение) этой задачи позволит затем применять полученные результаты не только к электрическим сетям и подобным им системам, но также к любым другим сложным системам, в которых потоки одних величин распространяются под действием других величин через среду с некоторым инерциальным сопротивлением.

*Исходными данными* являются ковариантные компоненты в замкнутых свободных ветвях, или контравариантные компоненты вектора в разомкнутых свободных ветвях. *Определить* требуется значения, соответственно, контравариантных и ковариантных компонент вектора, причем не только в системе координат, т.е. независимых замкнутых или разомкнутых путях связанной сети, но и непосредственно в отдельных ветвях этой сети. Полученные для отдельных элементов (ветвей) значения и являются решением задачи сети (или откликами на приложенные воздействия).

Дело в том, что, как отмечалось, измерения откликов с целью, например, проверки правильности найденного решения, производятся в ветвях, а не в путях. Через одну реальную ветвь может проходить несколько абстрактно выбранных путей. Сложение откликов в разных путях на одной ветви может изменить качество решения. Например, в системах обеспечения безопасности расчет откликов в путях не превысит предельно допустимых значений, а их сложение в отдельных элементах-«ветвях» может такие значения превысить; тогда придется принимать другие управленческие решения.

Воздействия и отклики здесь рассматриваются как компоненты одного и того же вектора  $\mathbf{d}$  в разных системах координат, поэтому задача сводится к определению по компонентам вектора, заданным в одном базисе, его компонент в другом базисе и/или в другой системе координат. То есть, при другом выборе путей в качестве базиса, и/или другом соединении ветвей.

Решение этой задачи уже получено в разделе 2.5.4, где для заданных ковариантных компонент  ${}^m d_\alpha^0$  в контурах, соотношение (2.69) представляет отклики-компоненты в контурах связанной сети  ${}^m d^\alpha$ , а (2.70) – компоненты вектора  $\mathbf{d}$  в отдельных ветвях связанной сети  ${}^m d_\alpha^c$ , как в новой системе координат. Для заданных контравариантных компонент  ${}^j d_\alpha^0$  в разомкнутых путях, в (2.72) представлены отклики-компоненты вектора  $\mathbf{d}$  в отдельных ветвях связанной сети  ${}^j d_\alpha^c$ , как в новой системе координат. Таким образом, решается задача поиска компонент *одного данного* вектора для *любой* структуры и ее изменений.

Однако можно поставить задачу расчета сети иначе: найти для *одной данной* структуры такую *одну* матрицу, умножение которой на компоненты *любого* заданного вектора в системе координат свободных ветвей даст его компоненты в системе координат связанных ветвей. Итак, можно сформулировать две постановки задачи сети:

- расчет изменений компонент *заданного* вектора в сети *любой* структуры,

- расчет изменения компонент *любого* вектора при заданных структуре и метрических параметрах ветвей.

В геометрии эта вторая задача решается построением матрицы преобразования старых базисных векторов в новые. Тогда ортогональная к ней матрица преобразует компоненты произвольного вектора, причем можно получить ковариантные или контравариантные компоненты в любой системе координат, используя метрическую матрицу. Это возможно потому, что *при изменении системы координат вектор остается прежним* (т. е. представляет собой тензор). Число независимых компонент в новой системе координат такое же, как в старой системе координат. Матрицы преобразования образуют группу.

В главе 2 получена алгебраическая последовательность преобразований структуры (в эту последовательность входят прямоугольные матрицы преобразования), обладающая свойствами группы. Можно сказать, что получен линейный оператор преобразования структуры сетей. Прямоугольные матрицы, как известно, не обладают обратными матрицами, а потому группу не образуют. Такой линейный оператор обеспечивает преобразованиям координат-путей свойства группы, но только для совокупности двух двойственных сетей. Он необходим потому, что при изменении структуры, связанном с изменением числа узлов, *вектор в одной сети не остается прежним, поскольку он распределяется между двумя двойственными сетями*.

Матрицы преобразования при изменении числа узлов в сети становятся прямоугольными. Эту цепочку перемножений прямоугольных матриц преобразования можно представить одной результирующей матрицей, умножение которой на заданный набор компонент вектора в одной системе дает сразу значения его компонент любого типа (ковариантные или контравариантные) в другой системе координат. Такие результирующие матрицы будут называться *матрицы решения*.

Если рассматривается сеть с точки зрения замкнутых путей, то матрица решения будет обозначаться как  $Y_c$ , а если разомкнутых – то, как  $Z_c$ . Фактически получение матриц решения, которые определяют изменение свойств сети при изменении структуры, является составной частью задачи расчета сети, даже если на сеть не оказано никаких воздействий.

Таким образом, возможны два типа расчета сети:

- *расчет изменения компонент вектора при связывании ветвей;*
- *расчет матриц решения сети.*

Если нет наложенных векторов, то матрицы решения каждой из сетей получим по формулам, аналогичным тем, которые даны в разделе 2.5.5. Фактически, те две слагаемые матрицы, которые вычислялись в том разделе, это и есть матрицы решения для двойственных сетей, примеры которых представлены на рис. 2.15.а и рис. 2.15.б. Для обоих

типов расчета в данной главе будут получены соответствующие последовательности действий с матрицами и векторами, выполнение которых приводит к решению задачи сети для замкнутых путей, или для разомкнутых путей. Совокупности действий по расчету откликов фактически являются алгоритмами решения этой задачи, основой для реализации таких алгоритмов на вычислительной технике.

### 3.1.3. Расчеты сетей из свободных ветвей

Здесь рассматриваются формулы расчета сетей, состоящих из свободных, несвязанных ветвей, или связанных так, что они содержат пути только одного типа – либо только замкнутые, либо только разомкнутые. Сети из свободных ветвей Крон называл *простейшими*, или примитивными, а сети с путями одного типа – *чисто контурными*, или *чисто узловыми*. Последние представляют собой граф типа «дерево». Возможны несколько вариантов задания метрики и структуры в таких сетях.

1. Матрица решения сети из *свободных ветвей*, как и сети, в которой есть только замкнутые или только разомкнутые пути,  $Y_{c0}$  или  $Z_{c0}$ , выглядит наиболее просто, поскольку при любом выборе путей число таких путей постоянно. Количество узлов не меняется, поэтому любой наложенный вектор остается целиком в данной сети, а не распределяется между двумя двойственными сетями.

Если метрическая матрица свободных ветвей единичная, то есть, не задано взаимодействие ветвей-измерений,  $Z = Y = \mathbf{I}$ , то возможны два варианта расчета сети при заданном векторе потока.

- Задать ковариантные компоненты вектора в *замкнутых* свободных ветвях, а контравариантные компоненты по ним определить:

$${}^m d_0^a = Y_{c0} {}^m d_a^0 = {}^m d_a^0. \quad (3.3)$$

- Задать контравариантные компоненты вектора в свободных *разомкнутых* ветвях, а ковариантные компоненты по ним определить:

$${}^j d_a^0 = Z_{c0} {}^j d_0^a = {}^j d_0^a. \quad (3.4)$$

По каждой ветви ковариантные или контравариантные компоненты здесь численно равны друг другу (как в декартовой системе координат метрической геометрии). Через  $Y_{c0}$  и  $Z_{c0}$  обозначены матрицы решения для такой простейшей сети, в этом случае они просто единичные.

Примеры таких сетей представлены на рис. 3.2.а – для ветвей-контуров и на рис. 3.2.б – для ветвей в виде разомкнутых путей. Такие сети двойственны друг к другу. Стрелки вдоль ветвей обозначают, как обычно, выбранные пути.

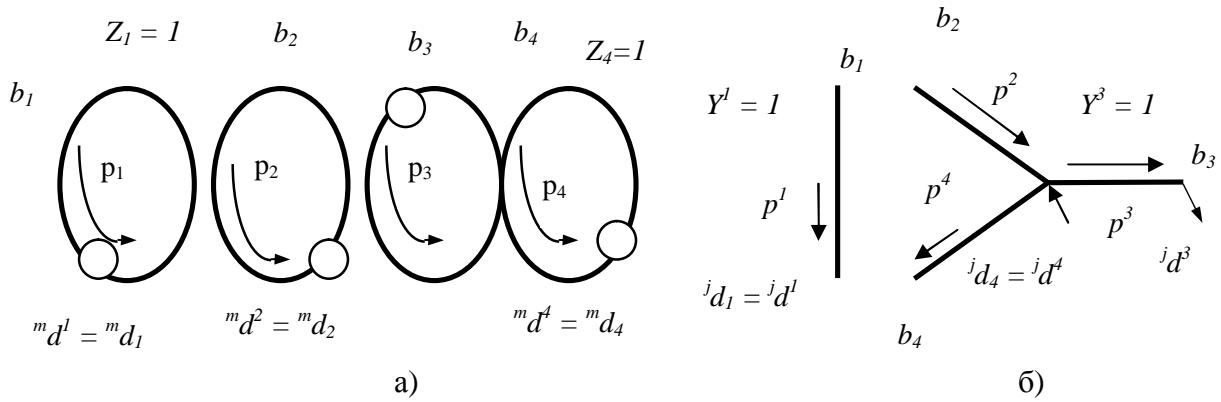


Рис 3.2. Сети из свободных ветвей, и сети с путями одного типа:  
 а) – сети из замкнутых путей; б) – сети из разомкнутых путей

На рис. 3.2.а кружки на ветвях, (как в электротехнике обозначают источники эдс), показывают, что заданы ковариантные компоненты вектора, которым численно равны контравариантные компоненты, например  ${}^m d^1 = {}^m d_1$ , поскольку метрический параметр единичный. На рис. 3.2.б для примера заданная компонента  ${}^j d^3$  показана стрелками, входящими в ветвь  $b_3$  и выходящими из нее. Крон обозначал так источники тока.

Если фундаментальные матрицы не единичные, но при этом каждый путь проходит по «своей» ветви (матрица преобразования единичная, т.е.  $C_a^a = A^a_a = \mathbf{I}$ ), то ковариантные и контравариантные компоненты вектора в замкнутых свободных ветвях связаны соотношением:

$${}^m d_0^a = (Z_{ab})^{-1} {}^m d_0^b = Y^{ab} {}^m d_0^b = Y_{c0} {}^m d_0^b, \tag{3.5}$$

где через  $Y_{c0} = Y^{ab} = (Z_{ab})^{-1}$  обозначена матрица решения для вычисления компонент в свободных ветвях заданной сети, образующих контуры. При этом  ${}^m \underline{d}_0^a = 0$ , поскольку в двойственной сети вектора нет. Для ковариантных и контравариантных компонент вектора в разомкнутых свободных ветвях получим:

$${}^j d_0^a = (Y^{ab})^{-1} {}^j d_0^b = Z_{ab} {}^j d_0^b = Z_{c0} {}^j d_0^b, \tag{3.6}$$

где через  $Z_{c0} = Z_{ab} = (Y^{ab})^{-1}$  обозначена матрица решения для вычисления компонент вектора в свободных ветвях данной сети, образующих разомкнутые пути. Такие сети аналогичны примерам, представленным на рис. 3.2, но метрические параметры ветвей теперь не равны единицам, поэтому ковариантные и контравариантные компоненты вектора численно не равны друг другу. При этом  ${}^j \underline{d}_0^a = 0$ , поскольку в двойственной сети, или  $\underline{\alpha}$ -сети, вектор не задан.

Теперь пусть существуют и метрические отношения (фундаментальные матрицы не единичные), и пути при этом проходят по произвольно выбранным наборам ветвей (матрица преобразования не единичная), т.е.  $C_a^a = (A_a^a)^{-1} \mathbf{I}$ . Но матрица преобразования остается

квадратной, поскольку количество путей одного типа равно числу ветвей в сети, ( $m = n, j = 0$ ; или  $j = n, m = 0$ ). Тогда ковариантные и контравариантные компоненты вектора в замкнутых свободных ветвях связаны соотношением (2.70):

$${}^m d_c^a = C_a^a \cdot {}_t (C_a^a Z_{ab} C_b^b)^{-1} C_b^b \cdot {}^m d_b^0 = Y_c \cdot {}^m d_b^0, \quad (3.7)$$

которое не отличается от подобных соотношений в метрической геометрии, поскольку вектор не меняет своей абсолютной величины при таком изменении системы координат, ином выборе путей, при котором количество узлов в сети постоянно. Через  $Y_c$  обозначена матрица решения. Это формула для расчета чисто контурной сети. Аналогично, двойственное соотношение (2.72) связывает ковариантные и контравариантные компоненты вектора в разомкнутых свободных ветвях при произвольном выборе путей:

$${}^j d_a^c = A_a^a \cdot {}_t (A_a^a Y^{ab} A_b^b)^{-1} A_b^b \cdot {}^j d_0^b = Z_c \cdot {}^j d_0^b. \quad (3.8)$$

Это соотношение также не отличается от подобных соотношений в метрической геометрии, преобразующих контравариантные компоненты вектора в одной системе координат в ковариантные компоненты в другой системе координат. Через  $Z_c$  обозначена матрица решения. Это формула для расчета чисто узловой сети. Такие сети отличаются от сетей на рис. 3.2 тем, что пути могут проходить по нескольким ветвям и даже несоединенным ветвям, как показано в начале главы 2.

В двойственной сети эти соотношения аналогичны, но все величины заменяются двойственными. При этом если вектор целиком расположен в замкнутых путях свободных ветвей одной сети, то в разомкнутых путях двойственной сети его нет и все его компоненты там равны нулю, поскольку отсутствуют те измерения пространства, в которых они могли бы быть. И наоборот, если вектор целиком расположен в разомкнутых путях в одной сети, то в замкнутых путях двойственной сети его нет. Как отмечалось ранее, вектор  $\mathbf{d}$  может быть задан и в двойственной сети. Тогда эти сети меняются ролями.

Матрицы решения определяются только структурой связей ветвей и (или) выбором путей, а также их метрикой, вне зависимости от существования каких-либо векторов или других геометрических объектов в пространстве сети. Матрицы решения характеризуют только собственные свойства сети. Для контуров двойственной сети свободных ветвей матрица решения имеет вид:

$$\underline{Y}_c = \underline{C}_a^a \cdot {}_t (\underline{C}_a^a \underline{Z}_{ab} \underline{C}_b^b)^{-1} \underline{C}_b^b = A_a^a \cdot {}_t (A_a^a Y^{ab} A_b^b)^{-1} A_b^b = Z_c, \quad (3.9)$$

а для разомкнутых путей двойственной сети свободных ветвей матрица решения имеет вид:

$$\underline{Z}_c = \underline{A}_a^a \cdot {}_t (\underline{A}_a^a \underline{Y}^{ab} \underline{A}_b^b)^{-1} \underline{A}_b^b = C_a^a \cdot {}_t (C_a^a Z_{ab} C_b^b)^{-1} C_b^b = Y_c, \quad (3.10)$$

где справа дано выражение через матрицы метрики и матрицы преобразования данной сети.

Во всех рассмотренных здесь вариантах расчета сети содержат либо только замкнутые, либо только разомкнутые пути. При изменении путей матрицы преобразования остаются квадратными и образуют группу.

### 3.1.4. Расчеты сетей из связанных ветвей

Теперь рассмотрим расчеты таких сетей, когда за счет слияния узлов из свободных, несвязанных ветвей, или связанных так, что они содержат пути либо только замкнутые, либо только разомкнутые, будут получаться сети, в которых часть путей замкнутые, а часть – разомкнутые.

При связывании ветвей в сеть, когда взаимно меняется число путей каждого типа, матрицы преобразования путей остаются квадратными и образуют группу. Но по отношению к преобразованию компонент *наложенных векторов* (или других геометрических объектов), заданных в путях только замкнутых или только разомкнутых, эти матрицы становятся прямоугольными, и уже группу не образуют. *Наложённый, заданный в сети вектор* меняет свою абсолютную величину так, что квадрат этой величины *остаётся постоянным только в сумме двух двойственных сетей*. Тогда для вычисления компонент вектора в новой структуре сети используется полученная в разделе 2.5.4 групповая цепочка преобразований, представленная формулами (2.70–2.73) которая внешне аналогична рассмотренным выше, но матрицы преобразования в ней прямоугольные.

Используя соотношение (2.70) можно записать для одной из двух, например, данной сети, что компоненты вектора в связанной сети  ${}^m d_c^a$  вычисляются по компонентам  ${}^m d_b^0$  в свободных замкнутых ветвях так:

$${}^m d_c^a = {}^m C_{a^t}^a ({}^m C_{a^a}^a Z_{ab} {}^m C_{b^t}^b)^{-1} {}^m C_b^b {}^m d_b^0 = Y_c {}^m d_b^0, \quad (3.11)$$

где через  ${}^m C_{a^a}^a$  обозначена прямоугольная матрица преобразования, а через  $Y_c$  – матрица решения в случае произвольного вектора, заданного в замкнутых путях:

$$Y_c = {}^m C_{a^t}^a ({}^m C_{a^a}^a Z_{ab} {}^m C_{b^t}^b)^{-1} {}^m C_b^b. \quad (3.12)$$

Используя (2.72) запишем для вектора, заданного контравариантными компонентами  ${}^j d_0^b$  в свободных разомкнутых ветвях, что:

$${}^j d_c^a = {}^j A_{a^t}^a ({}^j A_{a^a}^a Y^{ab} {}^j A_{b^t}^b)^{-1} {}^j A_b^b {}^j d_0^b = Z_c {}^j d_0^b, \quad (3.13)$$

где через  $Z_c$  обозначена матрица решения в случае произвольного вектора, заданного в разомкнутых путях:

$$Z_c = {}^j A_{a^t}^a ({}^j A_{a^a}^a Y^{ab} {}^j A_{b^t}^b)^{-1} {}^j A_b^b. \quad (3.14)$$

*Матрицы решения* связывают ковариантные и контравариантные компоненты в сетях с разной структурой, здесь – свободных и связанных ветвях, поэтому их можно рассматривать как *метрические матрицы* преобразования структуры сетей. При этом матрицы решения включают в себя только метрические матрицы свободных ветвей и матрицы преобразования,

т.е. параметры самой сети, безотносительно к каким-либо наложенным векторам или другим геометрическим объектам.

И компоненты вектора в каждой сети, и матрицы решения в двойственных сетях связаны инвариантом – постоянством квадрата величины вектора, который иногда для краткости будем называть *mj-инвариантностью*. Этот инвариант устанавливает связь матриц решения и компонент вектора, в данной сети и двойственной сети, а также в подсетях замкнутых и разомкнутых путей (m и j путях) каждой из сетей. Подробнее это рассмотрено в разделе 3.3.

Благодаря этому инварианту, в частности из (2.75), можно получить связь матрицы решения свободных ветвей с матрицами решения двух двойственных сетей. Эти соотношения позволяют, например, по матрице решения одного типа, скажем  $Z_c$ , получить матрицу решения другого типа –  $Y_c$ , не выполняя заново всех вычислений. Подставим в (2.75) обозначения матриц решения (3.12) и (3.13):

$$Y^{ab} = (Z_{ab})^{-1} = Y_{c0} = Y_c + Y Z_c Y = \\ = {}^m C_a^a \cdot {}^t ({}^m C_a^a Z_{ab} {}^m C_b^b)^{-1} {}^m C_b^b + Y^{ab} j A_a^a \cdot (j A_a^a Y^{ab} j A_b^b)^{-1} j A_b^b Y^{ab}, \quad (3.15)$$

откуда ясно, что матрицы решений в сети свободных ветвей и связанных двойственных сетях выражаются друг через друга. Например, для  $Y_c$ :

$$Y_c = Y_{c0} - Y Z_c Y = Y - Y Z_c Y, \quad (3.16)$$

или, умножая обе части в (3.16) слева и справа на  $Z$  и учитывая, что матрицы  $Z$  и  $Y$  – обратные, т.е.  $Z = Y^{-1} = Z_{c0}$ , получим для  $Z_c$ :

$$Z_c = Z_{c0} - Z Y_c Z = Z - Z Y_c Z. \quad (3.17)$$

Поскольку матрицы  $Y_{c0}$  или  $Z_{c0}$  вычисляются легко, то такие соотношения позволяют вычислять только одну из матриц решения  $Y_c$  или  $Z_c$  по длинной цепочке преобразований, а вторая матрица решения получается с помощью более простых преобразований, почти автоматически.

Отсюда получим подобные формулы, связывающие матрицы решения в двойственной сети, что обеспечивает простой расчет любой матрицы решения, если найдена хотя бы одна из матриц решения сети с данной структурой. По формулам (2.75–2.77) получим выражение для матрицы решения замкнутых путей двойственной сети (см. 3.9):

$$\underline{Y}_c = \underline{Y}_{c0} - \underline{Y} \underline{Z}_c \underline{Y} = Z - Z Y_c Z = Z_c, \quad (3.18)$$

а для матрицы решения разомкнутых путей двойственной сети (см. 3.10):

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_{c0} - \underline{Z} \underline{Y}_c \underline{Z} = Y - Y Z_c Y = Y_c, \quad (3.19)$$

которые связывают матрицы решения в двойственных сетях.

Формулы (3.16–3.19) связывают метрику ( $Z, Y$ ) и структуру ( $C, A$ ) двойственных сетей независимо от наложенных векторов или других объектов.

Формулы расчета компонент вектора  $\mathbf{d}$  для данной сети представлены в (3.11) и (3.13). Соотношение (3.11) позволяет рассчитать контравариантные компоненты заданного вектора  $\mathbf{d}$  в замкнутых путях, а (3.13) – его ковариантные компоненты в разомкнутых путях. Таким образом, это расчет сети первого типа – изменения компонент вектора при связывании свободных ветвей в сеть произвольной структуры.

Матрицы решения для данной сети даны в (3.12) и (3.14). Формула (3.12) позволяет рассчитать контравариантные компоненты произвольного вектора  $\mathbf{d}$  в замкнутых путях, а (3.14) – его ковариантные компоненты в разомкнутых путях для заданной структуры связей ветвей, определенной матрицами преобразований и импедансов. Таким образом, это решение задачи сети второго типа.

При расчете компонент вектора в связанной сети по формулам (3.11) или (3.13) необходимо выполнить ряд действий, которые состоят в перемножении и обращении матриц, умножении матрицы на вектор, каждое из которых соответствует одному из этапов перехода от сети свободных ветвей к сети связанных ветвей. Каждый из этих этапов есть преобразование определенного геометрического объекта.

Например, для формулы (3.11) имеем пять этапов решения задачи сети по преобразованию ковариантных компонент  ${}^m d_b^0$  вектора  $\mathbf{m}\mathbf{d}$  в свободных ветвях, имеющих параметры, заданные метрическим тензором  $Z_{ab}$ , в контравариантные компоненты  ${}^m d_c^a$  в связанных ветвях:

1.  ${}^m d_b = {}^m C_b^b {}^m d_b^0$  – это ковариантные компоненты вектора  $\mathbf{m}\mathbf{d}$  в базисных контурах связанных ветвей;
2.  $Z_{a^b} = {}^m C_a^a Z_{ab} {}^m C_b^b$  – это метрический тензор связанной сети, который представляет собственные и взаимные метрические параметры базисных контуров связанных ветвей;
3.  $Y^{a^b} = (Z_{a^b})^{-1} = ({}^m C_a^a Z_{ab} {}^m C_b^b)^{-1}$  – это обратный метрический тензор для базисных контуров связанной сети;
4.  ${}^m d^a = Y^{a^b} {}^m d_b = ({}^m C_a^a Z_{ab} {}^m C_b^b)^{-1} {}^m C_b^b {}^m d_b$  – это контравариантные компоненты вектора  $\mathbf{m}\mathbf{d}$  в базисных контурах связанных ветвей;
5.  ${}^m d_c^a = {}^m C_a^a {}^m d^a$  – это контравариантные компоненты вектора  $\mathbf{m}\mathbf{d}$  в каждой из ветвей связанной сети, т.е. решение задачи.

Эти пять этапов выполняются при расчете сети с любыми вариантами задания исходных параметров, которые даны матрицами решения в (3.16–3.19) и формулами расчета компонент заданного вектора, данными в (3.11) и (3.13).

Для двойственной сети формулы расчета компонент вектора и матриц решения получаются двойственной заменой всех понятий. Фактически это приводит к тому, что



формулы расчета для данной сети просто меняются местами. Например, в соответствии с (3.18) получим:

$$\begin{aligned} {}^m d_c^a &= {}^m C_{a^a} ({}^m C_{a^a} Z_{ab} {}^m C_{b^b})^{-1} {}^m C_{b^b} {}^m d_0^b = Y_c {}^m d_0^b = \\ &= Z_c {}^m d_0^b = Y Z_c Y {}^m d_0^b = Y^{ab} j_{A_a^a} (j_{A_a^a} Y^{ab} j_{A_b^b})^{-1} j_{A_b^b} Y^{ab} {}^m d_0^b, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где через  $Y_c$  обозначена матрица решения для произвольного вектора, заданного в контурах двойственной сети, которая представлена в (3.9).

Здесь надо отметить, что в (3.20), в отличие от матриц решения, контравариантным компонентам вектора в данной сети соответствуют ковариантные по характеру преобразования компоненты того же вектора в двойственной сети, и наоборот. Допустим, что вектор  ${}^m \mathbf{d}$  задан в контурах свободных ветвей *данной* сети компонентами  ${}^m d_0^b$  и надо выразить через них контравариантные компоненты  ${}^m d_c^a$  в *двойственной* сети. Тогда формуле  ${}^m d_c^a = Y_c {}^m d_0^b$  соответствует двойственная формула  ${}^m d_c^a = Z_c {}^m d_0^b$ , где заданы контравариантные компоненты. Чтобы заданные компоненты были одинаковы, т.е.  ${}^m d_0^b$ , а решение выражалось через  $Z_c$  *данной* сети, здесь появляются «обкладки» к матрице  $Z_c$  в виде матриц  $Y$ , которые дополняют представленные выше *пять этапов расчета*:

$${}^m d_c^a = Y Z_c Y {}^m d_0^b,$$

где каждый этап имеет следующий геометрический смысл:

1.  ${}^m d_0^a = Y^{ab} {}^m d_0^b$  – преобразуем исходные ковариантные компоненты в контравариантные; затем:
2.  ${}^m d_b = Z_c {}^m d_0^a = Z_c Y {}^m d_0^b$  – получаем с помощью  $Z_c$  отклики, которые являются ковариантными компонентами в контурах связанной *двойственной* сети, или с помощью указанных *пяти этапов расчета* компонент; после этого:
3.  ${}^m d_c^a = Y^{ab} {}^m d_b = Z_{ab} {}^m d_b$  – получаем в отдельных ветвях связанной *двойственной* сети искомые значения контравариантных компонент.

Такие преобразования позволяют получить контравариантные компоненты в двойственной сети с помощью матрицы решений *данной* сети, при условии, что исходные компоненты (*воздействия*) одинаковы, как для *данной* сети, так и для *двойственной* сети,  ${}^m d_0^b = {}^m d_0^b$ , т.е. расположены в тех ветвях одной из этих сетей, которые замкнуты в свободном состоянии. Источники, компоненты вектора, здесь заданы в контурах и одинаковы для *данной* совокупности *двойственных* сетей.

Двойственное соотношение можно записать для источников, компонент вектора, заданных в разомкнутых путях, используя (3.19):

$$\begin{aligned} j d_c^a &= j_{A_b^b} (j_{A_a^a} Y^{ab} j_{A_b^b})^{-1} j_{A_b^b} j d_0^b = Z_c j d_0^b = \\ &= Y_c j d_0^b = Z Y_c Z j d_0^b = Z_{ab} {}^m C_{a^a} ({}^m C_{a^a} Z_{ab} {}^m C_{b^b})^{-1} {}^m C_{b^b} Z_{ab} j d_0^b \end{aligned} \quad (3.21)$$

где через  $\underline{Z}_c$  обозначена матрица решения для произвольного вектора, заданного в разомкнутых путях двойственной сети из (3.10). Появление матриц  $Z$  вызвано теми же причинами, что и в предыдущем случае.

Обратим внимание, что в (3.20) и (3.21) матрицы решения, в отличие от (3.11) и (3.13), умножаются на двойственные компоненты вектора. Это объясняет появление матриц  $Y$  в одном случае и матриц  $Z$  в другом случае. Для сравнения запишем вместе формулы расчета данной сети из (3.11) и (3.13):

$${}^m d_c^a = Y_c {}^m d_b^0, \text{ и} \quad (3.22)$$

$${}^j d_a^c = Z_c {}^j d_0^b,$$

и двойственной сети из (3.20) и (3.21):

$${}^m \underline{d}_c^a = \underline{Y}_c {}^m \underline{d}_b^0 = Z_c {}^m d_0^b = Y Z_c Y {}^m d_b^0 \text{ и} \quad (3.23)$$

$${}^j \underline{d}_a^c = \underline{Z}_c {}^j \underline{d}_0^b = Y_c {}^j d_0^b = Z Y_c Z {}^j d_0^b.$$

Попарно складывая одинаковые компоненты  $\alpha$  сети и  $\underline{\alpha}$  сети, получим для вектора, заданного в контурах,  ${}^m \mathbf{d}$ :

$${}^m d_c^a + {}^m \underline{d}_c^a = (Y_c + Y Z_c Y) {}^m d_b^0 = Y_{c0} {}^m d_b^0 = {}^m d_0^a, \quad (3.24)$$

а для вектора, заданного в разомкнутых путях,  ${}^j \mathbf{d}$ :

$${}^j d_a^c + {}^j \underline{d}_a^c = (Z_c + Z Y_c Z) {}^j d_0^b = Z_{c0} {}^j d_0^b = {}^j d_0^a, \quad (3.25)$$

в соответствии с (3.16) и (3.17), что показывает постоянство суммы компонент вектора в одноименных ветвях двух двойственных сетях при изменении структуры. То есть в каждой ветви, которая, как показано на рис. 2.2, состоит из двух двойственных частей, компоненты заданного вектора постоянны при изменении структуры, но перераспределяются между двойственными частями.

Итак, формулы расчета компонент вектора для двойственной сети даны в (3.20) и (3.21). Формула (3.20) позволяет рассчитать контравариантные компоненты заданного вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в замкнутых путях, а (3.21) – ковариантные компоненты  ${}^j \mathbf{d}$  в разомкнутых путях. Это задачи сети первого типа – расчет изменения компонент вектора при связывании свободных ветвей в сеть для произвольной структуры.

Свойства двойственных сетей показывают их взаимное дополнение. Эти свойства проявляются в законах преобразования метрических тензоров при изменении структуры. По отношению к внешним векторам, представляющим потоки энергии, эти свойства проявляются в постоянстве потока (квадрата величины вектора) при изменении структуры.

В разделе 3.2 представлены подробные примеры расчета двойственных сетей при наличии метрики и при отсутствии метрики, как для матриц решения, так и при разных способах задания вектора. Проведенная проверка решений показывает, как изменяются компоненты наложенных векторов, заданных в замкнутых и разомкнутых путях, при

связывании свободных ветвей в сеть. Такие векторы характеризуют протекающие процессы, и данные примеры являются иллюстрацией расчета изменения процессов при изменении структуры сетей.

Расчеты в разделе 3.2 иллюстрируют особенности изменения компонент векторов при переходе к двойственной сети, показывая, что эти сети взаимно дополнительные. Их внутренние свойства проявляются в законах преобразования метрических тензоров при изменении структуры в виде матриц решения, а по отношению к внешним векторам, геометрически представляющим потоки энергии – в сохранении постоянства потока (отраженном в постоянстве квадрата величины вектора), а также при изменении структуры двойственных сетей. Связанные с этим закономерности рассмотрены в следующем разделе.

### 3.2. Примеры расчета сетей при соединении ветвей

Задача расчета сети при заданных ветвях состоит в определении откликов на приложенные воздействия. Отклики меняются при изменении воздействия. Кроме того, отклики могут меняться при изменении структуры связей. Для изучения именно этого явления здесь рассматриваются изменения откликов при изменении структуры соединения ветвей, а воздействия считаются постоянными.

Составной частью задачи расчета сети является получение матриц решения, которые определяют изменение свойств сети при изменении структуры, даже если нет воздействий.

*Размерности базисов постоянные.* Изменения структуры состоят в слиянии границ (узлов) ветвей, или разделении соединенных границ ветвей. При этом количество узлов и подсетей в сети может не меняться. Тогда, как показано в главе 2, не меняется количество независимых замкнутых и разомкнутых путей, т.е. размерности базисов соответствующих подпространств в сети. В откликах, вообще говоря, при этом могут происходить изменения, поскольку может измениться состав ветвей, входящих в пути базиса.

При таких преобразованиях размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей не меняются, а, следовательно, матрицы преобразования базисов путей остаются квадратными, т.е. имеют обратные матрицы. Это придает свойства группы преобразованиям структуры в рамках одной сети. При этом не происходит явного взаимодействия с двойственной сетью. В частности, если не произошло изменения количества узлов, то распределение значений квадрата величины наложенного вектора между двойственными сетями при изменении структуры остается неизменным. Например, если вектор, наложенный на сеть через разомкнутые пути (внешнее воздействие) уже имел какое-то распределение квадрата величины между двойственными сетями, то это распределение при изменении структуры данного вида останется прежним.

Даже при единичных весах свободных ветвей, что можно трактовать как отсутствие метрики, веса путей в связанной сети, т.е. их метрические характеристики, могут оказаться отличными от единичных значений. Более того, матрица весов соединенных ветвей становится не только не единичной, но и не диагональной. То есть, в метрической матрице связанной сети появляются элементы вне главной диагонали, хотя для свободных ветвей были элементы только на главной диагонали и эти элементы были равны единицам.

Это показывает, что метрика в сети присутствует всегда. Веса ветвей, равные единицам, позволяют только упростить формулы расчета, и выделить для изучения те свойства сети, которые относятся непосредственно к преобразованию структуры.

*Размерности базисов не постоянные.* Наибольший интерес для изучения свойств изменения структуры представляют такие изменения связей ветвей, при которых меняется

количество узлов и подсетей. Это приводит к изменению количества замкнутых и разомкнутых путей, к изменению размерностей соответствующего подпространства. При этом матрицы преобразования базисов путей становятся прямоугольными. Они не имеют обратных матриц. Такие матрицы уже не обладают свойствами группы. Следовательно, законы преобразования структуры такого типа выходят за рамки только одной сети.

Только совокупность данной сети и двойственной сети обеспечивает постоянство суммарных размерностей подпространств замкнутых и разомкнутых путей при любых изменениях структуры. Соответствующий инвариант для матриц преобразования путей двойственных сетей позволил получить формулы расчета сетей при изменении структуры.

Полученные формулы дают алгоритмы расчета откликов на ветвях при связывании свободных ветвей в сеть, других изменениях структуры связи ветвей. Формулы расчета сетей связывают метрические характеристики ветвей, которые определяют реакцию сети на воздействия, со структурой связей ветвей в сети. Формулы расчета данной и двойственной сетей оказываются взаимно дополнительными, что облегчает расчеты.

а) две двойственные сети

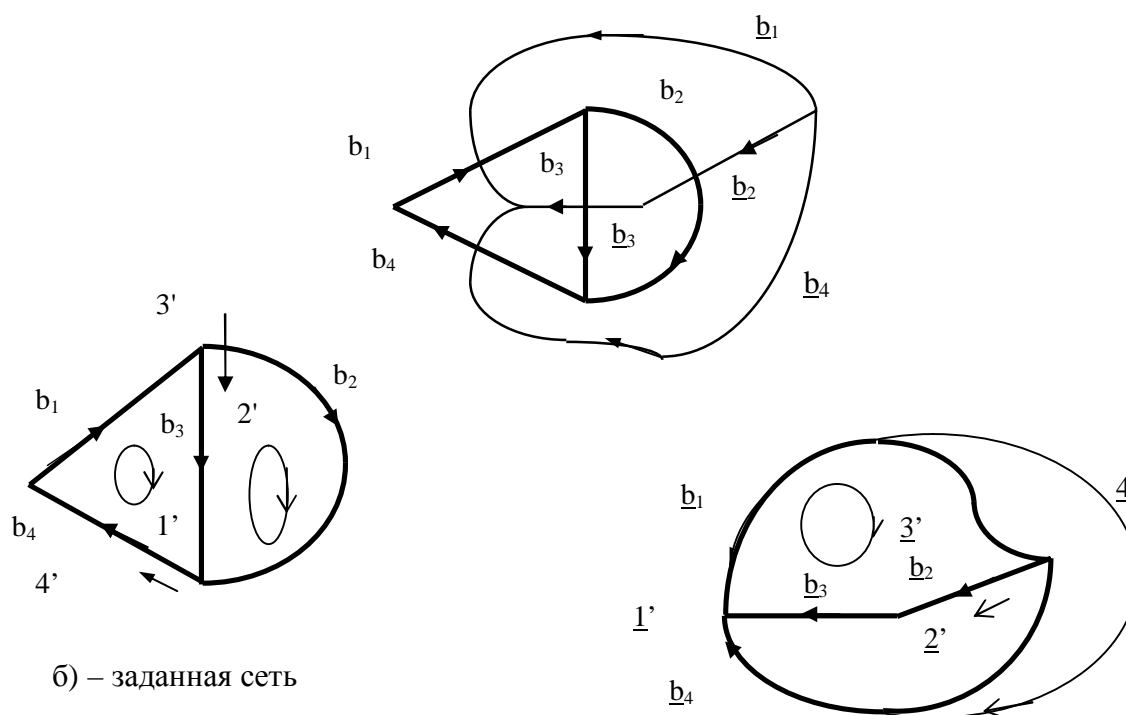


Рисунок 3.3 Пример для расчета двойственных сетей

- а) – две двойственные сети с ориентацией их ветвей. Данная сеть показана жирными линиями, двойственная сеть – тонкими;
- б) – отдельно заданная сеть и пути в ней;
- в) – отдельно двойственная сеть и пути в ней

Для иллюстрации полученных выше формул рассмотрим примеры расчета двойственных сетей, которые представлены на рисунке 3.3.

*Ориентация ветвей.* Направления ветвей указаны стрелками. Выбранные пути показаны тонкими линиями, стрелки вдоль них указывают их направления. Пути также обозначены стрелками и цифрами со штрихом, указывая на их принадлежность к связанной сети. В двойственной сети все величины, как обычно, подчеркнуты.

*Метрические свойства ветвей.* Пусть заданы метрические параметры свободных ветвей, совокупность которых можно представить в виде взаимно обратных метрических матриц (в зависимости от того, какие пути являются переменными – замкнутые или разомкнутые), так что  $Z_{ab} = (Y^{ab})^{-1}$ . В электротехнике таким матрицам соответствуют матрицы комплексных сопротивлений (импедансов),  $Z_{ab}$ , и комплексных проводимостей (адмиттансов),  $Y^{ab}$ . В общем виде эти матрицы могут иметь ненулевые элементы, как на главной диагонали, так и вне главной диагонали, например:

$$Z_{ab} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & & 1 & \\ 2 & & 3 & & \\ 3 & 1 & & 1 & \\ 4 & & & & 2 \end{array} \quad Y^{ab} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 6 & & -6 & \\ 2 & & 2 & & \\ 3 & -6 & & 12 & \\ 4 & & & & 3 \end{array} \quad 1/6 \quad (3.26)$$

*Выбор путей в ветвях.* Полагаем, что в свободных ветвях пути проходили по ветвям с теми же номерами. Это позволяет упростить изложение, но не является обязательным требованием. Матрицы преобразования от путей базиса в свободных ветвях к путям в связанных сетях, в соответствии с выбором путей на рис. 3.3.б для данной сети –  $C_{a^{\cdot}a}$ , а на рис. 3.3.в для двойственной сети, –  $\underline{C}_{a^{\cdot}a} = A^{a^{\cdot}a}$  являются ортогональными и имеют вид:

$$C_{a^{\cdot}a} = \underline{A}^{a^{\cdot}a} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1^{\cdot} & 1 & & 1 & 1 \\ 2^{\cdot} & & 1 & -1 & \\ 3^{\cdot} & & & 1 & \\ 4^{\cdot} & & & & 1 \end{array} ; \quad \underline{C}_{a^{\cdot}a} = A^{a^{\cdot}a} = \begin{array}{c|cccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ \hline \underline{1}^{\cdot} & 1 & & & \\ \underline{2}^{\cdot} & & 1 & & \\ \underline{3}^{\cdot} & -1 & 1 & 1 & \\ \underline{4}^{\cdot} & -1 & & & 1 \end{array} \quad (3.27)$$

*Внутреннее воздействие.* Наложенный вектор  ${}^m d$  может быть задан в контурах (замкнутых путях) свободных ветвей ковариантными компонентами  ${}^m d_{\alpha}^0$ , например, в виде:

$${}^m d_a^0 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array} \quad (3.28)$$

*Внешнее воздействие.* Наложенный вектор  ${}^j d$  может быть задан контравариантными компонентами  ${}^j d_0^{\cdot}$  в разомкнутых путях свободных ветвей, например, в виде:

$${}^j d_0^{\cdot} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \quad (3.29)$$

Здесь вектор  $\mathbf{d}$  в обоих случаях представлен в транспонированном виде, поскольку обычно он задается столбцом свободных членов (воздействий) в системе уравнений.

Рассмотрим расчеты для этих сетей: сначала матриц решения при единичных метрических матрицах (в отсутствии метрики), далее при неединичных, и даже недиагональных, метрических матрицах (разделы 3.2.1 и 3.2.2), а затем расчеты изменения компонент наложенного вектора потока при разных типах путей и воздействий (разделы 3.2.3 и 3.2.4).

Проверка результатов расчетов представлена в разделе 3.2.5. Проверкой является выполнение законов сохранения компонент (потоков величин) в структуре сети. Сумма контравариантных компонент в каждом узле (разомкнутом пути) в сети должна равняться нулю (как заданных компонент, так и откликов). Это аналог закона Кирхгоффа для токов в узлах электрической цепи. Одновременно сумма ковариантных компонент на ветвях по каждому контуру в сети должна равняться нулю (как заданных компонент, так и откликов). Это аналог закона Кирхгоффа для напряжений в контурах электрической цепи.

### 3.2.1. Матрицы решения в отсутствии метрики

В данном разделе ветви имеют веса, равные единицам, т.е. матрицы метрики (импедансов) свободных ветвей единичные. Матрицы решения таких сетей включают в себя только матрицы метрики (в координатах путей связанных ветвей) и матрицы преобразования, т.е. параметры, относящиеся к самой сети, безотносительно к каким-либо наложенным на нее извне векторам или другим объектам.

Матрицы решения можно использовать затем для преобразования ковариантных компонент свободных ветвей в контравариантные компоненты связанных ветвей, или контравариантных компонент свободных ветвей в ковариантные компоненты связанных ветвей. В этом смысле матрицы решения являются *перекрестными* метрическими матрицами, связывающими ковариантные и контравариантные компоненты в сетях с разной структурой, как это отмечалось в разделе 3.1.4.

Матрица преобразования контуров в *данной* сети (или разомкнутых путей в двойственной сети) состоит из первых двух строк матрицы  $C_a^a$ .

$${}^m C_a^a = \underline{J} \underline{A}^a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.30)$$

Получим матрицы решения для контуров в этой сети при наличии метрики, связывающей ковариантные и контравариантные компоненты вектора, и при ее отсутствии. Допустим сначала, что метрики нет, т.е. матрица  $Z_{ab}$  единичная;  $Z_{ab} = \mathbf{I}$ . Отсутствие элементов вне главной диагонали данной матрицы показывает, что ветви при этом не

взаимодействуют друг с другом, а единицы на главной диагонали означают, что ковариантные и контравариантные компоненты вектора совпадают (как в декартовой системе координат). Обозначим эту матрицу  ${}^mZ$ . Тогда выражение в скобках в (3.11) имеет вид:

$${}^mZ = {}^mC {}^mC_t = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.31)$$

Отсюда видно, что в связанных ветвях метрическая матрица не единичная. Это говорит о том, что ковариантные и контравариантные величины в связанных контурах взаимодействуют, в отличие от замкнутых путей свободных ветвей. Обратную матрицу к этой матрице обозначим  ${}^mY$ :

$${}^mY = ({}^mZ)^{-1} = ({}^mC {}^mC_t)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 \quad (3.32)$$

Эту матрицу надо слева и справа умножить на исходную подматрицу  ${}^mC_a^a$ , чтобы перейти к характеристикам-координатам отдельных ветвей. Тогда получим, в соответствии с формулой (3.11), следующее:

$${}^mC_t ({}^mC {}^mC_t)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 \quad (3.33)$$

Далее, умножая, справа на  ${}^mC$ , получим квадратную матрицу решения,  $Y_c$ . Ее порядок равен размерности пространства сети, т.е. числу ветвей. Полученная  $Y_c$  является матрицей решения для контуров в данной сети. Одновременно она является матрицей решения для разомкнутых путей в двойственной сети  $\underline{Z}_c = Y_c$  (см. 3.19).

$$Y_c = {}^mC_t ({}^mC {}^mC_t)^{-1} {}^mC = \underline{Z}_c = {}^jA_t ({}^jA Y {}^jA_t)^{-1} {}^jA = \quad (3.34)$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5$$

Умножая  $Y_c$  на заданные в свободных ветвях-контурах ковариантные компоненты вектора  ${}^m\mathbf{d}$ , получим значения его контравариантных компонент в связанных ветвях заданной  $\alpha$ -сети. Это и будут отклики в связанных ветвях на воздействия в свободных ветвях, т.е. решение задачи сети.



Компоненты воздействия и отклика в свободных ветвях полностью определяют величину вектора в сети из несвязанных ветвей. Аналогично, для полного определения вектора в связанной сети необходимо рассчитать также ковариантные компоненты в ветвях, которые определяют компоненты воздействия на отдельных ветвях. Вместе с откликами на ветвях эти компоненты полностью определяют величину вектора в связанной сети

Таким образом, получили две матрицы решения – для замкнутых путей в данной сети и для разомкнутых путей в двойственной сети – из всего четырех матриц решения для двух двойственных сетей. Две других матрицы решения получим из соотношения (3.13), где через матрицу решения выражены компоненты отклика в заданной связанной сети через компоненты воздействия для вектора разомкнутых путей в свободных ветвях. Это соотношение даст формулу расчета матрицы решения для разомкнутых путей в данной сети  $Z_c$ . Одновременно (3.13) даст матрицу решения  $Y_c$  и для контуров, замкнутых путей в двойственной сети. Связь (равенство) матриц решения для разомкнутых путей в данной сети и для замкнутых путей в двойственной сети представлена в соотношении (3.18).

Матрица преобразования разомкнутых путей в  $\alpha$ -сети (или контуров в двойственной,  $\alpha$ -сети) здесь состоит из последних двух строк матрицы  $A^a_a = (\underline{C}_a^a)$  и обозначается как  ${}^jA^a_a$ , где индекс  $j$  указывает на ее отношение к разомкнутым путям базиса путей:

$${}^jA^a_a = {}^m\underline{C}_a^a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.35)$$

Произведение в скобках в (3.13) дает матрицу:  ${}^jY^a = {}^jA^a {}^jA_t = ({}^m\underline{Z}^a = {}^m\underline{C}^a {}^m\underline{C}_t)$ :

$${}^jA^a {}^jA_t = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.36)$$

Обратная матрица к этой матрице,  $({}^jY^a)^{-1} = {}^jZ^a = ({}^jA^a {}^jA_t)^{-1}$ , имеет вид:

$$({}^jY^a)^{-1} = ({}^jA^a {}^jA_t)^{-1} = ({}^m\underline{C}^a {}^m\underline{C}_t)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/5 \quad (3.37)$$

Эту матрицу надо слева и справа умножить на исходную подматрицу  ${}^m\underline{C}_a^a$ . Тогда получим в соответствии с формулой (3.13):

$${}^jA_t ({}^jA^a {}^jA_t)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.38)$$

Затем, умножая, справа на  ${}^jA$  (или  ${}^mC$ ), получим также квадратную матрицу, порядок которой равен размерности пространства сети, т.е. числу ветвей. Этим преобразованием мы переходим к координатам отдельных ветвей, в которых и можно непосредственно проводить измерения для проверки и применения результатов расчета. Измерения в абстрактных путях в общем случае проводить нельзя, поскольку через каждую ветвь может проходить несколько путей выбранного базиса.

$$Z_c = {}^jA_t ({}^jA {}^jA_t)^{-1} {}^jA = \underline{Y}_c = {}^mC_t ({}^mC {}^mC_t)^{-1} {}^mC = \quad (3.39)$$

$$= \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \underline{3} & \underline{4} \\ \hline -1 & -2 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline -1 & 3 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{5} \quad \begin{array}{c} \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ \hline -1 & 1 & 1 & \\ \hline -1 & & & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ \hline 3 & -1 & -1 & -2 \\ \hline -1 & 2 & 2 & -1 \\ \hline -1 & 2 & 2 & -1 \\ \hline -2 & -1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{5}$$

Суммируя матрицы  $Z_c$  и  $Y_c$  данной сети, как в (2.76), получим единичную матрицу, как и для двойственной сети при суммировании  $\underline{Z}_c$  и  $\underline{Y}_c$ . Аналогичный результат получим и для перекрестных сумм матриц решения как в (2.77)  $Y_c + \underline{Y}_c = Z_c + \underline{Z}_c = \mathbf{I}$ . Например,  $Z_c + Y_c = \mathbf{I} =$

$$= \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{5} + \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ \hline 3 & -1 & -1 & -2 \\ \hline -1 & 2 & 2 & -1 \\ \hline -1 & 2 & 2 & -1 \\ \hline -2 & -1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{5} = \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Полученные матрицы решения позволяют рассчитать изменения компонент *любого* вектора при соединении свободных ветвей в сеть с *данной структурой*, когда метрические матрицы единичные.

### 3.2.2. Матрицы решения при наличии метрики

Напомним, что матрицы решения можно рассматривать как «перекрестные» метрические матрицы, описывающие связь сетей с разной структурой и характеризующие собственные свойства сети. Введение метрики формально состоит в том, что в матрицах метрического тензора свободных ветвей появляются отличные от единиц диагональные элементы, а также не равные нулю недиагональные элементы.

Вместе с тем, как показано в предыдущем разделе, даже единичная матрица метрики свободных ветвей при преобразовании к связанным ветвям порождает метрические матрицы, которые недиагональные и неединичные. Это показывает, что обычно существует взаимодействие метрических параметров замкнутых базисных путей и разомкнутых базисных путей в связанной сети. Таким образом, метрика фактически присутствует всегда. Допущения предыдущего раздела позволили вместе с тем упростить формулы расчета сети и выделить для изучения те свойства преобразования сетей, которые относятся непосредственно к их структуре.

Наличие не равных единицам диагональных членов в метрической матрице означает, что даже в свободных ветвях отклики не равны воздействиям, а меняются в соответствии со значениями метрики. При этом координаты-пути уже нельзя сравнивать с декартовыми координатами евклидовой геометрии. Наличие недиагональных членов в метрической матрице означает, что есть взаимодействие даже не связанных ветвей. Примером в электротехнике может служить взаимодействие по индуктивности непосредственно не соединенных катушек-ветвей в электрической цепи.

При наличии метрики матрицы решения будут связывать соотношения (3.16–3.18), в которых не только появляются метрические матрицы в скобках, но также возникают «обкладки» из метрических матриц при вычислении матриц решения по двойственным к ним матрицам решения, например в (3.16):  $Y_c = Y - Y Z_c Y$ . Эти обстоятельства, которые не кажутся очевидными, на самом деле являются особенностями проявления двойственной природы сетей, благодаря которой они взаимно дополняют друг друга.

Повторим вычисления предыдущего раздела, но с использованием метрических матриц, представленных в (3.26). Матрица решения для сети из свободных ветвей, которую обозначим как  $Y_{c0}$ , для контуров получается обращением заданной метрической матрицы  $Z$ , т.е.  $Y_{c0} = Z^{-1} = Y$ , а для разомкнутых путей – обращением матрицы  $Y$ , т.е.  $Z_{c0} = Y^{-1} = Z$ . Таким образом, заданные метрические матрицы свободных ветвей одновременно являются друг для друга матрицами решения.

Если в связанной сети остались только контуры, а в двойственной сети – только разомкнутые пути, то матрицы решения можно получить из соотношений (3.7) и (3.8). В этих соотношениях матрицы преобразования квадратные. Эти преобразования образуют группу, т.е. получаемые компоненты описывают тот же самый вектор, с той же самой величиной, что и в случае свободных ветвей. Все эти преобразования пока не отличаются от обычной геометрии. Ситуация меняется, когда при связывании свободных ветвей в сети меняется количество узлов и подсетей.

Если при соединении свободных ветвей в связанную сеть количество узлов изменилось, то часть контуров превращается в разомкнутые пути. Квадратная матрица преобразования контуров свободных ветвей в контуры связанной сети  $C_a^a$  становится прямоугольной. Такая матрица обозначается как  ${}^m C_a^a$ . Опуская, для краткости, текущие индексы  $\alpha, \beta$ , будем также обозначать ее как  ${}^m C$ .

Матрица решения  $Y_c$  заданной связанной сети получается преобразованием метрической матрицы контуров свободных ветвей  $Z$  в метрическую матрицу контуров связанных ветвей  ${}^m Z$ . Затем производится обращение этой матрицы, т.е. получается матрица  ${}^m Y_c = ({}^m Z)^{-1}$ . Это матрица решения для связанных контуров. Для получения в дальнейшем

матрицы решения в координатах отдельных ветвей связанной сети необходимо преобразовать матрицу  ${}^m Y$  с помощью умножения на матрицу  ${}^m C$  справа и слева. Эти действия преобразуют матрицу метрических характеристик контуров в матрицу метрических характеристик отдельных ветвей связанной сети.

Такое преобразование необходимо сделать потому, что в дальнейшем, при расчете откликов на воздействия, *реально измерить результаты расчета можно только на самих ветвях*. Дело в том, что по каждой ветви может проходить несколько абстрактно выбранных контуров (а также, конечно, и разомкнутых путей). По этой причине полученные для каждого контура значения результата расчета нельзя (в общем случае) измерить непосредственно.

Для получения матрицы решения в условиях, когда матрицы преобразования стали прямоугольными, необходимо выполнить следующие действия:

1. Выражение в скобках в (3.11) при  $Z_{ab}^{-1} \mathbf{I}$ , есть матрица метрического тензора контуров связанной сети, которую обозначим  ${}^m Z_{a'b'} = {}^m C_a^a Z_{ab} {}^m C_b^b$ . Опуская, для краткости, текущие индексы  $\alpha, \beta$ , можем записать, что  ${}^m Z = {}^m C Z {}^m C_t$ .

Для выполнения таких преобразований сначала умножим  $Z$  справа на  ${}^m C_t$ :

$$Z {}^m C_t = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & 1 & \\ \hline & 3 & & \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline & & & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \times \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & -1 \\ \hline & 3 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (3.40)$$

Затем результат умножим слева на  ${}^m C$ , получим:

$${}^m Z_{a'b'} = {}^m C (Z {}^m C_t) = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \times \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & -1 \\ \hline & 3 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & -2 \\ \hline -2 & 4 \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} m \\ m \\ m \\ m \end{array} \quad (3.41)$$

2. Обращение этой матрицы представляет собой матрицу решения для контуров связанной сети. Умножив эту матрицу на вектор воздействия в контурах, получим отклики в контурах. Обозначим эту матрицу как  ${}^m Y = ({}^m Z)^{-1}$ ; она принимает вид:

$${}^m Y = ({}^m Z)^{-1} = ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 2 & 7 \\ \hline \end{array} \end{array} 1/24 \quad (3.42)$$

Данную матрицу надо слева и справа умножить на исходную подматрицу  ${}^m C_a^a$ . Тогда получим в соответствии с формулой (3.11) следующее:

$${}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 2 & 7 \\ \hline \end{array} \end{array} 1/24 = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 2 & 7 \\ \hline 2 & -5 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} 1/24 \quad (3.43)$$

Умножая, справа на  ${}^m C$ , получим квадратную матрицу решения,  $Y_c$ , порядок которой равен размерности пространства сети. Эта матрица одновременно является матрицей решения как для контуров в данной сети, так и для разомкнутых путей в двойственной сети, где она обозначена как  $\underline{Z}_c = Y_c$  (см. 3.10).

$$Y_c = {}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} {}^m C = \underline{Z}_c = {}^j A_a^{a'} ({}^j A_a^{a'} Y^{ab} {}^j A_b^{b'} t)^{-1} {}^j A_b^{b'} = \quad (3.44)$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \\ 2 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{24} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{24}$$

Умножение этой матрицы на заданные ковариантные компоненты любого вектора (воздействия в замкнутых свободных ветвях) даст значения его контравариантных компонент в связанных ветвях данной сети (если заданы метрические параметры).

Таким образом, получили две из четырех матриц решения двойственных сетей.

Две другие матрицы решения, как и раньше, получим по формуле (3.13) для разомкнутых путей в данной сети  $Z_c$ . Это одновременно даст матрицу решения  $\underline{Y}_c$  и для контуров в двойственной сети (см. 3.18).

Матрица преобразования разомкнутых путей в данной сети (или контуров в двойственной сети) состоит из последних двух строк матрицы  $A^{a'}_a = \underline{C}_a^{a'}$  и дана в (3.35), а метрическая матрица  $Y$  дана в (3.26) и является обратной к матрице  $Z$ .

Произведение в скобках матриц в (3.13) дает метрическую матрицу разомкнутых путей связанной сети  ${}^j Y$ . Эта матрица одновременно является метрической матрицей замкнутых путей связанной двойственной сети, которую обозначим как  ${}^m Z$ . Таким образом,  ${}^m Z = {}^j Y$ . Метрическую матрицу получим в два этапа. Сначала умножим метрическую матрицу свободных ветвей справа на транспонированную матрицу преобразования (3.35):

$${}^j Y A_t = \underline{Z} {}^m C_t = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 6 & & -6 & \\ & 2 & & \\ -6 & & 12 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{6} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 2 & \\ 18 & 6 \\ & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{6} \quad (3.45)$$

Затем результат умножим слева на матрицу преобразования:

$${}^j Y^{a'b'} = {}^j A^{a'}_a Y^{ab} {}^j A^{a'}_a t \text{ (или } = {}^m Z_{a'b'} = {}^m C_a^{a'} Z_{ab} {}^m C_b^{b'} t) =$$

$${}^j Y^{a'b'} = {}^m Z_{a'b'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 2 & \\ 18 & 6 \\ & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{6} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 32 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{6} \quad (3.46)$$

Обратная к ней метрическая матрица связанной сети имеет следующий вид:

$${}^jZ_{a'b'} = ({}^jY^{a'b'})^{-1} = ({}^jA_{a'} Y^{ab} {}^jA_{a't'})^{-1} \text{ (или } = {}^mY^{a'b'} = ({}^mZ_{a'b'})^{-1}\text{):}$$

$${}^jZ_{a'b'} = ({}^jY^{a'b'})^{-1} = \begin{array}{c} \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 9 & -12 \\ \hline -12 & 32 \\ \hline \end{array} 1/24 \quad (3.47)$$

Полученную матрицу надо слева и справа умножить на исходную подматрицу  ${}^mC = {}^jA$ , чтобы перейти в систему координат отдельных ветвей связанной сети. Обратим внимание, что определитель, равный  $1/24$ , здесь получился тот же, что и для матрицы  ${}^mY = ({}^mZ)^{-1}$  в (3.42). В результате по формуле (3.13) получим:

$$\begin{aligned} {}^mC_t ({}^mC \underline{Z} {}^mC_t)^{-1} &= {}^jA_t ({}^jA Y {}^jA_t)^{-1} = \\ &= \begin{array}{c} \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 9 & -12 \\ \hline -12 & 32 \\ \hline \end{array} 1/24 = \begin{array}{c} \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & -20 \\ \hline 9 & -12 \\ \hline 9 & -12 \\ \hline -12 & 32 \\ \hline \end{array} 1/24 \quad (3.48) \end{aligned}$$

Умножая, справа на  ${}^mC$ , получим также квадратную матрицу, порядок которой равен полной размерности пространства сети, т.е. числу ветвей:

$$\begin{aligned} Y_c = {}^mC_t ({}^mC \underline{Z} {}^mC_t)^{-1} {}^mC = Z_c = {}^jA_t ({}^jA Y {}^jA_t)^{-1} {}^jA = \\ &= \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & -20 \\ \hline 9 & -12 \\ \hline 9 & -12 \\ \hline -12 & 32 \\ \hline \end{array} 1/24 \begin{array}{c} \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 1 & 1 & \\ \hline -1 & & & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 17 & 3 & 3 & -20 \\ \hline 3 & 9 & 9 & -12 \\ \hline 3 & 9 & 9 & -12 \\ \hline -20 & -12 & -12 & 32 \\ \hline \end{array} 1/24 \quad (3.49) \end{aligned}$$

Эта матрица одновременно является матрицей решения как для контуров в данной сети, так и для разомкнутых путей в двойственной сети  $Z_c = Y_c$  (см. 3.10).

Полученные матрицы решения позволяют рассчитать изменения компонент любого вектора при связывании свободных ветвей в сеть с данной структурой, когда метрические матрицы имеют отличные от единиц элементы, как на главной диагонали, так и вне диагонали. Метрические матрицы представляют собой проекции метрического тензора и должны быть симметричны, то есть иметь равные элементы, симметричные относительно главной диагонали. Это обусловлено общими соображениями о симметрии пространства – с точки зрения геометрии, и соображениями о сохранении потока энергии в двух сетях при обмене между ветвями, что обеспечивается симметричным равенством взаимных элементов – с точки зрения физики.

Здесь уже нельзя проверить т<sub>j</sub>-инвариант, просто суммируя матрицы решения  $Z_c$  и  $Y_c$  данной сети, как в (2.76) и получая единичную матрицу. Аналогично для двойственной сети, суммируя матрицы решения  $Z_c$  и  $Y_c$ . Точно также и для «перекрестных» сумм матриц решения для замкнутых путей данной и двойственной сетей или разомкнутых путей данной

и двойственной сетей, как в (2.77)  $Y_c + \underline{Y}_c = Z_c + \underline{Z}_c = \mathbf{I}$ . Дело в том, что при наличии метрики не равной единичной, между этими матрицами существуют равенства (3.16–3.19), которые связывают метрику и структуру сетей.

Проверка выполнения соотношений (3.16–3.19) для матриц решения является также проверкой правильности вычислений. Отсюда можно получить вторую матрицу решений, если известна первая. Это позволяет обойтись без обращения матрицы (3.42) или (3.47), что критически важно при расчетах сложных сетей с большим количеством ветвей.

Используем для такой проверки формулу (3.17):  $Z_c = Z_{c0} - Z Y_c Z$  и  $Z = Z - Z Y_c Z$ . Это одновременно как подтвердит наличие инварианта двойственных сетей, так и даст проверку правильности вычислений, результаты которых не всегда очевидны.

Итак, выполним в (3.17) действия  $Z - Z Y_c Z$  и проверим их равенство матрице  $Z_c$  из (3.49). Сначала перемножим матрицы  $Z Y_c =$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & 1 & \\ \hline & 3 & & \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline & & & 2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 7 & -5 & 2 \\ \hline 2 & -5 & 7 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \frac{1}{24} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 10 & -1 & 11 & 10 \\ \hline 6 & 21 & -15 & 6 \\ \hline 6 & -3 & 9 & 6 \\ \hline 8 & 4 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} \frac{1}{24}
 \end{array}$$

Затем результат умножим на  $Z$  справа:  $(Z Y_c) Z =$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 10 & -1 & 11 & 10 \\ \hline 6 & 21 & -15 & 6 \\ \hline 6 & -3 & 9 & 6 \\ \hline 8 & 4 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} \frac{1}{24} \times \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & 1 & \\ \hline & 3 & & \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline & & & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 31 & -3 & 21 & 20 \\ \hline -3 & 63 & -9 & 12 \\ \hline 21 & -9 & 15 & 12 \\ \hline 20 & 12 & 12 & 16 \\ \hline \end{array} \frac{1}{24} \quad (3.50)$$

И, наконец, получим матрицу решения для контуров в данной сети

$$Z_c = Z - (Z Y_c Z) = \quad (3.51)$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 48 & & 24 & \\ \hline & 72 & & \\ \hline 24 & & 24 & \\ \hline & & & 48 \\ \hline \end{array} \frac{1}{24} - \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 31 & -3 & 21 & 20 \\ \hline -3 & 63 & -9 & 12 \\ \hline 21 & -9 & 15 & 12 \\ \hline 20 & 12 & 12 & 16 \\ \hline \end{array} \frac{1}{24} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 17 & 3 & 3 & -20 \\ \hline 3 & 9 & 9 & -12 \\ \hline 3 & 9 & 9 & -12 \\ \hline -20 & -12 & -12 & 32 \\ \hline \end{array} \frac{1}{24}$$

Здесь, для наглядности, элементы  $Z$  умножены на 24. Можно видеть, что результат совпадает с матрицей  $Z_c$ , полученной в (3.49), что подтверждает правильность вычислений и проверяет инвариант двойственных сетей. Аналогичные проверки можно выполнить для полученных матриц решения и по другим формулам (3.16–3.19).

### 3.2.3. Компоненты вектора в сети при отсутствии метрики

Теперь рассмотрим непосредственно расчет сети в традиционном понимании, т.е. расчет откликов на приложенные воздействия. В абстрактной сети такой постановке задачи соответствует преобразование компонент заданного в сети вектора, (он представляет

процесс, например, поток энергии в сложной системе) в искомые компоненты с помощью метрической матрицы данной структуры. Если вектор  $\mathbf{d}$  задан, например, ковариантными компонентами,  $d_a$ , то надо найти контравариантные компоненты,  $d^b$ , из уравнения:

$$d_a = A_{ab} d^b.$$

Решением данного уравнения, после умножения обеих частей уравнения слева на матрицу, обратную и транспонированную к данной метрической матрице, является вектор:

$$d^b = (A_{ab})^{-1} d_a = A^{ba} d_a.$$

При этом конечно, надо преобразовать все члены уравнения из той системы координат, в которой они заданы, к той системе координат, для которой производится расчет. В данном случае это преобразование от координат-путей свободных ветвей к координатам-путям в связанной сети.

Если вектор  $\mathbf{d}$  задан, наоборот, контравариантными компонентами,  $d^a$ , то надо найти ковариантные компоненты,  $d_b$ , с помощью обратной (к предыдущей) метрической матрицы данной структуры из уравнения:

$$d^a = B^{ab} d_b.$$

Решением данного уравнения, после умножения обеих частей уравнения слева на матрицу, обратную и транспонированную к данной метрической матрице, является вектор:

$$d_b = (B^{ab})^{-1} d^a = B_{ba} d^a.$$

При этом также надо преобразовать все члены уравнения из той системы координат, в которой они заданы, к той системе координат, для которой производится расчет, т.е. от координат-путей свободных ветвей к координатам-путям в связанной сети.

Далее в каждом случае результат преобразуется к значениям компонент в самих ветвях связанной сети. Дело в том, что измерения с целью проверки правильности результатов вычислений, можно производить только непосредственно в «физических» элементах сети (системы), а не в абстрактных путях.

В обоих случаях сумма произведений ковариантных и контравариантных компонент вектора по каждому базисному пути (или по совокупности ветвей) дает квадрат величины вектора. В электрической цепи, например, этому соответствует рассеиваемая мощность, равная сумме произведений токов и напряжений по совокупности базиса контуров, замкнутых путей (если заданы источники напряжения) или базиса разомкнутых путей (если заданы источники тока). Либо это сумма произведений токов и напряжений по отдельным ветвям.

Квадрат величины вектора остается постоянным в совокупности двух двойственных сетей. По результатам расчета будет показано, что та часть вектора, которая «исчезает» при соединении свободных ветвей в данную сеть, появляется в двойственной сети при



соответствующем связывании тех же ветвей. Это и есть математическая демонстрация выполнения закона сохранения потока энергии, который является инвариантом относительно группы преобразования структуры. Точнее – относительно алгебраических преобразований структуры двойственных сетей, обладающих свойствами группы.

Таким образом, расчет сети можно представить как преобразование компонент вектора. Преобразования выполним в соответствии с формулами (3.11), (3.13) для данной сети, (3.20), (3.21) – для двойственной сети, а также с учетом (3.24) и (3.25), которые показывают постоянство компонент вектора при изменении структуры двойственных сетей.

Прежде всего, рассмотрим подробнее, как задается и ведет себя в сети вектор. Такие вопросы уже рассматривались в предыдущих главах. Это важно еще и потому, что аналогично задаются и ведут себя другие, многомерные объекты, которые могут возникать в сетях с размерностями, более высокими, чем одномерные ветви. Например, в полиэдральных сетях, которые представляют процесс возбуждения сложных многомерных систем электромагнитными волнами, магнитогидродинамическими волнами и т.д. Здесь поведение вектора рассмотрим применительно к конкретным примерам расчета сети.

Само задание вектора ковариантными или контравариантными компонентами определяет ту часть структуры сети, то подпространство путей, в котором будут располагаться его компоненты. Если вектор задается ковариантными компонентами в замкнутых путях, тогда контравариантные компоненты являются откликами. Если вектор задается контравариантными компонентами в разомкнутых путях, тогда ковариантные компоненты являются откликами.

Вектор задается в сети (внедряется в сеть, накладывается на сеть, возбуждает сеть) своими компонентами, которые рассматриваются как воздействие. Эти компоненты не определяют вектор полностью, поскольку не дают результат реакции сети (отклики), их распределение по отдельным ветвям и, в конце концов, величину вектора. Величина вектора определяется через квадрат его величины (смотри главу 2) и равна сумме произведений контравариантных и ковариантных компонент по векторам базиса (координатам). В данном случае базисы составляют независимые замкнутые и разомкнутые пути в сети.

Вектор можно задать либо в самих ветвях, либо на границах ветвей (в узлах). В первом случае вектор является внутренним воздействием, во втором – внешним воздействием. Как показано в главе 2, вектор в ветвях задается ковариантными компонентами, проявляет себя в замкнутых путях, и контравариантные компоненты являются откликами. Вектор на границах ветвей задается контравариантными компонентами, проявляет себя в разомкнутых путях, и ковариантные компоненты являются откликами.

Такое поведение вектора связано со свойствами его ковариантных и контравариантных компонент – с одной стороны; и со свойствами так называемых поперечных и продольных величин в физике, которые ввел Файрстоун (*Firestone, 1933*), смотри главу 1, – с другой стороны. Контравариантные величины (компоненты) измеряют как обычные проекции на ось координат, т.е. по каждой оси получаем одну точку. В физике таким компонентам соответствуют «продольные» величины, значение которых можно измерить в одной точке. Например, такими «продольными» величинами являются: сила, приложенная в точке; ток, который имеет одно значение по всей длине проводника; или поток жидкости в трубке.

Ковариантные величины (компоненты), которые в главе 2 были в простейшем случае косоугольных координат представлены как «ортогональные» проекции вектора на ось координат, имеют иную природу. Например, Схоуттен (*Схоуттен, 1966*) предлагал ковариантные величины представлять как две гиперплоскости, ортогональные оси координат, которые отсекают на этой оси некий «вектор», определяющий направление перехода между гиперплоскостями, но который трудно представить наглядно. В физике таким компонентам соответствуют «поперечные» величины, которые можно измерить как разность значений в двух точках. Например, по направлению распространения потока энергии, который подлежит измерению.

Примером «поперечной» величины может служить напряжение, которое измеряется как разность потенциалов в двух точках, а фактически как «вектор», связывающий две эквипотенциальные поверхности – гиперплоскости. Аналогично измеряется давление в газовом потоке – как разность между двумя изобарами – поверхностями равного давления. Скорость измеряется как разность между измерениями положения тела в двух точках за единицу времени.

Физическая размерность произведения продольной и поперечной величин в каждой предметной области всегда равна  $[L^5 T^{-5}]$  – т.е. размерности потока энергии, измеряемого мощностью. Геометрическая размерность произведения ковариантной и контравариантной компонент – это квадрат величины вектора. Геометрический смысл произведения продольной и поперечной величин – это произведение вектора и разности поверхностей, т.е. это размерность объема, единицы пространства, которая может рассматриваться как единица размещения потока энергии в пространстве.

Продольная величина может быть воздействием, тогда поперечная – отклик. Это происходит при воздействии на систему извне, и базисные потоки тогда располагаются в разомкнутых путях, поскольку в контуре разность потенциалов создать невозможно. Поперечная величина может быть воздействием, тогда продольная – отклик. Это происходит при воздействии на систему изнутри, и базисные потоки тогда располагаются в замкнутых

путях, поскольку внешнюю разность потенциалов, которая бы вывела поток из контура создать невозможно.

Так можно вкратце представить физическое и структурное содержание понятия вектора, заданного в сети в замкнутых и разомкнутых путях. Приступим к рассмотрению особенностей расчета компонент такого вектора на простых примерах.

Компоненты откликов на воздействия можно получить двумя способами. Эти компоненты можно получить сразу, умножением соответствующей матрицы решения на компоненты вектора, заданные в замкнутых ветвях –  ${}^m d_{\alpha}^0$ , или в разомкнутых свободных ветвях –  ${}^j d_0^{\alpha}$ . Такой путь возможен, но не всегда удобен. Дело в том, что при изменении структуры сети матрицу решения надо рассчитать заново, а для этого надо снова проделать все трудоемкие вычисления по перемножению и обращению матриц.

При частых изменениях структуры выгоднее рассчитать компоненты вектора по этапам 1–5, как, например, в разделе 3.1.4. В этом случае часть умножений матрицы на матрицу заменяется умножением матрицы на вектор, что требует заметно меньшее число действий. При выполнении цепочки таких этапов получим искомые компоненты вектора в новой структуре сети, но без вычисления матриц решения. Какой алгоритм выбрать: расчет компонент вектора, или расчет матрицы решения – зависит от вида поставленной задачи.

В качестве примера рассмотрим прежние сети на рис. 3.3, чтобы сравнивать полученные результаты. Матрицы преобразования даны в (3.27). В этом разделе *метрические матрицы будут единичные*:  $Z = Y = \mathbf{I}$ , а в следующем – как в (3.26), т.е. неединичные и недиагональные.

### **Вектор замкнутых путей ${}^m \mathbf{d}$**

Рассмотрим вектор  ${}^m \mathbf{d}$ , который задан внутри сети, т.е. в ее ветвях, и поэтому действует только в контурах. В свободных замкнутых ветвях – контурах  ${}^m \mathbf{d}$  задан ковариантными компонентами  ${}^m d_{\alpha}^0$ , численные значения которых для этого примера представлены в (3.28). *Эти компоненты являются воздействиями* и остаются таковыми при любом соединении ветвей, т.е. при любой структуре сети. Расчет откликов проведем для сетей трех видов: сеть из свободных замкнутых ветвей; связанная сеть, в которой есть только контуры; связанная сеть, в которой уменьшилось число контуров.

Для свободных ветвей по формуле (3.3) из раздела 3.1.4 найдем контравариантные компоненты-отклики  ${}^m d_0^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$ , равные:  ${}^m d_0^a = Y_{c0} {}^m d_a^0 = {}^m d_a^0$ , поскольку  $Y_{c0} = I$ . По ним найдем полную величину вектора, поскольку все ветви данного типа здесь замкнутые. Квадрат величины вектора, напомним, равен  $|\mathbf{d}|^2 = {}^m d_0^a {}^m d_a^0$ , т.е. сумме произведений контравариантных и ковариантных компонент по каждому измерению базиса путей.

Для чисто контурной связанной сети найдем такие же отклики по формуле (3.7):

$${}^m d_c^a = C_{a^i}^a (C_{a^i}^a Z_{ab} C_{b^i}^b)^{-1} C_{b^i}^b {}^m d_b^0 = Y_c {}^m d_b^0.$$

Полная величина вектора  ${}^m \mathbf{d}$  не изменится, поскольку в такой сети все пути замкнутые.

Для связанной сети, в которой изменилось (уменьшилось) количество замкнутых путей-контуров, найдем для вектора  ${}^m \mathbf{d}$  контравариантные компоненты-отклики  ${}^m d_c^a$  по формуле (3.11) в заданной сети:

$${}^m d_c^a = {}^m C_{a^i}^a ({}^m C_{a^i}^a Z_{ab} {}^m C_{b^i}^b)^{-1} {}^m C_{b^i}^b {}^m d_b^0 = Y_c {}^m d_b^0,$$

и по формуле (3.20) –  ${}^m \underline{d}_c^a$  для двойственной сети:

$${}^m \underline{d}_c^a = {}^m \underline{C}_{a^i}^a ({}^m \underline{C}_{a^i}^a \underline{Z}_{ab} {}^m \underline{C}_{b^i}^b)^{-1} {}^m \underline{C}_{b^i}^b {}^m \underline{d}_b^0 = \underline{Y}_c {}^m \underline{d}_b^0.$$

По этим компонентам получим составляющие  ${}^m \mathbf{d}$ , а именно: квадрат величины вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в данной подсети:  $|{}^m \mathbf{d}|^2 = {}^m d_c^a {}^m d_a^0$ , а также квадрат величины вектора  ${}^m \underline{\mathbf{d}}$  в двойственной подсети:  $|{}^m \underline{\mathbf{d}}|^2 = {}^m \underline{d}_c^a {}^m \underline{d}_a^0$ .

1. Сначала рассмотрим сеть из простейших ветвей, которые представлены на рис. 3.4.а. Каждая ветвь на этом рисунке образует контур. Для них отклики – контравариантные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  – численно равны его заданным ковариантным компонентам. Поскольку отклики здесь численно равны воздействиям, то имеем, что  ${}^m d_0^a = {}^m d_a^0$ . Подставляя значения ковариантных компонент из (3.28), получим квадрат величины вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в свободных замкнутых ветвях, которые образуют контуры:

$$\zeta^m \mathbf{d}_\zeta^2 = {}^m d_a^0 {}^m d_0^a = 2 \times 2 + 1 \times 1 + 4 \times 4 + 2 \times 2 = 4 + 1 + 16 + 4 = 25. \quad (3.52)$$

Таким образом, получили все параметры сети из свободных ветвей.

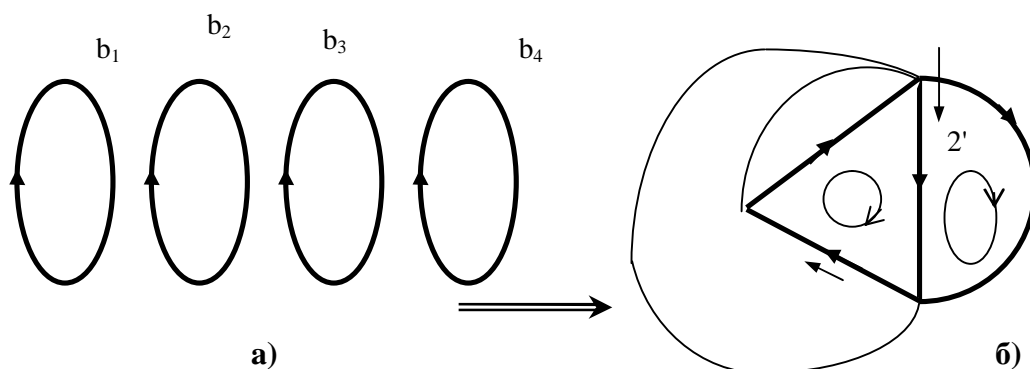


Рис. 3.4. Получение чисто контурной сети из простейшей сети

а) – простейшая контурная сеть из замкнутых свободных ветвей;

б) – связанная сеть, состоящая из контуров – чисто контурная сеть

2. Теперь рассмотрим сеть на рис. 3.4.б, где тонкие линии показывают, что соединяемые ими узлы можно совместить. Каждую ветвь на рис. 3.4.б можно замкнуть независимым контуром. Фактически эта чисто контурная сеть соответствует сети на рис.

2.2.е, где ветви образуют как бы лепестки, связанные одним узлом. Выберем пути в этой сети такие, которые описаны матрицей  $C_a^a$  в (3.27). Тогда компоненты  ${}^m d_c^a$  вектора получим по формуле (3.7), используя те пять этапов, которые описаны в разделе 3.1.4.

2.1. Сначала сделаем преобразование координат и получим ковариантные компоненты-воздействия  ${}^m d_{a^*}$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в выбранных контурах базиса по формуле  ${}^m d_{a^*} = C_a^a \cdot {}^m d_{a^0}$ , подставляя значения из (3.27) и (3.28):

$${}^m d_{a^*} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

2.2. Затем получим матрицу метрического тензора в выбранных контурах связанной сети по формуле:  $Z_{a^*b^*} = C_a^a Z_{ab} C_b^{b^*} = C_a^a Z_{ab} C_b^b$ , при этом  $Z_{ab} = \mathbf{I}$ .

Таким образом, численно эта матрица равна  $Z_{a^*b^*} = C_a^a C_b^{b^*} =$

$$= \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & \\ 1 & -1 & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

2.3. Обратная метрическая матрица (электрическая аналогия – проводимости), представляющая метрический тензор для базисных контуров связанной сети, имеет здесь простой вид, поскольку определитель равен единице:

$$Y^{a^*b^*} = (C_a^a C_b^{b^*})^{-1} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \end{matrix} \quad (3.55)$$

где индексы  $m$  справа от матрицы показывают, что все пути – контуры.

2.4. Получим контравариантные компоненты  ${}^m d^{a^*}$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в базисных контурах связанных ветвей по формуле  ${}^m d^{a^*} = Y^{a^*b^*} {}^m d_{b^*}$ :

$${}^m d^{a^*} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Как видим, отклики в путях новой системы координат связанной сети и отклики в свободных ветвях отличаются, хотя сеть по-прежнему состоит из одних контуров.

2.5. Получим решение данной задачи, т.е. контравариантные компоненты  ${}^m d_c^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в каждой из отдельных ветвей связанной сети по формуле  ${}^m d_c^a = C_a^a \cdot {}^m d^{a^*}$ :

$${}^m d_c^a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1' & & & \\ 2' & & & \\ 3' & 1 & -1 & 1 \\ 4' & 1 & & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Отсюда видно, что эти отклики совпадают с теми, которые были получены для свободных ветвей, что и следовало ожидать, поскольку в чисто контурной сети ветви фактически остаются независимыми, не взаимодействуют. Квадрат величины  ${}^m \mathbf{d}$  получим двумя способами – либо перемножая ковариантные и контравариантные компоненты в базисных путях, т.е. контравариантные  ${}^m d^a$  и ковариантные  ${}^m d_a$ ; либо в отдельных ветвях, т.е. контравариантные  ${}^m d_c^\alpha$  и ковариантные  ${}^m d_\alpha^c = {}^m d_\alpha^0$ :

$$|{}^m \mathbf{d}|^2 = {}^m d^a {}^m d_a = 2 \times 8 + 1 \times (-3) + 3 \times 4 + 0 \times 2 = 16 - 3 + 12 + 0 = 25, \text{ или}$$

$$|{}^m \mathbf{d}|^2 = {}^m d_c^a {}^m d_a^c = 2 \times 2 + 1 \times 1 + 4 \times 4 + 2 \times 2 = 4 + 1 + 16 + 4 = 25.$$

Можно видеть, что квадрат величины вектора, заданного в контурах, остается постоянным как в свободных ветвях, так и в ветвях, образующих чисто контурную сеть, т.е. почти не связанных. Заметим, что матрицу решения для этой чисто контурной сети можно получить так, как это делалось в разделе 3.2.2.

В процессе всех этих преобразований в двойственной сети были только разомкнутые пути. Поэтому вектор  ${}^m \mathbf{d}$ , заданный в замкнутых путях, полностью расположен в данной сети, а в двойственной сети его нет.

3. Теперь рассмотрим связанную сеть на рис. 3.3.б. В сравнении с сетью на рис. 3.4.б, здесь два контура разомкнуты, поэтому появились два разомкнутых пути. Вектор  ${}^m \mathbf{d}$  разделяется на два вектора:  ${}^m \mathbf{d}'$  в данной сети, и  ${}^m \mathbf{d}''$  в двойственной сети (поскольку в ней появляются замкнутые пути), т.е. теперь получим:

$${}^m \mathbf{d} = {}^m \mathbf{d}' + {}^m \mathbf{d}'' \quad (3.58)$$

Среди оставшихся в данной сети двух контуров выберем те, которые описаны первыми двумя строками матрицы  $C_\alpha^\alpha$  в (3.27), а в двойственной сети – те контуры, которые описаны строками  $\underline{3}'$  и  $\underline{4}'$  матрицы  $\underline{C}_\alpha^\alpha = A_\alpha^\alpha$  в (3.27). При этих условиях снова выполним те же пять этапов расчета сети, сначала для данной сети, а затем для двойственной сети. При этом матрицы  $Z = Y = \mathbf{I}$ , а прямоугольные матрицы преобразования обозначим как  ${}^m C_a^a$  и  ${}^j A_a^a$ .

3.1. Ковариантные компоненты  ${}^m d_\alpha$  вектора  ${}^m \mathbf{d}'$  в связанной сети получим из выражения  ${}^m d_a = {}^m C_a^a {}^m d_a^0$ , подставляя значения из (3.27) и (3.28):

$${}^m d_a = \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1' & & & \\ 2' & & & \\ 3' & 1 & -1 & \\ 4' & & & \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

3.2. Затем преобразованием координат получим матрицу метрического тензора соединенной сети по формуле:  ${}^m Z_{a'b'} = {}^m C_{a'}^a Z_{ab} {}^m C_{b'}^b$ , при  $Z_{ab} = I$ .

Таким образом, получим, что  ${}^m Z_{a'b'} = {}^m C_{a'}^a {}^m C_{b'}^b =$

$${}^m Z_{a'b'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3.3. Обратная метрическая матрица, представляющая метрический тензор для базисных контуров связанной сети, имеет вид:

$${}^m Y^{a'b'} = ({}^m C_{a'}^a {}^m C_{b'}^b)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 \quad (3.60)$$

3.4. Получим контравариантные компоненты  ${}^m d^{a'}$  вектора  ${}^m \mathbf{d}'$  в базисных контурах связанных ветвей по формуле  ${}^m d^{a'} = {}^m Y^{a'b'} {}^m d_{b'}$ :

$${}^m d^{a'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.61)$$

3.5. Получим решение этой сети, т.е. контравариантные компоненты  ${}^m d_c^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}'$  в отдельных ветвях сети по формуле  ${}^m d_c^a = {}^m C_{a'}^a {}^m d^{a'}$ :

$${}^m d_c^a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 \quad (3.62)$$

Эти компоненты являются решением задачи данной сети, но их значения отличаются от тех, которые получены для свободных ветвей и для чисто контурной сети. Ковариантные компоненты  ${}^m d_c^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}'$  в каждой из отдельных ветвей сети совпадают с контравариантными, т.е.  ${}^m d_c^a = {}^m d^{a'}$ , поскольку метрические параметры ветвей единичные. Тогда квадрат величины  ${}^m \mathbf{d}'$  получим, по формуле:

$$|{}^m \mathbf{d}'|^2 = {}^m d_c^a {}^m d^{a'} = (13 \times 13 + (-1) \times (-1) + 14 \times 14 + 13 \times 13) 1/25 = 107/5.$$

Такой же результат получим и для квадрата  ${}^m \mathbf{d}'$  в базисных контурах:

$$|{}^m \mathbf{d}'|^2 = {}^m d^{a'} {}^m d_{a'} = (13 \times 8 + (-1) \times (-3)) / 5 = 107/5 = 21,4. \quad (3.63)$$

Как видим, часть величины вектора действительно «исчезла». Чтобы убедиться, что эта исчезнувшая часть оказалась в *двойственной сети*, проведем ее расчет (рис. 3.3.в), используя прежние  ${}^m d_\alpha^0$  и матрицу преобразования  ${}^j A_\alpha^{\alpha'}$ . Выполним те же пять этапов расчета, что и раньше.

3.1. Ковариантные компоненты  ${}^m \underline{d}_a$  вектора  ${}^m \underline{d}$  в связанной сети получим по формуле  ${}^m \underline{d}_a = {}^m \underline{C}_a{}^a {}^m d_a^0 = {}^j A_a{}^a {}^m d_a^0$ , используя (3.27) и (3.28):

$${}^m \underline{d}_a = \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|cccc|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -1 & 1 & 1 & & \\ \hline -1 & & & & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (3.64)$$

3.2. Метрический тензор для базисных контуров связанной двойственной сети получим по формуле:  ${}^m \underline{Z}_{a'b'} = {}^m \underline{C}_a{}^a Y^{ab} {}^m \underline{C}_b{}^b$ , при  $Y^{ab} = I$ .

Таким образом,  ${}^m \underline{Z}_{a'b'} = {}^j A_a{}^a {}^j A_b{}^b$  =

$$= {}^m \underline{Z}_{a'b'} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|cc|} \hline & 3 & 4 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|cccc|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -1 & 1 & 1 & & \\ \hline -1 & & & & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|cc|} \hline & 3 & 4 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \quad (3.65)$$

3.3. Обратная метрическая матрица, представляющая метрический тензор для базисных контуров двойственной связанной сети, имеет вид:

$${}^m \underline{Y}^{a'b'} = ({}^m \underline{C}_a{}^a {}^m \underline{C}_b{}^b)^{-1} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|cc|} \hline & 3 & 4 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline -1 & 3 \\ \hline \end{array} 1/5 \quad (3.66)$$

3.4. Получим контравариантные компоненты  ${}^m \underline{d}^a$  вектора  ${}^m \underline{d}$  в базисных контурах связанных ветвей по формуле  ${}^m \underline{d}^a = {}^m \underline{Y}^{a'b'} {}^m d_b$ :

$${}^m \underline{d}^a = \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array} 1/5 = \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|cc|} \hline & 3 & 4 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline -1 & 3 \\ \hline \end{array} 1/5 \times \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad (3.67)$$

3.5. Получим решение данной задачи, т.е. контравариантные компоненты  ${}^m \underline{d}_c^a$  вектора  ${}^m \underline{d}$  в каждой из отдельных ветвей сети по формуле  ${}^m \underline{d}_c^a = {}^m \underline{C}_a{}^a {}^m \underline{d}^a = {}^j A_a{}^a {}^m \underline{d}^a$ :

$${}^m \underline{d}_c^a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|c|} \hline -3 \\ \hline 6 \\ \hline 6 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array} 1/5 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|cc|} \hline & 3 & 4 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array} 1/5 \quad (3.68)$$

Эти компоненты также не те, что для свободных ветвей и чисто контурной сети. Ковариантные  ${}^m \underline{d}_a^c$  и контравариантные  ${}^m \underline{d}_c^a$  компоненты вектора  ${}^m \underline{d}$  в каждой ветви двойственной сети совпадают, т.е.  ${}^m \underline{d}_a^c = {}^m \underline{d}_c^a$ , поскольку метрические параметры ветвей единичны. Тогда квадрат получим величины  ${}^m \underline{d}$  в двойственной сети:

$$|{}^m \underline{d}|^2 = {}^m \underline{d}_a^c {}^m \underline{d}_c^a = ((-3) \times (-3) + 6 \times 6 + 6 \times 6 + (-3) \times (-3))/25 = 18/5.$$

Аналогично, для квадрата  ${}^m \underline{d}$  в базисных контурах двойственной сети:

$$|{}^m \underline{d}|^2 = {}^m \underline{d}^a {}^m \underline{d}_a = (6 \times 3 + 0 \times (-3)) / 5 = 18/5 = 3,6. \quad (3.69)$$



Для проверки инварианта двойственных сетей, т.е. сохранения квадрата величины вектора  ${}^m\mathbf{d}$  достаточно сложить его значения в двух двойственных сетях в любой системе координат, т.е. в базисных контурах, или в отдельных ветвях, в соответствии с (2.60), тем более что эти значения совпадают:

$$|{}^m\mathbf{d}|^2 = |{}^m\mathbf{d}'|^2 + |{}^m\mathbf{d}''|^2 = 21,4 + 3,6 = 25. \quad (3.70)$$

Данный пример показывает, что *квадрат величины вектора действительно остается постоянным при изменении структуры сетей по сумме двух двойственных сетей.*

Более того, можно проверить, что и компоненты вектора  ${}^m\mathbf{d}$  остаются постоянными по каждой ветви, т.е. по каждому независимому измерению суммы двух двойственных сетей. Например, сложим по каждой ветви контравариантные отклики в свободных и в связанных ветвях, в соответствии с (3.24) –  ${}^m d_0^a = {}^m d_c^a + {}^m d_{\underline{c}}^a$ , тогда получим:

$${}^m d_0^a = \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{array} = {}^m d_c^a + {}^m d_{\underline{c}}^a = \begin{array}{c|c} 1 & 13 \\ 2 & -1 \\ 3 & 14 \\ 4 & 13 \end{array} \cdot 1/5 + \begin{array}{c|c} 1 & -3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 6 \\ 4 & -3 \end{array} \cdot 1/5 \quad (3.71)$$

Такое же равенство можно записать и для ковариантных компонент вектора в связанных ветвях, поскольку в данном случае они равны контравариантным компонентам при единичных метрических параметрах.

### Вектор разомкнутых путей ${}^j\mathbf{d}$

Теперь рассмотрим вектор в разомкнутых путях  ${}^j\mathbf{d}$  и преобразование его компонент. Метрические матрицы свободных ветвей здесь по-прежнему единичные:  $Z = Y = I$ . Вектор  ${}^j\mathbf{d}$  в разомкнутых путях свободных ветвей задан контравариантными компонентами, а не ковариантными компонентами, как для вектора, заданного в контурах –  ${}^j d_0^a$ . В данном примере эти компоненты будут иметь значения, которые заданы в (3.29). Эти компоненты в данном случае являются воздействиями и не меняются при любой структуре. Расчет откликов, двойственный по отношению к расчету компонент вектора контуров,  ${}^m\mathbf{d}$ , проведем также для сетей трех видов.

1. Для свободных ветвей по воздействиям  ${}^j d_0^a$  из формулы (3.6) найдем компоненты откликов  ${}^j d_a^0$  вектора  ${}^j\mathbf{d}$ . По ним найдем полную величину этого вектора, поскольку все разомкнутые ветви находятся в одной данной сети. Соответственно, теперь все свободные ветви в двойственной сети замкнутые, они образуют контуры. Квадрат величины вектора в данном случае равен  $|{}^j\mathbf{d}\zeta|^2 = {}^j d_0^a \times {}^j d_a^0$ , т.е. сумме произведений контравариантных и ковариантных компонент по каждому измерению базиса разомкнутых путей.

2. Для чисто узловых связанных сетей найдем такие же отклики по формуле (3.8). Полная величина вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , как и ранее  ${}^m\mathbf{d}$ , не изменится, поскольку в такой сети все пути

только разомкнутые. В двойственной сети при этом расположены только контуры, поэтому вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , заданного в разомкнутых путях, там нет.

3. В связанной сети для вектора  ${}^j\mathbf{d}$  найдем компоненты  ${}^j d_a^c$  по формуле (3.13) в данной связанной сети, и по (3.20) –  ${}^j d_a^c$  в двойственной сети. По ним получим ту часть квадрата величины вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , которая расположена в исходной части и в двойственной части каждой из связанных сетей. Это позволит проверить постоянство, как компонент, так и квадрата величины вектора  ${}^j\mathbf{d}$  в сумме двойственных сетей при изменении структуры.

Выполним последовательно расчеты указанных сетей.

1. Рассмотрим простейшие разомкнутые ветви, которые представлены на рис. 3.5.а. Каждая ветвь на этом рисунке образует разомкнутый путь. Логично выбрать пути, проходящие через соответствующие ветви, причем в направлении самих ветвей, хотя это и не обязательно. Для таких ветвей отклики – контравариантные компоненты вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , которые численно равны его заданным ковариантным компонентам.

Поскольку отклики здесь численно равны воздействиям, то имеем, что  ${}^j d_\alpha^0 = {}^j d_0^\alpha$ . Подставляя значения из (3.29), получим квадрат величины вектора  ${}^j\mathbf{d}$  в свободных ветвях – разомкнутых путях:

$${}^j\mathbf{d}\zeta^2 = {}^j d_a^0 {}^j d_0^a = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 10. \quad (3.72)$$

Таким образом, получены все параметры сети из свободных ветвей.

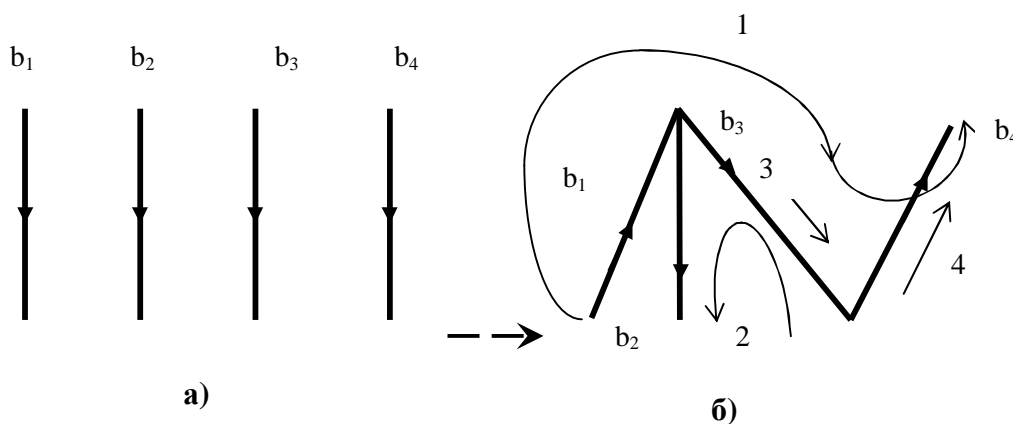


Рис. 3.5. Получение чисто узловой сети из простейшей сети  
 а) – простейшая узловая сеть из разомкнутых свободных ветвей;  
 б) – связанная сеть, содержит только разомкнутые пути

2. Сеть на рис. 3.5.б, содержит только разомкнутые пути. Тонкие линии показывают направления возможных путей. Каждая ветвь на рис. 3.5.б может иметь свой, независимый разомкнутый путь. Эта чисто узловая сеть соответствует графу типа «дерево» и была представлена на рис. 2.3.б. Выберем пути в этой сети, соответствующие матрице  $A^{a^*}_a = \underline{C}_a^{a^*}$

в (3.27), тогда компоненты  ${}^j d^c_a$  вектора получим по формуле (3.8), используя те же пять этапов раздела 3.1.4.

2.1. Контравариантные компоненты  ${}^j d^{a^*}$  вектора  ${}^j \mathbf{d}$  получим по формуле  ${}^j d^{a^*} = A^{a^*}_a {}^j d_0^a$ , подставляя значения матрицы преобразования и контравариантных компонент из соотношений (3.27) и (3.29):

$${}^j d^{a^*} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{matrix} | & 1 & & & | \\ | & 2 & & & | \\ | & 3 & & & | \\ | & 0 & & & | \end{matrix} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{matrix} | & 1 & & & | \\ | & & 1 & & | \\ | & -1 & 1 & 1 & | \\ | & -1 & & & 1 & | \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} | & 1 & & & | \\ | & 2 & & & | \\ | & 2 & & & | \\ | & 1 & & & | \end{matrix} \quad (3.73)$$

2.2. Следующим шагом получим матрицу метрического тензора связанной сети по формуле:  $Y^{a^*b^*} = A^{a^*}_a Y^{ab} A^{b^*}_{bt}$ , при этом  $Y^{ab} = I$ .

Таким образом, получим, что метрическая матрица заданной связанной сети без метрики имеет вид  $Y^{a^*b^*} = A^{a^*}_a A^{b^*}_{bt} =$

$$= \begin{matrix} 1^* & 2^* & 3^* & 4^* \\ 1^* & | & 1 & & -1 & -1 & | \\ 2^* & | & & 1 & 1 & & | \\ 3^* & | & -1 & 1 & 3 & 1 & | \\ 4^* & | & -1 & & 1 & 2 & | \end{matrix} = \begin{matrix} 1^* & 2^* & 3^* & 4^* \\ 1^* & | & 1 & & & & | \\ 2^* & | & & 1 & & & | \\ 3^* & | & -1 & 1 & 1 & & | \\ 4^* & | & -1 & & & & 1 & | \end{matrix} \times \begin{matrix} 1^* & 2^* & 3^* & 4^* \\ 1 & | & 1 & & -1 & -1 & | \\ 2 & | & & 1 & 1 & & | \\ 3 & | & & & 1 & & | \\ 4 & | & & & & & 1 & | \end{matrix} \quad (3.74)$$

2.3. Обратная метрическая матрица для базисных разомкнутых путей в связанной сети здесь не только проста, поскольку определитель равен единице, но равна  $Z_{\alpha\beta^*}$  из (3.54). Это равенство очевидно из того, что матрицы преобразования ортогональные, т.е. их произведение равно единичной матрице:

$$Y^{a^*b^*} Z_{a^*b^*} = A^{a^*}_a A^{b^*}_{bt} C_a^{a^*} C_b^{b^*}_{bt} = A^{a^*}_a C_b^{b^*}_{bt} = I.$$

$$Z_{a^*b^*} = (A^{a^*}_a A^{b^*}_{bt})^{-1} = \begin{matrix} 1^* & 2^* & 3^* & 4^* \\ 1^* & | & 3 & -1 & 1 & 1 & | \\ 2^* & | & -1 & 2 & -1 & & | \\ 3^* & | & 1 & -1 & 1 & & | \\ 4^* & | & 1 & & & & 1 & | \end{matrix} \begin{matrix} j \\ j \\ j \\ j \end{matrix} \quad (3.75)$$

Здесь индексы  $j$  сбоку матрицы показывают, что все пути – разомкнутые.

2.4. Получим ковариантные компоненты  ${}^j d_{\alpha^*}$  вектора  ${}^j \mathbf{d}$  в базисных контурах связанных ветвей по формуле  ${}^j d_{\alpha^*} = Z_{a^*b^*} {}^j d^{b^*}$ :

$${}^j d_{\alpha^*} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{matrix} | & 4 & & & | \\ | & 0 & & & | \\ | & 2 & & & | \\ | & 1 & & & | \end{matrix} = \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{matrix} | & 3 & -1 & 1 & 1 & | \\ | & -1 & 2 & -1 & & | \\ | & 1 & -1 & 1 & & | \\ | & 1 & & & & 1 & | \end{matrix} \times \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} \begin{matrix} | & 1 & & & | \\ | & 2 & & & | \\ | & 3 & & & | \\ | & 0 & & & | \end{matrix} \quad (3.76)$$

В новой системе координат-путей отклики отличаются от откликов в путях свободных ветвей, хотя в сети по-прежнему все пути разомкнуты.

2.5. Получим решение задачи сети т.е. ковариантные компоненты  ${}^j d_a^c$  вектора  ${}^j \mathbf{d}$  в каждой из отдельных ветвей сети –  ${}^j d_a^c = A_{\alpha}^{\alpha} \cdot {}^j d_{\alpha}$ :

$${}^j d_a^c = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{matrix} = \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{matrix} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \boxed{1} & & & -1 & -1 \\ & \boxed{1} & & 1 & \\ & & & & \boxed{1} \\ & & & & & \boxed{1} \end{matrix} \times \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{4} \\ \boxed{0} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{matrix} \quad (3.77)$$

Эти отклики совпадают с теми, которые были получены для свободных ветвей, поскольку в чисто узловой сети ветви фактически остаются независимы. Квадрат величины  ${}^j \mathbf{d}$  получим двумя способами – перемножая ковариантные и контравариантные компоненты в базисных путях, т.е.  ${}^j d_a \cdot {}^j d^{a'}$  либо в отдельных ветвях, т.е.  ${}^j d_a^c$  и  ${}^j d_c^a = {}^j d_0^a$ :

$$\zeta^j d_{\zeta}^2 = {}^j d_a \cdot {}^j d^{a'} = 4 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 0 = 4 + 0 + 6 + 0 = 10, \text{ или}$$

$$\zeta^j d_{\zeta}^2 = {}^j d_a^c \cdot {}^j d_c^a = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 1 + 4 + 4 + 1 = 10.$$

Отсюда видно, что квадрат величины вектора, заданного в разомкнутых путях, остается постоянным как в свободных ветвях, так и в ветвях, образующих чисто узловую сеть, т.е. почти не связанных.

Матрицу решения  $Z_{c0}$  для этой чисто узловой сети можно получить так, как это делалось в разделе 3.2.2.

3. Теперь рассмотрим связанную сеть на рис. 3.3.б. По сравнению с сетью на рис. 3.5.б, здесь два  $j$ -пути замкнуты, поэтому появились два контура. Вектор  ${}^j \mathbf{d}$  разделяется на два вектора  ${}^j \mathbf{d}'$  в данной и  ${}^j \mathbf{d}''$  в двойственной сети, где появляются два разомкнутых пути. Таким образом, в соответствии с (2.61), теперь имеем:

$${}^j \mathbf{d} = {}^j \mathbf{d}' + {}^j \mathbf{d}'' \quad (3.78)$$

Среди оставшихся в данной сети двух разомкнутых  $j$ -путей выберем те, которые описаны последними двумя строками матрицы  $A_a^{a'}$  в (3.27), а в двойственной сети – те разомкнутые пути, которые описаны строками 1' и 2' матрицы  $C_a^{a'} = \underline{A}_a^{a'}$  в (3.27). Выполним снова пять этапов расчета сначала для данной, а затем для двойственной сети, при  $Z = Y = I$ . Обозначим, как обычно, прямоугольные матрицы преобразования  ${}^j A_a^{a'}$  и  ${}^m C_a^{a'}$ .

3.1. Контравариантные компоненты  ${}^j d^{a'}$  вектора  ${}^j \mathbf{d}'$  в связанной сети получим по формуле  ${}^j d^{a'} = {}^j A_a^{a'} \cdot {}^j d_0^a$ . Для этого подставим сюда значения матрицы преобразования и компонент вектора воздействий из (3.27) и (3.29) и получим:

$${}^j d^{a'} = \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{3} \\ \boxed{0} \end{matrix} = \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{-1} & & 1 & 1 & \\ & \boxed{-1} & & & \\ & & & & \boxed{1} \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{matrix} \quad (3.79)$$

3.2. Метрический тензор для базисных координат-путей в связанной сети получим в виде матрицы:  ${}^jY^{a'b'} = {}^jA^{a'}_a Y^{ab} {}^jA^{b'}_b$  при  $Y^{ab} = I$ , таким образом,  ${}^jY^{a'b'} = {}^jA^{a'}_a {}^jA^{b'}_b$ . Эта матрица равна  ${}^mZ_{a'b'}$  в (3.65), поскольку вычисляется здесь одинаково:

$${}^jY^{a'b'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3.3. Обратная метрическая матрица для базисных разомкнутых путей в связанной сети  ${}^jZ_{a'b'} = ({}^jY^{a'b'})^{-1}$  имеет вид:

$${}^jZ_{a'b'} = ({}^jA^{a'}_a {}^jA^{b'}_b)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 \quad (3.80)$$

3.4. Получим ковариантные компоненты  ${}^j d_a$  вектора  ${}^j \mathbf{d}$  в базисных j-путях связанных ветвей по формуле  ${}^j d_a = {}^j Z_{a'b'} {}^j d^{a'}$ :

$${}^j d_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.81)$$

3.5. Получим решение сети, т.е. ковариантные компоненты  ${}^j d_\alpha^c$  вектора  ${}^j \mathbf{d}$  в каждой из отдельных ветвей по формуле  ${}^j d_\alpha^c = {}^j A^{c'}_{\alpha'} {}^j d^{a'}$ :

$${}^j d_\alpha^c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/5 \quad (3.82)$$

Это решение уже не совпадает с тем, которое было для свободных ветвей и для чисто узловой сети. Правда, в силу случайного выбора путей и воздействий, оказалось, что данное решение совпадает с откликами, полученными в (3.67) и (3.68) для совсем других заданных компонент (3.28) и сети на рис. 3.3.в. Контравариантные компоненты  ${}^j d_c^\alpha$  вектора  ${}^j \mathbf{d}$  в каждой из отдельных ветвей сети совпадают с ковариантными  ${}^j d_a^c$ , т.е.  ${}^j d_c^a = {}^j d_a^c$ , поскольку метрические параметры ветвей единичные. Тогда квадрат величины  ${}^j \mathbf{d}$  получим по формуле:

$$|{}^j \mathbf{d}|^2 = {}^j d_c^a {}^j d_a^c = ((-3) \times (-3) + 6 \times 6 + 6 \times 6 + (-3) \times (-3)) / 25 = 90/25 = 18/5.$$

Аналогично для квадрата  ${}^j \mathbf{d}$  в базисных j-путях:

$$|{}^j \mathbf{d}|^2 = {}^j d_a^c {}^j d^{a'} = (3 \times 6 + 0 \times (-3)) / 5 = 18/5 = 3,6. \quad (3.83)$$

Значение квадрата величины вектора уменьшилось по сравнению с его значением в свободных ветвях и чисто узловой сети. Часть вектора «исчезла». Чтобы убедиться, что эта

«исчезнувшая» часть оказалась в *двойственной сети*, представленной на рис. 3.3в, рассчитаем эту сеть за те же пять этапов, используя те же воздействия  $^j d_0^a$  и матрицу  ${}^m C_a^a$ .

**3.1.** Контравариантные компоненты  $^j \underline{d}^a$  вектора  ${}^j \underline{d}$  в связанной сети получим по формуле  $^j \underline{d}^a = {}^j \underline{A}^a_a {}^j d_0^a = {}^m C_a^a {}^j d_0^a$ , используя (3.27) и (3.29):

$${}^j \underline{d}^a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

**3.2.** Метрический тензор для разомкнутых базисных путей в связанной двойственной сети получим из преобразования:  ${}^j \underline{Y}^{a'b'} = {}^j \underline{A}^a_a Y^{ab} {}^j \underline{A}^{b'}_{b'}$  при  $Y^{ab} = I$ .

Таким образом,  ${}^j \underline{Y}^{a'b'} = {}^j \underline{A}^a_a {}^j \underline{A}^{b'}_{b'} = {}^m C_a^a {}^m C_b^b$

$${}^j \underline{Y}^{a'b'} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & \end{matrix} \quad (3.85)$$

**3.3.** Обратная метрическая матрица для базисных разомкнутых путей ( $j$ -путей) двойственной связанной сети, которую обозначим как  ${}^j \underline{Z}_{a'b'} = ({}^j \underline{Y}^{a'b'})^{-1}$ , имеет вид:

$${}^j \underline{Z}_{a'b'} = ({}^m C_a^a {}^m C_b^b)^{-1} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} 1/5 \quad (3.86)$$

**3.4.** Получим ковариантные компоненты  ${}^j \underline{d}_a$  вектора  ${}^j \underline{d}$  в базисных разомкнутых путях связанных ветвей по формуле  ${}^j \underline{d}_a = {}^j \underline{Z}_{a'b'} {}^j \underline{d}^a$ :

$${}^j \underline{d}_a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} 1/5 = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} 1/5 \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

**3.5.** Получим решение сети, т.е. ковариантные компоненты откликов  ${}^j \underline{d}_a^c$  вектора  ${}^j \underline{d}$  в каждой из отдельных ветвей. Для этого преобразуем компоненты откликов в базисных разомкнутых путях в компоненты откликов в отдельных ветвях с помощью преобразования, которое совпадает с аналогичным преобразованием для компонент в замкнутых путях заданной сети  ${}^j \underline{d}_a^c = {}^j \underline{A}^c_a {}^j \underline{d}_a = {}^m C_a^c {}^j \underline{d}_a$ :

$${}^j \underline{d}_a^c = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} 1/5 = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} 1/5 \quad (3.88)$$

Эти компоненты также не совпадают с теми, которые были для свободных ветвей и чисто узловой сети. Контравариантные  ${}^j \underline{d}_c^a$  и ковариантные  ${}^j \underline{d}_a^c$  компоненты вектора  ${}^j \underline{d}$  в

каждой ветви двойственной сети совпадают, т.е.  ${}^j d_c^a = {}^j d_a^c$ , поскольку метрические параметры ветвей единичны. Тогда квадрат величины  ${}^j \underline{d}$  в двойственной сети равен:

$$|{}^j \underline{d}|^2 = {}^j d_c^a {}^j d_a^c = (8 \times 8 + 4 \times 4 + 4 \times 4 + 8 \times 8)/25 = 32/5.$$

Такой же результат получим и для квадрата  ${}^j \underline{d}$  в базисных разомкнутых путях двойственной сети:

$$|{}^j \underline{d}|^2 = {}^j d_a^a {}^j d_a^a = (4 \times 8 + 0 \times 4) / 5 = 32/5 = 6,4. \quad (3.89)$$

Для проверки постоянства квадрата величины вектора  ${}^j \underline{d}$  достаточно сложить его значения в двух двойственных сетях в любой системе координат, т.е. в базисных  $j$ -путях, или, точно так же, в отдельных ветвях в соответствии с (3.78) и (2.61):

$$|{}^j \underline{d}|^2 = |{}^j \underline{d}|^2 + |{}^j \underline{d}|^2 = 3,6 + 6,4 = 10. \quad (3.90)$$

Таким образом, квадрат величины вектора  ${}^j d$  в разомкнутых путях по сумме его составляющих в двух двойственных сетях действительно остается постоянным при изменении структуры.

Проверим справедливость утверждения, что компоненты вектора  ${}^j \underline{d}$  также остаются постоянными по каждой ветви, т.е. по каждому независимому измерению пространства сети в совокупности двух двойственных сетей.

Для этого сложим по каждой ветви ковариантные компоненты-отклики в связанных ветвях (3.82) и (3.88) двух двойственных сетей и приравняем их значениям ковариантных компонент в свободных ветвях, в соответствии с (3.25),  ${}^j d_a^0 = {}^j d_a^c + {}^j d_a^c$ :

$${}^j d_a^0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{matrix} = {}^j d_a^c + {}^j d_a^c = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{-3} \\ \boxed{6} \\ \boxed{6} \\ \boxed{-3} \end{matrix} \frac{1}{5} + \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{8} \\ \boxed{4} \\ \boxed{4} \\ \boxed{8} \end{matrix} \frac{1}{5} \quad (3.91)$$

Такое же равенство можно записать и для контравариантных компонент вектора  ${}^j \underline{d}$  в отдельных связанных ветвях, поскольку они равны ковариантным компонентам при единичных метрических параметрах. Метрические матрицы связанных сетей уже были получены при вычислении матриц решения в отсутствие метрики в разделе 3.2.1.

Итак, рассмотренные примеры преобразования компонент векторов замкнутых и разомкнутых путей при связывании свободных ветвей в сеть в отсутствие метрики (при единичных метрических матрицах) иллюстрируют и подтверждают все ранее полученные формулы.

### 3.2.4. Компоненты вектора в сети при наличии метрики

Теперь рассмотрим расчеты сетей, когда имеется взаимодействие между ветвями, характеризуемое метрической матрицей, которая становится не только не единичной, но может даже для свободных ветвей быть не диагональной. Именно такому случаю

соответствуют матрицы  $Z$  и  $Y$ , представленные в (3.26). Снова проведем расчеты примеров для тех же матриц преобразования и заданных компонент векторов  ${}^m\mathbf{d}$  и  ${}^j\mathbf{d}$ , с помощью пяти этапов расчета раздела 3.1.4. Основные действия уже выполнены в предыдущих разделах: метрические матрицы связанных сетей – при вычислении матриц решения в разделе 3.2.3; преобразование заданных компонент вектора при связывании ветвей – в разделе 3.2.4.

### Вектор замкнутых путей ${}^m\mathbf{d}$

Проведем снова все вычисления, но будем использовать результаты, полученные в предыдущем разделе. Сначала для вектора  ${}^m\mathbf{d}$ , заданного компонентами  ${}^m d_a^0$  в (3.28), выполним расчеты простейшей сети, чисто контурной сети, и двух связанных сетей – заданной и двойственной. Затем такие же расчеты сделаем для вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , заданного компонентами  ${}^j d_a^0$  в (3.29).

1. Для свободных ветвей контравариантные компоненты  ${}^m d_0^a$  по заданным ковариантным компонентам  ${}^m d_a^0$  получим по формуле (3.5), подставляя значения из (3.26) и (3.28) –  ${}^m d_0^a = (Z_{ab})^{-1} {}^m d_a^0 = Y^{ab} {}^m d_a^0 =$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -6 \\ \hline 1 \\ \hline 18 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \frac{1}{3} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & -6 & \\ \hline & 2 & & \\ \hline -6 & & 12 & \\ \hline & & & 3 \\ \hline \end{array} \frac{1}{6} \times \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (3.92)$$

Отсюда получим квадрат величины вектора  ${}^m\mathbf{d}$  для данного случая:

$$|{}^m\mathbf{d}|^2 = {}^m d_0^a {}^m d_a^0 = ((-6) \times 2 + 1 \times 1 + 18 \times 4 + 3 \times 2) / 3 = 67/3. \quad (3.93)$$

Можно видеть, что в результате введения неединичной матрицы метрического тензора величина вектора теперь стала другой, хотя заданные ковариантные компоненты вектора остались прежние.

2. Для чисто контурной сети отклики получим по формуле (3.7), с помощью прежних пяти этапов, из которых первый уже получен в (3.53). Однако теперь метрическая матрица  $Z_{a'b'}$  связанной сети стала сложнее, поскольку прежние  $C_a^a$  надо умножить еще на метрическую матрицу свободных ветвей  $Z_{ab}$ , заданную в (3.26). Эта матрица здесь недиагональная и вычисляется по формуле:  $Z_{a'b'} = C_a^a Z_{ab} C_a^a$ .

Для этого сначала перемножим  $Z_{ab} C_a^a$ :

$$= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & -1 & 1 & \\ \hline & 3 & & \\ \hline 2 & -1 & 1 & \\ \hline 2 & & & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & 1 & \\ \hline & 3 & & \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline & & & 2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline 1 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

а затем, умножая  $C_a^a$  на полученное промежуточное произведение, получим саму матрицу  $Z_{a'b'} = C_a^a (Z_{ab} C_a^a) =$



$$= \begin{matrix} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1' & \begin{matrix} 7 & -2 & 2 & 2 \end{matrix} \\ 2' & \begin{matrix} -2 & 4 & -1 & \end{matrix} \\ 3' & \begin{matrix} 2 & -1 & 1 & \end{matrix} \\ 4' & \begin{matrix} 2 & & & 2 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & \begin{matrix} 1 & & 1 & 1 \end{matrix} \\ 2' & \begin{matrix} & 1 & -1 & \end{matrix} \\ 3' & \begin{matrix} & & 1 & \end{matrix} \\ 4' & \begin{matrix} & & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1 & \begin{matrix} 3 & -1 & 1 & \end{matrix} \\ 2 & \begin{matrix} & 3 & & \end{matrix} \\ 3 & \begin{matrix} 2 & -1 & 1 & \end{matrix} \\ 4 & \begin{matrix} 2 & & & 2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.94)$$

2.3. Обратная метрическая матрица, представляющая метрический тензор для базисных контуров связанной сети, имеет вид:

$$Y^{a'b'} = (C_a^a Z_{ab} C_a^a)^{-1} = \begin{matrix} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1' & \begin{matrix} 6 & & -12 & -6 \end{matrix} \\ 2' & \begin{matrix} & 2 & 2 & \end{matrix} \\ 3' & \begin{matrix} -12 & 2 & 32 & 12 \end{matrix} \\ 4' & \begin{matrix} -6 & & 12 & 9 \end{matrix} \end{matrix} \frac{1}{6} \quad (3.95)$$

где все базисные пути – контуры.

2.4. Контравариантные компоненты  ${}^m d^a$  вектора, заданного в замкнутых путях (т.е. для замкнутой сети)  ${}^m \mathbf{d}$  в базисных контурах связанных ветвей получим из  ${}^m d^a = Y^{a'b'} {}^m d_{b'}$ , где  ${}^m d_{b'}$  берем из (3.53):

$$(3.96) \quad {}^m d^a = \begin{matrix} 1' & \begin{matrix} -6 \\ 1 \\ 25 \\ 9 \end{matrix} \\ 2' & \begin{matrix} 1 \\ 25 \\ 9 \end{matrix} \\ 3' & \begin{matrix} 1 \\ 25 \\ 9 \end{matrix} \\ 4' & \begin{matrix} 1 \\ 25 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix} \frac{1}{3} = \begin{matrix} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1' & \begin{matrix} 6 & & -12 & -6 \end{matrix} \\ 2' & \begin{matrix} & 2 & 2 & \end{matrix} \\ 3' & \begin{matrix} -12 & 2 & 32 & 12 \end{matrix} \\ 4' & \begin{matrix} -6 & & 12 & 9 \end{matrix} \end{matrix} \frac{1}{6} \times \begin{matrix} 1' & \begin{matrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \\ 2' & \begin{matrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \\ 3' & \begin{matrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \\ 4' & \begin{matrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Отклики в новых координатах – путях отличаются от откликов в свободных ветвях, хотя сеть по-прежнему состоит из одних контуров.

2.5. Получим решение данной задачи, т.е. контравариантные компоненты  ${}^m d_c^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в каждой из отдельных ветвей сети по формуле  ${}^m d_c^a = C_a^a {}^m d^a$ :

$${}^m d_c^a = \begin{matrix} 1 & \begin{matrix} -6 \\ 1 \\ 18 \\ 3 \end{matrix} \\ 2 & \begin{matrix} -6 \\ 1 \\ 18 \\ 3 \end{matrix} \\ 3 & \begin{matrix} -6 \\ 1 \\ 18 \\ 3 \end{matrix} \\ 4 & \begin{matrix} -6 \\ 1 \\ 18 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \frac{1}{3} = \begin{matrix} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1' & \begin{matrix} 1 & & & \end{matrix} \\ 2' & \begin{matrix} & 1 & & \end{matrix} \\ 3' & \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & \end{matrix} \\ 4' & \begin{matrix} 1 & & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} 1' & \begin{matrix} -6 \\ 1 \\ 25 \\ 9 \end{matrix} \\ 2' & \begin{matrix} -6 \\ 1 \\ 25 \\ 9 \end{matrix} \\ 3' & \begin{matrix} -6 \\ 1 \\ 25 \\ 9 \end{matrix} \\ 4' & \begin{matrix} -6 \\ 1 \\ 25 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix} \frac{1}{3} \quad (3.97)$$

Эти отклики совпадают с теми, которые были получены для свободных ветвей в (3.92), что и следовало ожидать, поскольку в чисто контурной сети ветви не связываются новым структурным взаимодействием. Квадрат величины  ${}^m \mathbf{d}$  получим двумя способами. Сначала перемножим в базисных путях ковариантные компоненты из (3.96) и контравариантные компоненты из (3.53):

$$(3.98) \quad |{}^m \mathbf{d}|^2 = {}^m d^a {}^m d_a = ((-6) \times 8 + 1 \times (-3) + 25 \times 4 + 9 \times 2)/3 = 67/3,$$

затем в отдельных ветвях, т.е.  ${}^m d_c^a$  из (3.97) и  ${}^m d_a^0 = {}^m d_a^c = Z_{ab} {}^m d_c^b$ , что в точности аналогично (3.93) и, конечно, получаем такое же значение:

$$|{}^m \mathbf{d}|^2 = {}^m d_c^a {}^m d_a^c = 67/3.$$

Здесь уже нельзя считать, что ковариантные и контравариантные компоненты равны. Вместе с тем, как и прежде, квадрат величины вектора есть величина постоянная, как в свободных ветвях, так и в чисто контурной сети.

3. Рассмотрим сеть на рис. 3.3.б, в которой по сравнению с рис. 3.4.б, появились два разомкнутых пути. Вектор  ${}^m\mathbf{d}$  разделяется на вектор  ${}^m\mathbf{d}'$  в данной и  ${}^m\mathbf{d}''$  в двойственной сети, в соответствии с (3.58).

Выберем ту же матрицу  ${}^mC_a^a$ , что и раньше, т.е. первые две строки матрицы  $C_a^a$  в соотношении (3.27), а в двойственной сети этому соответствуют последние две строки матрицы  ${}^mC_a^a = {}^jA_a^a$  в (3.27). Выполним снова пять этапов расчета, сначала для данной, а затем для двойственной сети.

3.1. Ковариантные компоненты  ${}^m d_a'$  вектора  ${}^m\mathbf{d}'$  в связанной сети уже получили соотношении в (3.59).

3.2. Метрический тензор в координатах контуров связанной сети уже был получен в соотношении (3.41):

$${}^mZ_{a'b'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.99)$$

3.3. Обратная метрическая матрица базисных контуров связанной сети  ${}^mY^{a'b'} = ({}^mZ_{a'b'})^{-1}$  для данных значений также уже получена в (3.42).

3.4. Контравариантные компоненты  ${}^m d^{a'}$  вектора  ${}^m\mathbf{d}'$  в базисных контурах связанных ветвей получим отсюда по формуле  ${}^m d^{a'} = {}^mY^{a'b'} {}^m d_{b'}$ :

$${}^m d^{a'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 26 & 1 \\ -5 & 24 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/24 \quad \times \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.100)$$

3.5. Получим решение задачи – контравариантные компоненты вектора  ${}^m\mathbf{d}'$  в каждой ветви данной сети по формуле  ${}^m d_c^a = {}^mC_{a't}^a {}^m d^{t'}$ :

$${}^m d_c^a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 26 \\ -5 \\ 31 \\ 26 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/24 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 26 \\ -5 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/24 \quad (3.101)$$

Эти компоненты отличаются от компонент, которые были получены для свободных ветвей и для чисто контурной сети. Ковариантные компоненты  ${}^m d_a^c$  вектора  ${}^m\mathbf{d}'$  в каждой из отдельных ветвей сети теперь *не совпадают* с контравариантными, т.е.  ${}^m d_a^c \neq {}^m d_c^a$ , поскольку  $Z \neq I$ . Поэтому сначала получим эти компоненты по формуле  ${}^m d_a^c = Z_{ab} {}^m d_c^a$ , с матрицей  $Z_{ab}$  свободных ветвей.

$${}^m d^c_a = \begin{matrix} 1 & \boxed{83} \\ 2 & \boxed{-15} \\ 3 & \boxed{57} \\ 4 & \boxed{52} \end{matrix} \cdot 1/24 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \boxed{2} & & \boxed{1} & \\ 2 & & \boxed{3} & & \\ 3 & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\ 4 & & & & \boxed{2} \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & \boxed{26} \\ 2 & \boxed{-5} \\ 3 & \boxed{31} \\ 4 & \boxed{26} \end{matrix} \cdot 1/24 \quad (3.102)$$

Тогда квадрат величины  ${}^m \underline{d}$  получим, как обычно, по формуле:

$$|{}^m \underline{d}|^2 = {}^m d^c_a {}^m d_c^a = (83 \times 26 + (-15) \times (-5) + 57 \times 31 + 52 \times 26)/24^2 = 223/24.$$

Такой же результат получим и для квадрата  ${}^m \underline{d}$  в базисных контурах:

$$(3.103) \quad |{}^m \underline{d}|^2 = {}^m d^a {}^m d_a = (26 \times 8 + (-5) \times (-3))/24 = 223/24.$$

Квадрат величины вектора сократился здесь на величину

$$|{}^m \underline{d}|^2 - |{}^m \underline{d}|^2 = 67/3 - 223/24 = 313/24$$

и эта исчезающая часть должна оказаться в *двойственной сети*.

**Расчет двойственной сети** на рис. 3.3.в. Проведем этот расчет при тех же заданных компонентах,  ${}^m d^0_a$ , и матрице  ${}^j A_a^a$ . Как обычно, возникает два дополнительных этапа, рассмотренных в разделе 3.1.4 – в соответствии с соотношением (3.20), где к матрице решений добавляются «обкладки» в виде матрицы  $Y$ . Эти дополнительные действия сначала преобразуют заданные компоненты в данной сети в исходные компоненты в двойственной сети, а затем, после получения решения, в обратном направлении. *Именно в этом состоит отличительная особенность расчетов компонент вектора в сети при наличии метрики.*

3.0. Ковариантные компоненты  ${}^m \underline{d}^0_a$  вектора  ${}^m \underline{d}$  в свободных ветвях двойственной сети получим по формуле  ${}^m \underline{d}^0_a = Y^{ab} {}^m d^0_b =$

$${}^m \underline{d}^0_a = \begin{matrix} 1 & \boxed{-6} \\ 2 & \boxed{1} \\ 3 & \boxed{18} \\ 4 & \boxed{3} \end{matrix} \cdot 1/3 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \boxed{6} & & \boxed{-6} & \\ 2 & & \boxed{2} & & \\ 3 & \boxed{-6} & & \boxed{12} & \\ 4 & & & & \boxed{3} \end{matrix} \cdot 1/6 \times \begin{matrix} 1 & \boxed{2} \\ 2 & \boxed{1} \\ 3 & \boxed{4} \\ 4 & \boxed{2} \end{matrix} \quad (3.104)$$

3.1. Ковариантные компоненты  ${}^m \underline{d}_a$  «внутреннего» вектора  ${}^m \underline{d}$  в связанной сети найдем из  ${}^m \underline{d}_a = {}^m C_a^a {}^m \underline{d}^0_a = {}^j A_a^a Y {}^m d^0_a$ , используя (3.27) и (3.104):

$${}^m \underline{d}_a = \begin{matrix} 3 & \boxed{25} \\ 4 & \boxed{9} \end{matrix} \cdot 1/3 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \\ 4 & \boxed{-1} & & & \boxed{1} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & \boxed{-6} \\ 2 & \boxed{1} \\ 3 & \boxed{18} \\ 4 & \boxed{3} \end{matrix} \cdot 1/3 \quad (3.105)$$

3.2. Метрический тензор связанной двойственной сети уже был получен в соотношении (3.46) при вычислении матрицы решения  $Z_c = Y_c$ :

$${}^m Z_{a'b} = \begin{matrix} 3 & 4 \\ 3 & \boxed{32} & \boxed{12} \\ 4 & \boxed{12} & \boxed{9} \end{matrix} \cdot 1/6 = {}^j Y^{a'b} \quad (3.106)$$

3.3. Обратная метрическая матрица базисных контуров связанной двойственной сети  ${}^m\underline{Y}^{a'b'} = ({}^m\underline{Z}_{a'b'})^{-1}$  уже была вычислена в (3.47).

3.4. Контравариантные компоненты  ${}^m\underline{d}^{a'}$  вектора  ${}^m\underline{d}$  в базисных контурах связанных ветвей двойственной сети –  ${}^m\underline{d}^{a'} = {}^m\underline{Y}^{a'b'} {}^m\underline{d}_b$ :

$${}^m\underline{d}^{a'} = \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} 39 \\ -4 \end{bmatrix} 1/24 = \begin{matrix} 3' & 4' \\ 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 32 \end{bmatrix} 1/24 \times \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 9 \end{bmatrix} 1/3 \quad (3.107)$$

3.5. Получим решение данной задачи, т.е. контравариантные компоненты  ${}^m\underline{d}_c^a$  вектора  ${}^m\underline{d}$  в каждой из отдельных ветвей сети по формуле  ${}^m\underline{d}_c^a = {}^m\underline{C}_{a't} {}^m\underline{d}_t^a = {}^j\underline{A}_{a't} {}^m\underline{d}_t^a$ :

$${}^m\underline{d}_c^a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -35 \\ 39 \\ 39 \\ -4 \end{bmatrix} 1/24 = \begin{matrix} 1' & 2' \\ 3' & 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \begin{bmatrix} 39 \\ -4 \end{bmatrix} 1/24 \quad (3.108)$$

3.6. Эти компоненты отличаются от тех, которые были для свободных ветвей и чисто контурной сети. Ковариантные компоненты  ${}^m\underline{d}_a^c$  и контравариантные  ${}^m\underline{d}_c^a$  компоненты вектора  ${}^m\underline{d}$  в каждой ветви двойственной сети различны, т.е.  ${}^m\underline{d}_a^c \neq {}^m\underline{d}_c^a$ , поскольку  $Y \neq I$ . Поэтому сначала получим  ${}^m\underline{d}_a^c = Y^{ab} {}^m\underline{d}_c^a$ , где надо учесть двойственный характер компонент вектора и метрической матрицы в данном случае:

$${}^m\underline{d}_a^c = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -74 \\ 13 \\ 113 \\ -2 \end{bmatrix} 1/24 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 & & -6 & \\ & 2 & & \\ -6 & & 12 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} 1/6 \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -35 \\ 39 \\ 39 \\ -4 \end{bmatrix} 1/24 \quad (3.109)$$

Тогда квадрат величины  ${}^m\underline{d}$  в двойственной сети получим в виде:

$$|{}^m\underline{d}|^2 = {}^m\underline{d}_a^c {}^m\underline{d}_c^a = ((-74) \times (-35) + 13 \times 39 + 113 \times 39 + (-2) \times (-4))/24^2 = 313/24.$$

Такой же результат получим и для квадрата  ${}^m\underline{d}$  в базисных контурах двойственной сети:

$$|{}^m\underline{d}|^2 = {}^m\underline{d}^{a'} {}^m\underline{d}_{a'} = (39 \times 25 + (-4) \times 9)/72 = 313/24, \quad (3.110)$$

т.е. это именно та величина, которую ожидалось получить.

Для проверки сохранения квадрата величины вектора  ${}^m\underline{d}$  при изменении структуры еще раз сложим его значения в двух двойственных сетях в базисных контурах, или в отдельных ветвях, в соответствии с (2.60) и (3.70):

$$|{}^m\underline{d}|^2 = |{}^m\underline{d}'|^2 + |{}^m\underline{d}''|^2 = (223 + 313)/24 = 67/3. \quad (3.111)$$

Отсюда видим, что квадрат величины вектора не меняется при изменении структуры двух двойственных сетей и при наличии метрики.

Убедимся также, что и компоненты вектора  ${}^m\underline{d}$  остаются постоянными по каждой ветви, т.е. по каждому независимому измерению совокупности двух двойственных сетей.

Например, сложив по каждой ветви контравариантные компоненты в свободных (3.92) и в связанных ветвях (3.101) и (3.109), в соответствии с (3.24) –  ${}^m d_0^a = {}^m d_c^a + {}^m \underline{d}_a^c$ :

$${}^m d_0^a = \begin{array}{c|c} 1 & -6 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 18 \\ \hline 4 & 3 \end{array} 1/3 = {}^m d_c^a + {}^m \underline{d}_a^c = \begin{array}{c|c} 1 & 26 \\ \hline 2 & -5 \\ \hline 3 & 31 \\ \hline 4 & 26 \end{array} 1/24 + \begin{array}{c|c} 1 & -74 \\ \hline 2 & 13 \\ \hline 3 & 113 \\ \hline 4 & -2 \end{array} 1/24 \quad (3.112)$$

Итак, это равенство выполняется, причем в двойственной сети ковариантные и контравариантные компоненты вектора меняются местами – контравариантным компонентам в данной сети соответствуют ковариантные компоненты в двойственной сети.

Такое же равенство можно записать и для ковариантных компонент вектора в свободных ветвях (3.28) – заданные компоненты  ${}^m d_a^0$ , и связанных ветвях – данной сети (3.102)  ${}^m d_a^c$  и двойственной сети (3.108)  ${}^m \underline{d}_c^a$ , в соответствии с (3.24) –  ${}^m d_a^0 = {}^m d_a^c + {}^m \underline{d}_c^a$ :

$${}^m d_a^0 = \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 4 & 2 \end{array} = {}^m d_a^c + {}^m \underline{d}_c^a = \begin{array}{c|c} 1 & 83 \\ \hline 2 & -15 \\ \hline 3 & 57 \\ \hline 4 & 52 \end{array} 1/24 + \begin{array}{c|c} 1 & -35 \\ \hline 2 & 39 \\ \hline 3 & 39 \\ \hline 4 & -4 \end{array} 1/24 \quad (3.113)$$

При этом ковариантным компонентам в данной сети также соответствуют контравариантные компоненты в двойственной сети.

Таким образом, при наличии метрики, т.е. когда матрица метрического тензора не единичная, и даже не диагональная, закономерности постоянства суммы компонент вектора и постоянства квадрата величины наложенного вектора в контурах (далее покажем, что и в разомкнутых путях тоже) выполняются, но становятся сложнее. При отсутствии метрики двойственные сети казались просто симметричными. Когда метрическая матрица была единичная, то ковариантные компоненты и контравариантные компоненты вектора в сети совпадали, как в декартовых системах координат обычной геометрии.

При наличии метрики двойственные сети показывают, что они обладают свойством не просто симметрии, а взаимного дополнения до некоторого единого целого. По своей сути и реакции на заданный вектор (или поток энергии) двойственные сети и составляют единое целое. Преобразование ковариантных компонент в контравариантные, и, наоборот, при переходе от связанной заданной сети к двойственной, является следствием закономерности постоянства квадрата величины вектора, заданного в сети. Это вызвано возникновением метрической матрицы в одном из двух слагаемых, относящихся к двойственным сетям, в соотношениях (2.62–2.75) главы 2. Таким образом, при наличии метрики, т.е. неединичных метрических матриц, ковариантные компоненты и контравариантные компоненты вектора меняют геометрический (а также, возможно, и физический) смысл при переходе от одной сети к другой, двойственной к ней.

### Вектор разомкнутых путей ${}^j\mathbf{d}$

Теперь рассмотрим вектор в разомкнутых путях  ${}^j\mathbf{d}$  и преобразование его компонент. Метрические матрицы здесь уже не единичные:  $Z^{-1}Y$ . Вектор  ${}^j\mathbf{d}$  в свободных разомкнутых путях задан компонентами  ${}^j d_0^a$  в соотношении (3.29). Прделаем прежние три вида расчетов сетей – простейшей сети, чисто узловой сети и двух связанных сетей (заданной сети и двойственной сети).

Для свободных ветвей по формуле 3.6 из раздела 3.1.4 найдем двойственные компоненты откликов  ${}^j d_a^0$  вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , подставляя значения из (3.26) и (3.29), получим

$${}^j d_a^0 = (Y^{ab})^{-1} {}^j d_0^b = Z_{ab} {}^j d_0^b.$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & 1 & \\ \hline & 3 & & \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline & & & 2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (3.114)$$

Отсюда получим квадрат величины  ${}^j\mathbf{d}$  для данного случая:

$$\zeta^j \mathbf{d} \zeta^2 = {}^j d_a^0 {}^j d_0^a = (4 \times 1 + 6 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 1) = 24. \quad (3.115)$$

Можно видеть, что за счет введения метрики величина вектора  ${}^j\mathbf{d}$  изменилась по сравнению с (3.72), хотя заданные компоненты прежние.

2. Расчет чисто узловой сети отклики выполним по формуле (3.8).

2.1. Компоненты  ${}^j d^a$  уже получены в (3.73).

2.2. Матрица метрического тензора (весов ветвей) теперь вычисляется в два приема:

$Y^{a'b'} = A^{a'}_a Y^{ab} A^{a'}_{a'}$ . Сначала вычислим, используя (3.26) и (3.27),  $Y^{ab} A^{a'}_{a'}$  =

$$= \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & -12 & -6 \\ \hline & 2 & 2 & \\ \hline -6 & & 18 & 6 \\ \hline & & & 3 \\ \hline \end{array} \cdot 1/6 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & -6 & \\ \hline & 2 & & \\ \hline -6 & & 12 & \\ \hline & & & 3 \\ \hline \end{array} \cdot 1/6 \times \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Затем получим саму метрическую матрицу разомкнутых путей для чисто узловой сети

$Y^{a'b'} = A^{a'}_a (Y^{ab} A^{a'}_{a'}) =$

$$\begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & -12 & -6 \\ \hline & 2 & 2 & \\ \hline -12 & 2 & 32 & 12 \\ \hline -6 & & 12 & 9 \\ \hline \end{array} \cdot 1/6 = \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline -1 & 1 & 1 & \\ \hline -1 & & & 1 \\ \hline \end{array} \times 2 \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & -12 & -6 \\ \hline & 2 & 2 & \\ \hline -6 & & 18 & 6 \\ \hline & & & 3 \\ \hline \end{array} \cdot 1/6 \quad (3.116)$$

2.3. Обратная метрическая матрица для базисных разомкнутых путей уже была вычислена в (3.94) как  $Z_{a'b'}$ .

Заметим, что в общем случае, когда базисы замкнутых путей и разомкнутых путей имеют разную размерность, матрицы преобразования прямоугольные, причем разного

порядка, тогда метрические матрицы могут иметь совершенно разный порядок. Например, матрица  $Z_{a'b}$  может иметь порядок (3 x 3), а матрица  $Y^{a'b}$  – порядок (25 x 25).

Вместе с тем для *квадратных* матриц преобразования и метрических матриц справедливо, как нетрудно видеть, соотношение:  $Z_{a'b} \cdot Y^{a'b} = C_a^{a'} Z_{ab} C_b^{b'} A^{a'} Y^{ab} A^{b'} = I$ , поэтому здесь сразу можно выполнять четвертый этап, зная, что  $(Y^{a'b})^{-1} = Z_{a'b}$ .

2.4. Ковариантные компоненты  ${}^j d_a$  вектора  ${}^j \mathbf{d}$  в базисных  $j$ -путях связанных ветвей получим из  ${}^j d_a = (Y^{a'b})^{-1} j d^a = Z_{a'b} j d^b$ , где  ${}^j d^b$  – из (3.73).

$${}^j d_a = \begin{array}{c|c} 1' & 9 \\ 2' & 3 \\ 3' & 3 \\ 4' & 2 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1' & 7 & -2 & 2 & 2 \\ 2' & -2 & 4 & -1 & \\ 3' & 2 & -1 & 1 & \\ 4' & 2 & & & 2 \end{array} \times \begin{array}{c|c} 1' & 1 \\ 2' & 2 \\ 3' & 3 \\ 4' & \end{array} \quad (3.117)$$

Эти компоненты в новой системе координат отличаются от свободных ветвей, хотя в этой сети на рис. 3.5.б по-прежнему все пути разомкнутые.

2.5. Решение данной задачи – ковариантные компоненты  ${}^j d_a^c$  в отдельных ветвях – получим по формуле  ${}^j d_a^c = A^{a'} {}^j d_a =$

$${}^j d_a^c = \begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1 & 1 & & -1 & -1 \\ 2 & & 1 & 1 & \\ 3 & & & 1 & \\ 4 & & & & 1 \end{array} \times \begin{array}{c|c} 1' & 9 \\ 2' & 3 \\ 3' & 3 \\ 4' & 2 \end{array} \quad (3.118)$$

Ясно, что *эти отклики совпадают с откликами, полученными для свободных ветвей в (3.114)*. Этого и следовало ожидать, поскольку в *чисто узловой* сети между прежде свободными ветвями нет нового взаимодействия. Квадрат величины  ${}^j \mathbf{d}$  получим двумя способами. Сначала перемножим ковариантные и контравариантные компоненты в базисных путях,  ${}^j d^a$  из (3.73) и  ${}^j d_a$  из соотношения (3.117):

$$|{}^j \mathbf{d}|^2 = {}^j d^a {}^j d_a = 1 \times 9 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 0 \times 2 = 24, \quad (3.119)$$

затем в отдельных ветвях, т.е.  ${}^j d_a^c$  из (3.118) и  ${}^j d_0^a = {}^j d_c^a$  из (3.114), что в точности аналогично (3.115) и дает такое же значение для квадрата величины вектора:

$$|{}^j \mathbf{d}|^2 = {}^j d_c^a {}^j d_a^c = 24.$$

Здесь уже контравариантные компоненты  ${}^j d_c^\alpha$  и ковариантные компоненты  ${}^j d_\alpha^c$  не равны друг другу. Как и прежде, квадрат величины вектора,  $|{}^j \mathbf{d}|^2$  не меняется при переходе от свободных ветвей к чисто узловой сети.

3. Рассмотрим сеть на рис. 3.3.б, где, по сравнению с рис. 3.5.б, два разомкнутых пути стали контурами. Вектор  ${}^j \mathbf{d}$  разделяется на два вектора: в данной сети,  ${}^j \mathbf{d}$ , и в двойственной сети  ${}^j \mathbf{d}'$ , как в (3.78).

Проведем расчет каждой из этих сетей. Для вектора  $\mathbf{j}\mathbf{d}$  найдем компоненты  ${}^j d_a^c$  по формуле (3.13) в данной связанной сети, а для вектора  $\mathbf{j}\mathbf{d} - \mathbf{j}\mathbf{d}_a^c$  по (3.20) в двойственной сети. По ним получим части квадрата величины вектора  $\mathbf{j}\mathbf{d}$  в каждой из них; проверим постоянство компонент и квадрата величины  $\mathbf{j}\mathbf{d}$  в сумме двойственных сетей при изменении структуры.

3.1. Контравариантные компоненты  ${}^j d^a$  вектора  $\mathbf{j}\mathbf{d}$  в связанной сети уже получены по формуле  ${}^j d^a = {}^j A^a_a {}^j d_0^a$  в (3.79).

3.2. Метрический тензор для разомкнутых путей в связанной сети  ${}^j Y^{a'b'}$  уже был ранее получен в (3.46) по формуле:  ${}^j Y^{a'b'} = {}^j A^a_a Y^{ab} j A_b^{b'}$ :

$${}^j Y^{a'b'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 32 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/6 \quad (3.120)$$

3.3. Обратная матрица  ${}^j Z_{a'b'}$  для базисных разомкнутых путей в связанной сети уже получена в (3.47) как  ${}^j Z_{a'b'} = ({}^j Y^{a'b'})^{-1}$ .

3.4. Получим ковариантные компоненты  ${}^j d_a$  вектора  $\mathbf{j}\mathbf{d}$  в базисных  $j$ -путях связанных ветвей по формуле:  ${}^j d_a = {}^j Z_{a'b'} {}^j d^{b'}$ , используя (3.79) и (3.47):

$${}^j d_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 32 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 32 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/24 \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.121)$$

3.5. Получим решение – ковариантные компоненты  ${}^j d_a^c$  вектора  $\mathbf{j}\mathbf{d}$  в каждой ветви сети по формуле  ${}^j d_a^c = {}^j A^c_a {}^j d_a$ :

$${}^j d_a^c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & \\ & 9 \\ 9 & \\ -12 & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' & 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/8 \quad (3.122)$$

Это решение не совпадает с решением для свободных ветвей и чисто узловой сети. Оно также не совпадает с откликами, полученными для вектора  ${}^m d$ , как это было в (3.82) в разделе 3.2.3. Контравариантные компоненты  ${}^j d_c^a$  вектора  $\mathbf{j}\mathbf{d}$  в каждой из отдельных ветвей сети теперь *не совпадают* с ковариантными  ${}^j d_a^c$ , т.е.  ${}^j d_c^a \neq {}^j d_a^c$ , поскольку метрические параметры ветвей не единичные. Поэтому сначала получим контравариантные компоненты в отдельных ветвях  ${}^j d_c^a$  по формуле  ${}^j d_c^a = Y^{ab} {}^j d_b^c$ , где матрица  $Y^{ab}$  свободных ветвей метрическими коэффициентами связывает ковариантные и контравариантные компоненты в отдельных ветвях.



$$j_{d_c}^a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} -6 \\ 3 \\ 15 \\ -6 \end{matrix} \cdot \frac{1}{8} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & & -6 \\ 2 & & 2 & \\ 3 & -6 & & 12 \\ 4 & & & 3 \end{matrix} \cdot \frac{1}{6} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 9 \\ 9 \\ -12 \end{matrix} \cdot \frac{1}{8} \quad (3.123)$$

Тогда квадрат величины вектора  $\underline{j}^d$  получим по формуле:

$$|\underline{j}^d|^2 = j_{d_c}^c j_{d_c}^a = (3 \times (-6) + 9 \times 3 + 9 \times 15 + (-12) \times (-6)) / 64 = 27/8.$$

Аналогично значение квадрата величины вектора  $\underline{j}^d$  в базисных  $\underline{j}$ -путях соединенной сети, получим, используя (3.121):

$$|\underline{j}^d|^2 = j_{d_a}^j j_{d_a}^a = (9 \times 3 + (-12) \times 0) / 8 = 27/8. \quad (3.124)$$

Квадрат величины вектора уменьшился. Чтобы убедиться, что эта «исчезнувшая» часть оказалась в *двойственной сети* на рис. 3.3в, проведем ее расчет. Будем использовать те же заданные контравариантные компоненты  $j_{d_0}^a$ , матрицу преобразования  ${}^m C_{a^a} = \underline{j}^A_a$  и те же пять этапов вычислений, которые придется теперь дополнить.

**Расчет двойственной сети при наличии метрики.** К пяти этапам теперь добавляются еще два в соответствии с формулой (3.21) в разделе 3.1.4, где к матрице решений добавляются «обкладки» в виде матрицы Z, что сначала преобразует исходные компоненты в данной сети в исходные компоненты в двойственной сети, а затем, после получения решения, наоборот. Это позволяет получить соизмеримые компоненты в ветвях данной и двойственной сети. В этом дополнительном преобразовании и состоит особенность расчета компонент вектора в сети при наличии метрики.

3.0. Контравариантные компоненты  $j_{d_0}^a$  вектора  $\underline{j}^d$  в свободной двойственной сети получим по формуле  $j_{d_0}^a = Z_{ab} j_{d_0}^b =$

$$j_{d_0}^a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & & 1 \\ 2 & & 3 & \\ 3 & 1 & & 1 \\ 4 & & & 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \quad (3.125)$$

3.1. Контравариантные компоненты  $j_{d^{\alpha}}$  вектора  $\underline{j}^d$  в связанной сети получим по формуле  $j_{d^{\alpha}}^a = \underline{j}^A_a j_{d_0}^a = {}^m C_{a^a} j_{d_0}^a$ , используя (3.27) и (3.125):

$$j_{d^{\alpha}}^a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 9 \\ 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & & 1 \\ 2 & & 1 & -1 \\ 3 & & & 1 \\ 4 & & & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \quad (3.126)$$

3.2. Матрица метрического тензора связанной двойственной сети уже получена в (3. 41) по формуле  $\underline{Y}^{a^b} = \underline{j}^A_a \underline{Y}^{ab} \underline{j}^B_b = {}^m C_{a^a} Z_{ab} {}^m C_b^b$ :

$${}^j\underline{Y}^{a'b'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.127)$$

3.3. Обратная матрица  ${}^j\underline{Z}_{a'b}$  для базисных разомкнутых путей ( $j$ -путей) двойственной связанной сети  ${}^j\underline{Z}_{a'b} = ({}^j\underline{Y}^{a'b})^{-1}$  была вычислена в (3.42).

3.4. Ковариантные компоненты  ${}^j\underline{d}_a$  вектора  ${}^j\underline{d}$  в базисных разомкнутых путях связанных ветвей  $-{}^j\underline{d}_a = {}^j\underline{Z}_{a'b} \cdot {}^j\underline{d}^b$ :

$${}^j\underline{d}_a = \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix} 1/8 = \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} 1/24 \times \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

3.5. Получим ковариантные компоненты  ${}^j\underline{d}^c_a$  вектора  ${}^j\underline{d}$  в отдельных ветвях двойственной сети по формуле  ${}^j\underline{d}^c_a = {}^j\underline{A}^{a'}_{a'} \cdot {}^j\underline{d}_a = {}^m C_a^{a'} \cdot {}^j\underline{d}_a$ :

$${}^j\underline{d}^c_a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix} 1/8 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix} 1/8 \quad (3.129)$$

3.6. Эти компоненты также не совпадают с теми, которые были для свободных ветвей и чисто узловой сети. Контравариантные  ${}^j\underline{d}_c^a$  и ковариантные  ${}^j\underline{d}^c_a$  компоненты вектора  ${}^j\underline{d}$  в каждой ветви двойственной сети различны, т.е.  ${}^j\underline{d}_c^a \neq {}^j\underline{d}^c_a$ , поскольку  $Y \neq Z$ . Поэтому сначала получим  ${}^j\underline{d}_c^a = Z_{ab} \cdot {}^j\underline{d}^c_b = \underline{Y}^{ab} \cdot {}^j\underline{d}^c_b$ , где надо учесть двойственный характер компонент вектора и метрической матрицы:

$${}^j\underline{d}_c^a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 29 \\ 39 \\ 15 \\ 28 \end{bmatrix} 1/8 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & & 1 & \\ & 3 & & \\ 1 & & 1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} & \times & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix} 1/8 \quad (3.130)$$

Тогда квадрат величины  ${}^j\underline{d}$  в двойственной сети равен:

$$|{}^j\underline{d}|^2 = {}^j\underline{d}_c^a \cdot {}^j\underline{d}^c_a = (29 \times 14 + 39 \times 13 + 15 \times 1 + 28 \times 14)/64 = 165/8.$$

Такой же результат получим и для квадрата  ${}^j\underline{d}$  в базисных разомкнутых путях двойственной сети:

$$|{}^j\underline{d}|^2 = {}^j\underline{d}^{a'} \cdot {}^j\underline{d}_a = (9 \times 14 + 3 \times 13)/8 = 165/8. \quad (3.131)$$

Для проверки постоянства квадрата величины вектора  ${}^j\underline{d}$  достаточно сложить его значения в двух двойственных сетях в любой системе координат, т.е. в базисных  $j$ -путях, или, аналогично, в отдельных ветвях, в соответствии с (3.78) и (2.60):

$$|{}^j\underline{d}|^2 = |{}^j\underline{d}|^2 + |{}^j\underline{d}|^2 = (27 + 165)/8 = 192/8 = 24. \quad (3.132)$$

Это совпадает со значением  $|\mathbf{j}\mathbf{d}|^2$  в (3.119) т.е., *квадрат величины вектора в разомкнутых путях  $\mathbf{j}\mathbf{d}$  также остается постоянным при изменении структуры двойственных сетей в условиях наличия метрики.*

Итак, примеры данного раздела по расчету двойственных сетей, как матриц решения, так и компонент наложенных векторов, в замкнутых и разомкнутых путях, полностью подтверждают все формулы и закономерности, полученные на основе геометрии двойственных сетей. Расчеты примеров подтверждают представленные теоретические построения о том, что *квадрат величины вектора, заданный в замкнутых путях (закрытая система), или в разомкнутых путях (открытая система) в сумме двух двойственных сетей остается постоянным при изменении структуры.*

*Этому математическому инварианту в реальных системах соответствует закон сохранения потока энергии. Существование такого инварианта (постоянства квадрата величины вектора, или постоянства рассеиваемой мощности – сохранения потока энергии) показывает, что каждая реальная структура, через которую распространяются потоки энергии, «сопровождается» двойственной структурой, не обязательно наблюдаемой, которая может располагаться в двойственном (ненаблюдаемом) пространстве.*

Структура наблюдаемой системы и двойственная ненаблюдаемая структура в совокупности составляют единое целое. Изменение структуры в каждой из частей сопровождается таким двойственным изменением структуры в другой части, что полный поток энергии остается постоянным, хотя его компоненты в каждой из частей системы могут меняться.

### **3.2.5. Проверка решения и законы Кирхгофа**

Как отмечалось, правильность расчетов сетей обеспечена методом получения формул расчета матриц решения, играющих роль метрических матриц, и компонент вектора при изменении структуры сети. Однако в электротехнике основным критерием для проверки правильности полученных решений являются законы Кирхгофа.

Для проверки решений на соответствие законам Кирхгофа, что является традиционным, общепринятым методом, используем аналогии между сетями и электрическими цепями. Контравариантным компонентам вектора в сети соответствуют токи в электрической цепи. Ковариантным компонентам вектора в сети соответствуют напряжения в электрической цепи. Заданию вектора в узлах, с распределением компонент в разомкнутых путях, соответствуют источники тока. Заданию вектора в контурах, с распределением компонент в замкнутых путях, соответствуют источники напряжения.

Подставим полученные значения компонент векторов  ${}^m\mathbf{d}$  и  $\mathbf{j}\mathbf{d}$  в схемы сетей и вычислим суммы токов в узлах и напряжений в контурах.

*Проверка расчета компонент вектора  ${}^m d$  в ветвях данной связанной сети и двойственной связанной сети при отсутствии метрики.*

Для вектора  ${}^m d$  в отсутствии метрики, значения компонент  ${}^m d_c^a$  в отдельных ветвях данной связанной сети из (3.62), представлены на рис. 3.6а, а двойственной связанной сети  ${}^m \underline{d}_c^a$  из (3.68), – на рис. 3.6б. Поскольку метрические матрицы единичные, то эти значения контравариантных компонент совпадают со значениями ковариантных компонент.

Направления токов и ветвей указаны стрелками. Выбранные пути (стрелки вдоль них указывают направления) показаны тонкими линиями. Отрицательное значение компоненты, тока или напряжения, показывает, что направление данной компоненты, и пути (или ветви), в которой она расположена (измерена) противоположны. Кружками со стрелками на ветвях показаны заданные компоненты вектора – источники напряжения.

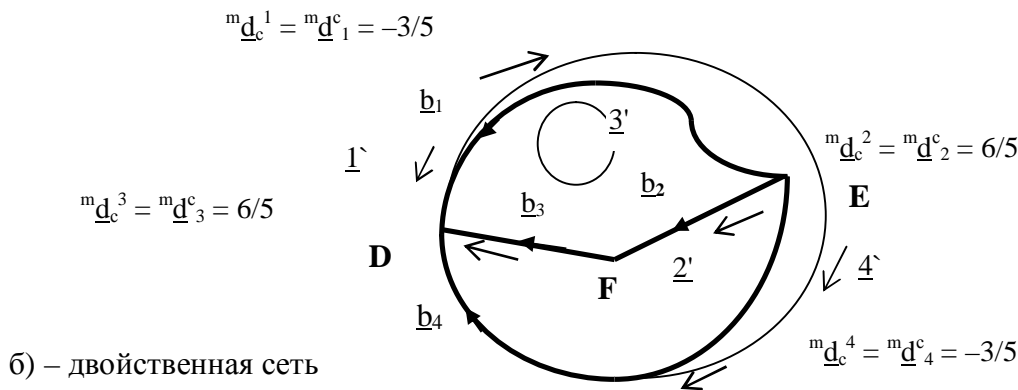
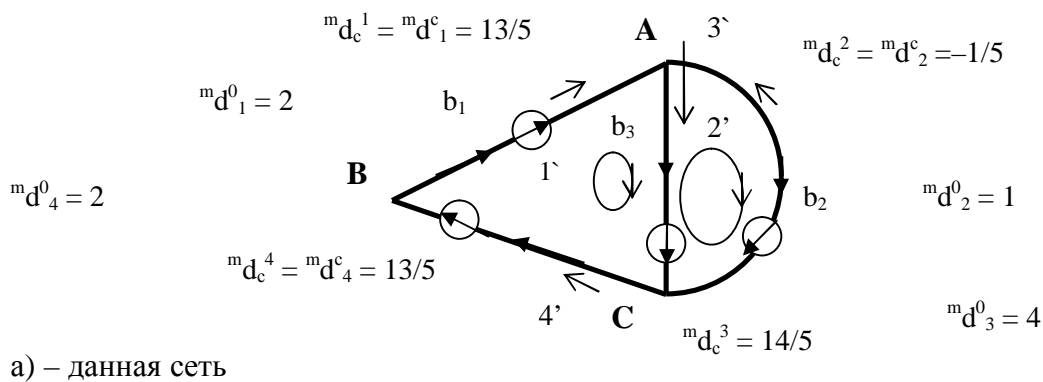


Рис. 3.6. Результаты расчета двойственных сетей для вектора в замкнутых путях  ${}^m d$  в отсутствии метрики,  $Z = I$

- а) – ковариантные и контравариантные компоненты  ${}^m d$  в данной сети;
- б) – ковариантные и контравариантные компоненты  ${}^m d$  в двойственной сети

Первый закон Кирхгофа для токов (сокращенно – ЗКТ) утверждает, что сумма токов в каждом узле равна нулю. Токи, входящие в узел, берутся со знаком плюс, выходящие – со знаком минус. Для данной сети имеем, что  $S^m d_c^a = 0$ :

- узел А:  ${}^m d_c^1 + {}^m d_c^2 - {}^m d_c^3 = (13 + 1 - 14)/5 = 0$ ;

- узел В:  $-{}^m d_c^1 + {}^m d_c^4 = -13/5 + 13/5 = 0$ ;
- узел С:  ${}^m d_c^2 + {}^m d_c^3 - {}^m d_c^4 = -1/5 + 14/5 - 13/5 = 0$ .

Для двойственной сети для  ${}^m \underline{d}_c^a$  из (3.68) имеем, что  $S^m \underline{d}_c^a = 0$ :

- узел D:  ${}^m \underline{d}_c^1 + {}^m \underline{d}_c^3 - {}^m \underline{d}_c^4 = (-3 + 6 - 3)/5 = 0$ ;
- узел E:  $-{}^m \underline{d}_c^1 - {}^m \underline{d}_c^2 + {}^m \underline{d}_c^4 = +3/5 - 6/5 + 3/5 = 0$ ;
- узел F:  $+{}^m \underline{d}_c^2 - {}^m \underline{d}_c^3 = +6/5 - 6/5 = 0$ .

Таким образом, для обеих сетей ЗКТ полностью выполняется.

Второй закон Кирхгофа для напряжений (сокращенно – ЗКН) утверждает, что сумма напряжений  ${}^m d_a^c$ , полученных при расчете равна сумме заданных компонент  ${}^m d_a^0$  (из (3.28)) в каждом контуре, знаки которых берутся соответственно их ориентации относительно направления контура. Для данной сети это равенство имеет вид:  $S^m d_a^c = S^m d_a^0$ :

$$\text{– контур } 1\text{: } +{}^m d_1^c + {}^m d_3^c + {}^m d_4^c = (+13 + 14 + 13)/5 = 8 =$$

$$= +{}^m d_1^0 + {}^m d_3^0 + {}^m d_4^0 = +2 + 4 + 2 = 8;$$

$$\text{– контур } 2\text{: } +{}^m d_2^c - {}^m d_3^c = -1/5 - 14/5 = -3 = {}^m d_2^0 - {}^m d_3^0 = 1 - 4 = -3;$$

Для двойственной сети  ${}^m \underline{d}_c^a = {}^m \underline{d}_c^a$  из (3.68), заданные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  прежние, поэтому имеем, что  $S^m \underline{d}_c^a = S^m d_a^0$ :

$$\text{– контур } 3\text{: } -{}^m \underline{d}_1^c + {}^m \underline{d}_2^c + {}^m \underline{d}_3^c = -(-3) + 6 + 6)/5 = 3 =$$

$$= -{}^m d_1^0 + {}^m d_2^0 + {}^m d_3^0 = -2 + 1 + 4 = 3;$$

$$\text{– контур } 4\text{: } -{}^m \underline{d}_1^c + {}^m \underline{d}_4^c = -(-3/5) + (-3/5) = 0 =$$

$$= -{}^m d_1^0 + {}^m d_4^0 = -2 + 2 = 0;$$

Таким образом, для обеих сетей ЗКН также полностью выполняется, при этом баланс воздействий и откликов по каждому контуру, т.е. заданных компонент  ${}^m d_a^0$  и найденных ковариантных компонент откликов в ветвях  ${}^m d_a^c$  и  ${}^m \underline{d}_c^a$ , показывает, что вектор  ${}^m \mathbf{d}$  внедрен в пространство сети, «наложен» своими компонентами, он имеет внешний характер по отношению к этому пространству сети.

Матрицы решения характеризуют только собственные свойства пространства сети, в них не содержится информация о внешних, либо внутренних воздействиях (наложенных векторах) на сеть (представляемую сетевой моделью систему).

*Проверка расчета компонент вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в ветвях данной связанной сети и двойственной связанной сети при наличии метрики.*

Если метрические матрицы не единичные, то ковариантные компоненты не совпадают с контравариантными компонентами. По этой причине, чтобы не загромождать схему, целесообразно представить их на разных рисунках.

На рис. 3.7а представлены контравариантные компоненты – токи,  ${}^m d_c^a$ , полученные при расчете в соотношении (3.101), а на рис. 3.7б представлены ковариантные компоненты – напряжения,  ${}^m d_c^a$ , полученные при расчете в соотношении (3.102). Остальные обозначения – как на рис. 3.6а.

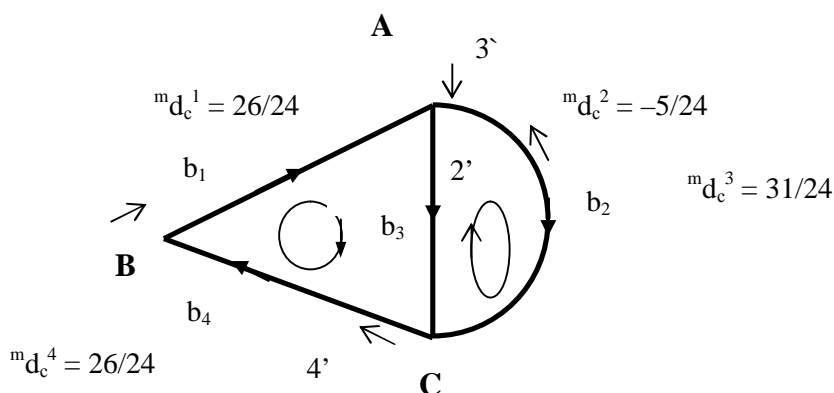
Первый закон (ЗКТ) – сумма токов (3.101) в каждом узле равна нулю. Токи в узел – знак плюс, из узла – знак минус. Для данной сети на рис. 3.7а получим, что  $S^m d_c^a = 0$ :

$$- \text{узел А: } + {}^m d_c^1 - {}^m d_c^2 - {}^m d_c^3 = (+26 - (-5) - 31)/24 = 0;$$

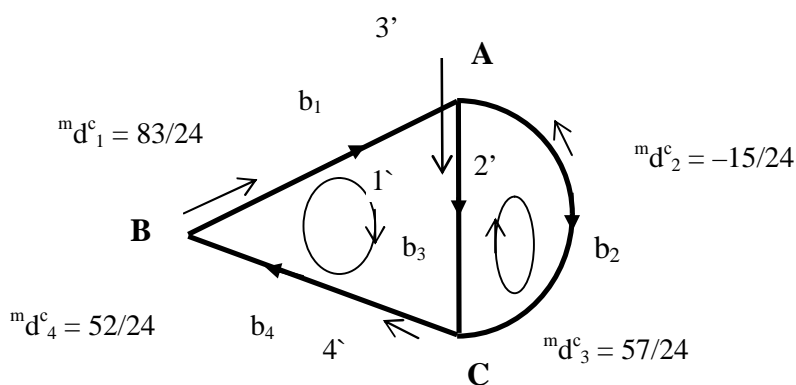
$$- \text{узел В: } - {}^m d_c^1 + {}^m d_c^4 = -26/24 + 26/24 = 0;$$

$$- \text{узел С: } + {}^m d_c^2 + {}^m d_c^3 - {}^m d_c^4 = (-5 + 31 - 26)/5 = 0.$$

Таким образом, для данной сети ЗКТ полностью выполняется.



а) – контравариантные компоненты



б) – ковариантные компоненты

Рис. 3.7. Результаты расчета примера данной сети для вектора в замкнутых путях  ${}^m \mathbf{d}$  при наличии метрики,  $Z^{-1} I$

а) – контравариантные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в данной сети;

б) – ковариантные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в данной сети

Второй закон (ЗКН) – сумма напряжений  ${}^m d_a^c$ , полученных при расчете (3.102) равна сумме заданных компонент  ${}^m d_a^0$  (из (3.28)) в каждом контуре, знаки соответствуют их ориентации относительно направления контура. Для данной сети:  $S^m d_a^c = S^m d_a^0$ :

$$\begin{aligned} - \text{контур } 1^{\backslash}: + {}^m d_1^c + {}^m d_3^c + {}^m d_4^c &= (+ 83 + 57 + 52)/24 = 8 = \\ &= + {}^m d_1^0 + {}^m d_3^0 + {}^m d_4^0 = + 2 + 4 + 2 = 8; \end{aligned}$$

$$- \text{контур } 2^{\backslash}: + {}^m d_2^c - {}^m d_3^c = - 15/24 - 57/24 = - 3 = + {}^m d_2^0 - {}^m d_3^0 = + 1 - 4 = - 3.$$

Таким образом, ЗКН для данной сети выполняется и при наличии метрики, т.е. неединичной метрической матрицы.

Для *двойственной сети* на рис. 3.8.а также представлены контравариантные компоненты – токи,  ${}^m \underline{d}_c^\alpha$ , которые были получены в соотношении (3.108), а на рис. 3.8.б представлены ковариантные компоненты – напряжения,  ${}^m \underline{d}_a^c$ , которые были получены в соотношении (3.109). Обозначения самой схемы те же, что и на рис. 3.6.б.

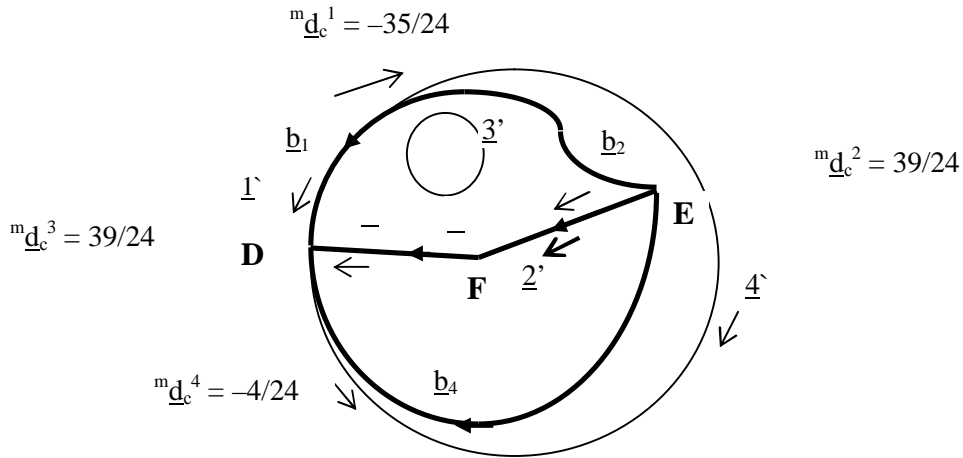
Первый закон (ЗКТ) – сумма токов в каждом узле равна нулю. Токи, входящие в узел, берутся со знаком плюс, выходящие – со знаком минус. Проверим, что в двойственной сети для контравариантных компонент  ${}^m \underline{d}_c^a$  из (3.108) выполняется, что  $S^m \underline{d}_c^a = 0$ :

$$- \text{узел D: } + {}^m \underline{d}_c^1 + {}^m \underline{d}_c^3 + {}^m \underline{d}_c^4 = (- 35 + 39 - 4)/24 = 0;$$

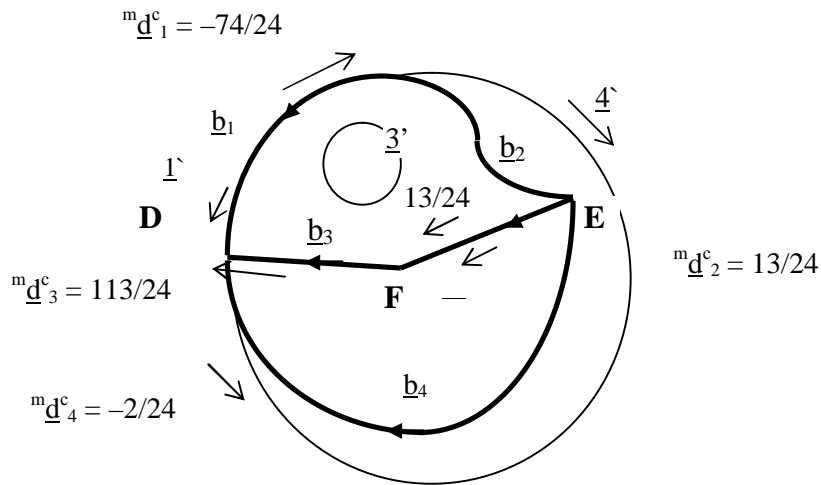
$$- \text{узел E: } - {}^m \underline{d}_c^1 - {}^m \underline{d}_c^2 - {}^m \underline{d}_c^4 = (+ 35 - 39 + 4)/24 = 0;$$

$$- \text{узел F: } + {}^m \underline{d}_c^2 - {}^m \underline{d}_c^3 = + 39/24 - 39/24 = 0.$$

Таким образом, для двойственной сети ЗКТ полностью выполняется.



а) контравариантные компоненты



б) ковариантные компоненты

Рис. 3.8. Результаты расчета двойственной сети для вектора в замкнутых путях  $\mathbf{m}\mathbf{d}$  при наличии метрики,  $Y = (Z)^{-1} \cdot I$

- а) – контравариантные компоненты вектора  $\mathbf{m}\mathbf{d}$  в двойственной сети;
- б) – ковариантные компоненты вектора  $\mathbf{m}\mathbf{d}$  в двойственной сети

Как отмечалось в разделе 3.1.4 и показано в формуле (3.20), при *наличии метрики*, заданной неединичной матрицей метрического тензора, ковариантные и контравариантные компоненты в заданной сети и двойственной сети меняются местами. Заданным ковариантным компонентам  ${}^m d^0_a$  вектора  $\mathbf{m}\mathbf{d}$  в данной сети соответствуют *контравариантные* (по типу своего преобразования) компоненты  ${}^m d_0^a$ . Эти компоненты играют в двойственной сети роль ковариантных компонент  ${}^m \underline{d}_a^0$ . Значения этих компонент можно получить по формуле  ${}^m \underline{d}_a^0 = {}^m d_0^a = Y^{ab} {}^m d^0_b$ . Именно с этими значениями, полученными в (3.104), надо сравнивать полученные напряжения на ветвях по каждому контуру.



Второй закон Кирхгофа, для напряжений (ЗКН) – сумма напряжений на ветвях двойственной сети  ${}^m \underline{d}^c_a$ , полученных при расчете в (3.109), равна в каждом контуре сумме заданных компонент  ${}^m \underline{d}^0_a = Y^{ab} {}^m d^0_b$  (полученных в (3.104) из (3.28) для двойственной сети), знаки дают их ориентацию относительно направления контура. Таким образом, должны получить, что  $S^m \underline{d}^c_a = S^m d^0_a$ , заданные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  прежние:

$$\begin{aligned} \text{– контур } \underline{3}: - {}^m \underline{d}^c_1 + {}^m \underline{d}^c_2 + {}^m \underline{d}^c_3 &= (-(-74) + 13 + 113)/24 = 25/3 = \\ &= - {}^m \underline{d}^0_1 + {}^m \underline{d}^0_2 + {}^m \underline{d}^0_3 = (-(-6) + 1 + 18)/3 = 25/3; \\ \text{– контур } \underline{4}: - {}^m \underline{d}^c_1 + {}^m \underline{d}^c_4 &= (-(-74) + (-2))/24 = 3 = \\ &= - {}^m \underline{d}^0_1 + {}^m \underline{d}^0_4 = (-(-6) + 3)/3 = 3; \end{aligned}$$

Таким образом, для двойственной сети ЗКН полностью выполняется также для метрической матрицы. Причем не только отличной от единичной, но и недиагональной, с учетом контравариантного характера преобразования заданных компонент вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в двойственной сети.

### **Проверка расчета компонент вектора ${}^j \mathbf{d}$ в ветвях двух двойственных связанных сетей при отсутствии метрики.**

Проведем проверку правильности расчетов для вектора  ${}^j \mathbf{d}$ , заданного в разомкнутых путях контравариантными компонентами  ${}^j d_0^a$ . Для этого также подставим полученные значения компонент откликов в схемы сетей, представленные на рис. 3.9 и вычислим суммы токов в узлах и напряжений в контурах. Стрелки в узлах схематично показывают заданные компоненты (источники тока)  ${}^j I_0^a = {}^j d_0^a$ , причем они входят в начальные узлы ветвей и выходят из конечных узлов так, чтобы проходить по ветви в ее положительном направлении.

Для единичных метрических матриц  $Z = Y = I$  значения ковариантных компонент  ${}^j d^c_\alpha$  в отдельных ветвях данной связанной сети из (3.82), представлены на рис. 3.9.а, а в двойственной связанной сети  ${}^j \underline{d}^c_a$  из (3.88), – на рис. 3.9.б. Поскольку  $Z$  и  $Y$  единичные, то эти значения ковариантных компонент совпадают со значениями контравариантных компонент. Ориентации компонент (токов или напряжений) и ветвей указаны стрелками. Выбранные пути (стрелки вдоль них указывают направления) показаны тонкими линиями. Отрицательные значения компонент показывают, что они направлены противоположно относительно направления соответствующего пути (ветви).

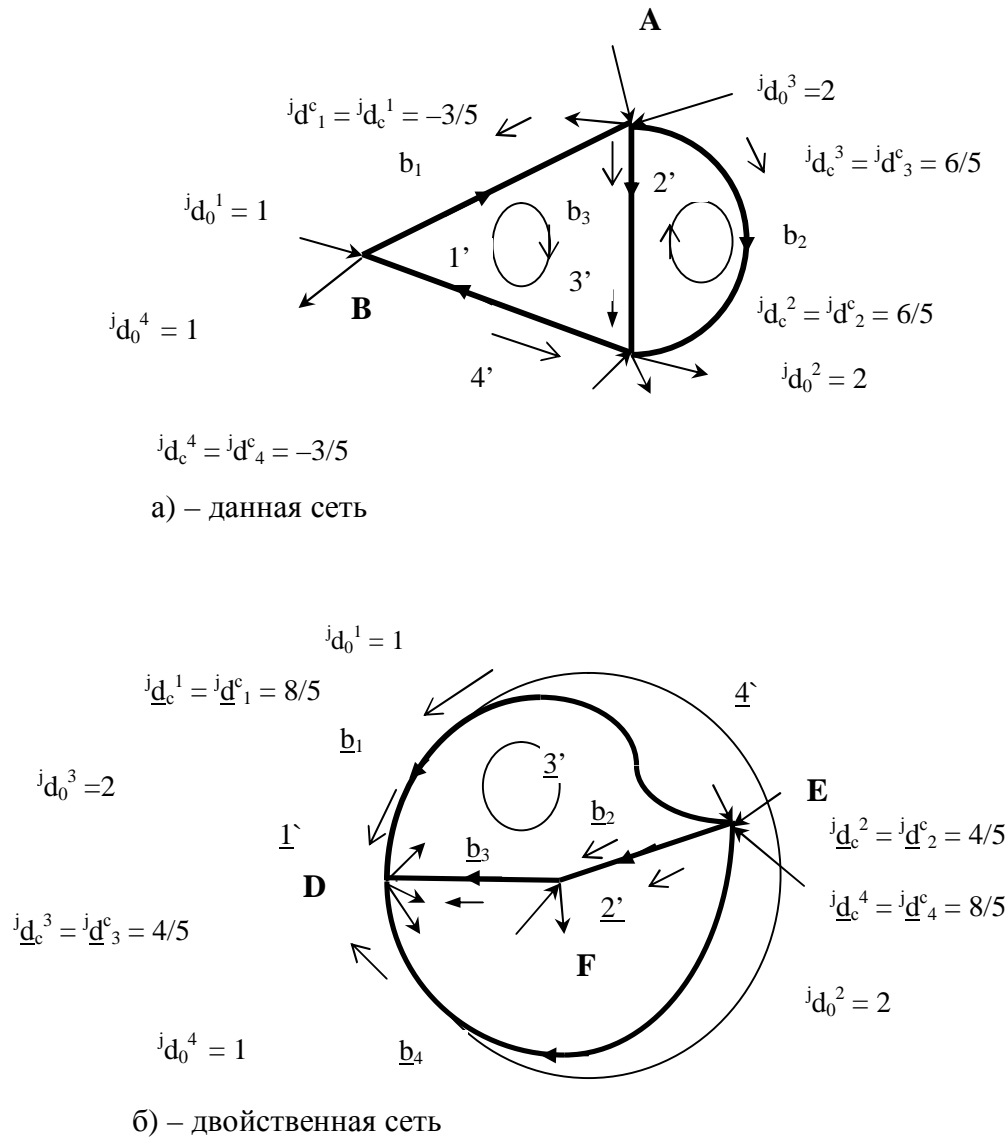


Рис. 3.9. Результаты расчета примера двойственных сетей для вектора в разомкнутых путях  $\underline{j}_d$  в отсутствии метрики,  $Z = I$

- а) – ковариантные и контравариантные компоненты вектора  $\underline{j}_d$  в данной сети;
- б) – ковариантные и контравариантные компоненты  $\underline{j}_d$  в двойственной сети

Первый закон Кирхгофа (ЗКТ) в случае вектора  $\underline{j}_d$ , заданного в разомкнутых путях теперь имеет, в соответствии со сказанным в разделе 3.1.2, другой вид. Токи, входящие в узел, имеют знак плюс, выходящие из узла знак минус. Сумма рассчитанных в (3.82) токов ветвей  $j_{I_c}^a = j_{d_c}^a$  и сумма источников тока (заданных компонент)  $j_{I_0}^a = j_{d_0}^a$ , которые заданы в соотношении (3.29) в каждом узле должна быть равна нулю. Здесь мы обозначили токи прописной буквой I, поддерживая традицию Крона, который обозначал прописными буквами все величины, относящиеся к «узловой» сети. То есть к сети с источниками тока, (открытая система). Для данной сети это значит, что  $S^j d_c^a + S^j d_0^a = 0$ :

– узел А:  $(+j_{d_c^1} - j_{d_c^2} - j_{d_c^3}) + (-j_{d_0^1} + j_{d_0^2} + j_{d_0^3}) =$

$$= (+(-3) - 6 - 6)/5 + (-1 + 2 + 2) = -3 + 3 = 0;$$

$$- \text{узел В: } -j d_c^1 + j d_c^4 + j d_0^1 - j d_0^4 = (-(-3) + (-3))/5 + 1 - 1 = 0;$$

$$- \text{узел С: } +j d_c^2 + j d_c^3 - j d_c^4 - j d_0^2 - j d_0^3 + j d_0^4 = \\ = (+6 + 6 - (-3))/5 - 2 - 2 + 1 = +3 - 3 = 0.$$

Для двойственной сети в отсутствии метрики  $j \underline{d}_c^a = j \underline{d}_a^c$ , а заданные компоненты  $j d_0^a$  прежние, поэтому для  $j \underline{d}_c^a$  из (3.88) имеем соотношение  $S^j \underline{d}_c^a + S^j d_0^a = 0$ :

$$- \text{узел D: } +j \underline{d}_c^1 + j \underline{d}_c^3 + j \underline{d}_c^4 + (-j d_0^1 - j d_0^3 - j d_0^4) = \\ = (8 + 4 + 8)/5 - 1 - 2 - 1 = 0;$$

$$- \text{узел E: } -j \underline{d}_c^1 - j \underline{d}_c^2 - j \underline{d}_c^4 + (+j d_0^1 + j d_0^2 + j d_0^4) = \\ = (-8 - 4 - 8)/5 + 1 + 2 + 1 = 0;$$

$$- \text{узел F: } +j \underline{d}_c^2 - j \underline{d}_c^3 + (-j d_0^2 + j d_0^3) = +4/5 - 4/5 = -2 + 2 = 0.$$

Таким образом, для двух двойственных сетей ЗКТ полностью выполняется. При этом баланс воздействий и откликов по каждому узлу, т.е. заданных компонент  $j d_0^a$  и найденных компонент  $j d_c^a$  и  $j \underline{d}_c^a$ , показывает, что вектор  $j \mathbf{d}$  «наложен» на пространство сети, его заданные компоненты не меняются при изменении системы координат, структуры сети. Они носят как бы внешний характер по отношению к этому пространству. Баланс воздействий и откликов в узлах сети характеризует взаимодействие сети с «внешней» средой; т.е. открытый характер системы, которую может представлять такая сетевая модель.

Матрицы решения характеризуют только собственные свойства пространства сети, в них не содержится информация о внешних, либо внутренних воздействиях на сеть (представляемую систему).

Второй закон Кирхгофа (ЗКН) для вектора, заданного в разомкнутых путях, выглядит проще: сумма полученных при расчете напряжений на ветвях  $j d_\alpha^c$  из соотношения (3.82), равна нулю в каждом контуре. Знаки  $j d_\alpha^c$  соответствуют их ориентации относительно направления контура. Для данной сети это равенство имеет вид:  $S^j d_a^c = 0$ :

$$- \text{контур 1` : } +j d_1^c + j d_3^c + j d_4^c = (-3 + 6 - 3)/5 = 0;$$

$$- \text{контур 2` : } +j d_2^c - j d_3^c = 6/5 - 6/5 = 0.$$

Для двойственной сети  $j \underline{d}_a^c = j \underline{d}_c^a$  из (3.88), заданные компоненты вектора  $j \mathbf{d}$  прежние, поэтому имеем, что в каждом контуре  $S^j \underline{d}_a^c = 0$ :

$$- \text{контур 3` : } -j \underline{d}_1^c + j \underline{d}_2^c + j \underline{d}_3^c = (-8 + 4 + 4)/5 = 0;$$

$$- \text{контур 4` : } -j \underline{d}_1^c + j \underline{d}_4^c = -8/5 + 8/5 = 0.$$

Таким образом, для обеих сетей ЗКН также полностью выполняется.

*Проверка расчета компонент вектора  $j \mathbf{d}$  в ветвях данной связанной сети и двойственной связанной сети при наличии метрики.*

Если метрические матрицы не единичные, то ковариантные и контравариантные компоненты не совпадают, поэтому представим их на разных рисунках, чтобы не загромождать схему. На рис. 3.10.а представлены ковариантные компоненты – напряжения,  ${}^j d_c^a$ , полученные при расчете в (3.122), а на рис. 3.10.б представлены контравариантные компоненты – токи,  ${}^j d_c^a$ , полученные при расчете в соотношении (3.123). Обозначения самой схемы остались теми же, что и на рис. 3.9.а.

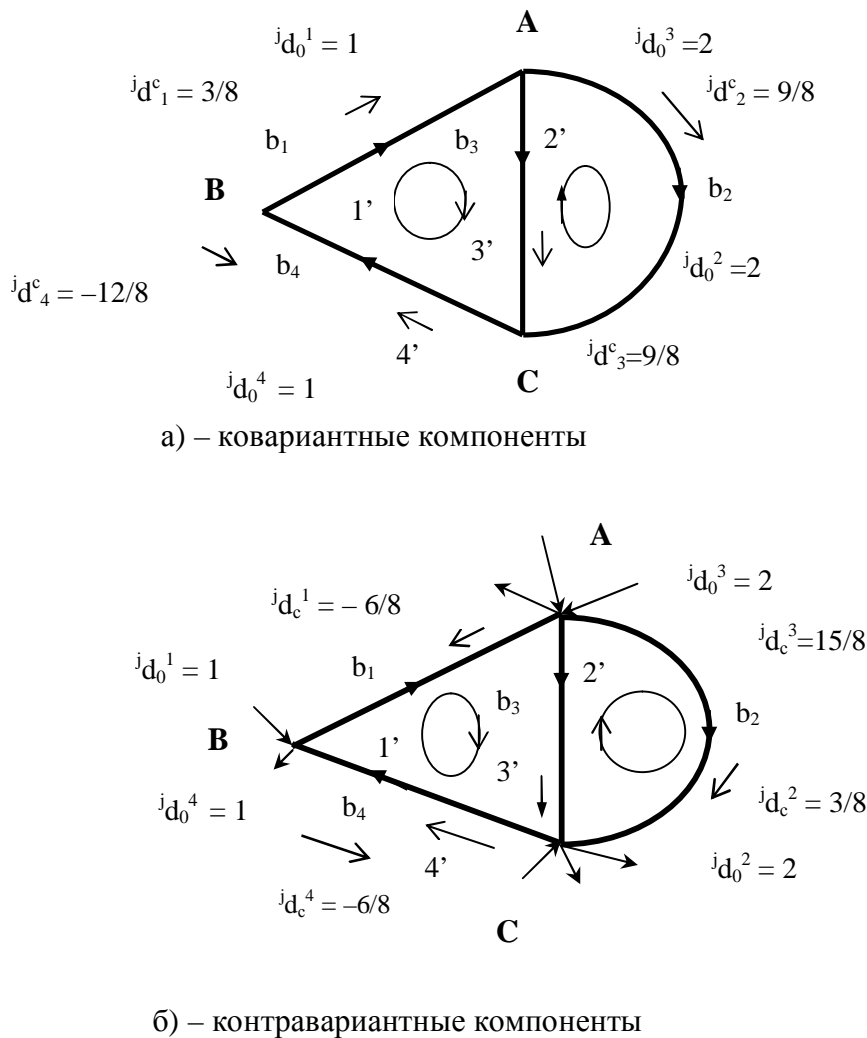


Рис. 3.10. Результаты расчета примера данной сети для вектора в разомкнутых путях  ${}^j \mathbf{d}$  при наличии метрики,  $Z^{-1} I$

- а) - ковариантные компоненты вектора  ${}^j \mathbf{d}$  в данной сети;  
 б) - контравариантные компоненты вектора  ${}^j \mathbf{d}$  в данной сети

Первый закон Кирхгофа (ЗКТ) в случае вектора  ${}^j \mathbf{d}$ , заданного в разомкнутых путях теперь, в соответствии со сказанным, имеет вид:  $(S^j d_c^a + S^j d_0^a) = 0$ . Токи, входящие в узел, будут иметь знак плюс, выходящие из узла – знак минус. Сумма токов – компонент ветвей

$jI_c^a = j d_c^a$  из (3.123) и сумма источников тока (заданных компонент)  $jI_0^a = j d_0^a$  из (3.29) в каждом узле должна равняться нулю. Для данной сети на рис. 3.10.б это значит, что:

$$\begin{aligned} - \text{узел А: } & (+ j d_c^1 - j d_c^2 - j d_c^3) + (- j d_0^1 + j d_0^2 + j d_0^3) = \\ & = (+ (-6) - 3 - 15)/8 + (-1 + 2 + 2) = -3 + 3 = 0; \end{aligned}$$

$$- \text{узел В: } + j d_c^1 - j d_c^4 + j d_0^1 - j d_0^4 = (+ (-6) - (-6))/8 + 1 - 1 = 0;$$

$$\begin{aligned} - \text{узел С: } & + j d_c^2 + j d_c^3 - j d_c^4 - j d_0^2 - j d_0^3 + j d_0^4 = \\ & = (3 + 15 - (-6))/8 - 2 - 2 + 1 = +3 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для данной сети ЗКТ выполняется. Баланс воздействий и откликов по каждому узлу, т.е. заданных компонент  $j d_0^a$  и найденных компонент  $j d_c^a$ , показывает, что вектор  $j \mathbf{d}$  «наложен» на пространство сети, его заданные компоненты не меняются при изменении системы координат, структуры сети.

Второй закон Кирхгофа (ЗКН) для вектора  $j \mathbf{d}$  проще: сумма рассчитанных напряжений (ковариантных компонент) на ветвях  $j d_c^a$  из (3.122), равна нулю в каждом контуре. Знаки  $j d_c^a$  на рис. 3.10.а соответствуют их ориентации относительно направления контура. Для данной сети это имеет вид:  $S j d_c^a = 0$ :

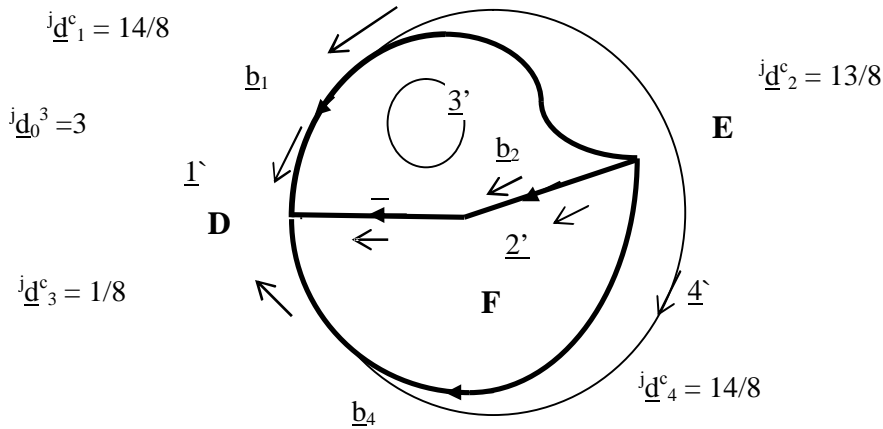
$$- \text{контур 1: } j d_c^1 + j d_c^3 + j d_c^4 = (+ 3 + 9 - 12)/8 = 0;$$

$$- \text{контур 2: } + j d_c^2 - j d_c^3 = 9/8 - 9/8 = 0.$$

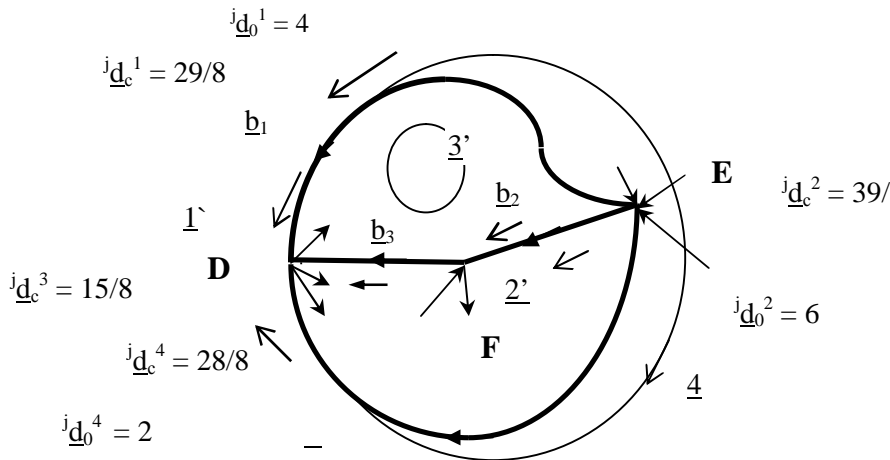
Итак, ЗКН в данной сети также выполняется и для неединичной, недиагональной метрической матрицы.

Для *двойственной сети* ковариантные и контравариантные компоненты также представлены отдельно на разных рисунках. На рис. 3.11.а – ковариантные компоненты (напряжения),  $j \underline{d}_c^a$ , полученные при расчете в соотношении (3.129), а на рис. 3.11.б даны контравариантные компоненты (токи),  $j \underline{d}_0^a$ , полученные в соотношении (3.130). Обозначения те же, что и на рис. 3.9.б.

Для двойственной сети при наличии метрики контравариантные и ковариантные компоненты друг другу не равны, т.е.  $j \underline{d}_c^a \neq j \underline{d}_0^a$ . Заданные компоненты-воздействия  $j \underline{d}_0^a$  определяем теперь в соответствии с (3.20) в разделе 3.1.4, по формуле  $j \underline{d}_0^a = Z_{ab} j d_0^b$ , поскольку им теперь соответствуют *двойственные, ковариантные* по своему закону преобразования, компоненты. Они вычислены в соотношении (3.125), именно их значения представлены на рисунке в качестве воздействий. Таким образом, закон Кирхгофа для токов выполняется уже для этих значений. Подставляя эти значения, вместе с  $j \underline{d}_c^a$  из (3.130), которые показаны на рис. 3.11.б, можем проверить, что суммы всех токов в узлах (входящих и выходящих) равны нулю –  $S j \underline{d}_c^a + S j \underline{d}_0^a = 0$ :



а) – ковариантные компоненты



б) – контравариантные компоненты

Рис. 3.11. Результаты расчета двойственной сети для вектора в разомкнутых путях  $j_{\underline{d}}$  при наличии метрики,  $Y = (Z)^{-1} \neq I$

а) – ковариантные компоненты вектора  $j_{\underline{d}}$  в двойственной сети;

б) – контравариантные компоненты вектора  $j_{\underline{d}}$  в двойственной сети

– узел D:  $+j_{\underline{d}_c}^1 + j_{\underline{d}_c}^3 + j_{\underline{d}_c}^4 + (-j_{\underline{d}_0}^1 - j_{\underline{d}_0}^3 - j_{\underline{d}_0}^4) = (29 + 15 + 28)/8 - 4 - 3 - 2 = 9 - 9 = 0;$

– узел E:  $-j_{\underline{d}_c}^1 - j_{\underline{d}_c}^2 - j_{\underline{d}_c}^4 + (j_{\underline{d}_0}^1 + j_{\underline{d}_0}^2 + j_{\underline{d}_0}^4) = (-29 - 39 - 28)/8 + 4 + 6 + 2 = -12 + 12 = 0;$

– узел F:  $+j_{\underline{d}_c}^2 - j_{\underline{d}_c}^3 + (-j_{\underline{d}_0}^2 + j_{\underline{d}_0}^3) = +39/8 - 15/8 - 6 + 3 = 0.$

Итак, для двойственной сети ЗКТ также выполняется. Баланс воздействий и откликов по каждому узлу, т.е. заданных компонент  $j_{\underline{d}_0}^\alpha$  и найденных компонент  $j_{\underline{d}_c}^a$ , показывает, что заданные компоненты вектора  $j_{\underline{d}}$  при изменении структуры сети не меняются.

Второй закон Кирхгофа для напряжений здесь имеет более простой вид. Для двойственной сети  $\underline{d}_a^c$  уже получены в (3.129) поэтому подставляя их на рис.3.11.а проверим, что в каждом контуре  $S^j \underline{d}_a^c = 0$ :

$$\text{– контур } \underline{3}: -j \underline{d}_1^c + j \underline{d}_2^c + j \underline{d}_3^c = (-14 + 13 + 1)/8 = 0;$$

$$\text{– контур } \underline{4}: -j \underline{d}_1^c + j \underline{d}_4^c = -14/8 + 14/8 = 0.$$

Итак, для двойственной сети ЗКН также полностью выполняется.

Проведенная проверка решений показывает изменение компонент наложенных векторов, заданных в замкнутых и разомкнутых путях, при связывании свободных ветвей в сеть. Такие векторы характеризуют протекающие процессы, и данные примеры являются иллюстрацией расчета изменения процессов при изменении структуры сетей. Эти расчеты иллюстрируют особенности изменения компонент векторов при переходе к двойственной сети, показывая взаимное дополнение этих сетей.

Внутренние свойства двойственных сетей проявляются в законах преобразования метрических тензоров при изменении структуры в виде матриц решения, а по отношению к заданным в сети векторам (внешним и внутренним) – в сохранении постоянства квадрата величины вектора, а также постоянства компонент вектора в каждой ветви взаимно двойственных сетей.

Векторы в двойственных сетях геометрически представляют потоки энергии в сложных системах, постоянство квадрата величины вектора при изменении структуры отражает постоянство мощности, которая численно характеризует величину потока энергии. Это является одним из простейших, и наиболее очевидных проявлений закона сохранения потока энергии при изменении структуры двойственных сетей (сетевых моделей сложных систем). В следующей главе рассмотрены закономерности, связанные с постоянством мощности при изменении структуры двойственных электрических цепей и соответствующие им инварианты двойственных сетей.

### 3.3. Расчет сети при изменении соединений ветвей

В данном разделе рассматривается расчет связанной сети при изменении соединения ветвей, когда количество независимых подсетей не меняется. В следующем разделе 3.4 рассматривается расчет сети при изменении соединений, когда меняется количество независимых подсетей.

При изменении связей ветвей в сети необходимо заново выводить уравнения поведения и решать их. При частых изменениях, выборе среди многих вариантов соединений, когда расчет каждого из них трудоемок, целесообразно использовать результаты расчета сети с одной структурой для получения решения сети с другой структурой. Задача состоит в том, чтобы по матрице решения одной сети и матрице преобразования, описывающей изменения в структуре, получить матрицу решения для другого соединения тех же ветвей.

#### 3.3.1. Матрица изменений при соединении и разъединении ветвей

При изменении числа узлов, их слиянии или расслоении, в сети происходит изменение количества базисных замкнутых и разомкнутых путей. При этом меняется размерность соответствующих подпространств путей. Пусть в сети  $\alpha_1$  из  $n$  ветвей есть  $J_1$  узлов и одна подсеть –  $s_1 = 1$ . Тогда, как известно, в сети независимых разомкнутых путей  $j_1 = J_1 - s_1$ , и независимых контуров  $m_1 = n - j_1$ . Если в сети  $\alpha_2$ , также из одной подсети, число узлов изменилось, например, часть узлов  $DJ$  соединили с другими, и стало узлов  $J_2 = J_1 - DJ$ , то изменится и число разомкнутых путей:

$$j_2 = J_2 - s_1 = J_1 - DJ - s_1 = j_1 - DJ, \quad (3.133)$$

и число замкнутых путей, контуров:

$$m_2 = n - j_2 = n - j_1 + DJ = m_1 + DJ. \quad (3.134)$$

Таким образом, уменьшение числа узлов увеличивает количество независимых контуров и уменьшает количество независимых разомкнутых путей. Наоборот, увеличение числа узлов уменьшает количество независимых контуров и увеличивает количество независимых разомкнутых путей.

Обозначим вектор базисных путей в старой сети как  $p^1_a = ({}^m p^1, {}^j p^1)$ . Пусть часть узлов в этой сети была замкнута, и в результате количество независимых контуров увеличилось на  $Dm = DJ$ . Для простоты допустим, что новые пути в сети,  $p^2_a$  в том числе и новые контуры  $Dm$ , состоят из тех же ветвей, что и прежние пути. Такой выбор путей в исходной сети возможен, что удобно для вывода формул пересчета – изменения матриц решения при изменении структуры сети. Вместе с тем выбор путей в каждой сети может быть произвольным. Дело в том, что соответствующие им матрицы преобразования не входят в конечные результаты, т.е. не присутствуют в матрицах решения.



В этом случае в матрицах преобразования путей от свободных ветвей к связанной сети  $a_1 - C_{a1}^a$  и сети  $a_2 - C_{a2}^a$ , все элементы останутся прежними, но строк  $m$ -путей  ${}^m p^2$  будет на  $\Delta m$  больше, а строк  $j$ -путей  ${}^j p^2$ , соответственно, на  $\Delta m$  меньше.

Новые строки  $m$ -путей составят *подматрицу изменений структуры сети*, которую обозначим как  $DC_{Dm}^a = DC$ . Тогда можно выразить матрицу преобразования (от свободных ветвей к связанным ветвям) новой сети через подматрицы преобразования старой сети, включая матрицу изменений  $DC$ :

$$C_{a1}^a = \begin{array}{c} m_1 \\ j_1 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^m C_{a1}^a \\ {}^j C_{a1}^a \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} m_1 \\ j_1 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^m C_1 \\ {}^j C_1 \end{array} \end{array}; \quad C_{a2}^a = \begin{array}{c} m_1 \\ j_2 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^m C_{a1}^a \\ DC_{a^a} \\ {}^j C_{a2}^a \end{array} \end{array} \Bigg|_{j_1} = \begin{array}{c} m_2 \\ j_1 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^m C_1 \\ DC \\ {}^j C_2 \end{array} \end{array} \quad (3.135)$$

где двойная черта отделяет в матрице  $C_{a2}^a$  подматрицы  ${}^m C_2$  и  ${}^j C_2$ .

Аналогично, для двойственной сети, где замыканиям узлов соответствуют размыкания,  $Dj = Dm$ , матрицу преобразования новой сети  $\underline{C}_{a2}^a = A^{a2}_a$  можно представить через подматрицы матрицы преобразования старой сети  $\underline{C}_{a1}^a = A^{a1}_a$ , включая матрицу изменений путей  $\underline{DC} = DA$ :

$$\underline{C}_{a1}^a = A^{a1}_a = \begin{array}{c} j_1 \\ m_1 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^j \underline{C}_{a1}^a \\ {}^m \underline{C}_{a1}^a \end{array} \end{array}; \quad \underline{C}_{a2}^a = A^{a2}_a = \begin{array}{c} j_1 \\ m_2 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^j \underline{C}_{a1}^a \\ \underline{DC}_{a^a} \\ {}^m \underline{C}_{a2}^a \end{array} \end{array} \Bigg|_{m_1} = \begin{array}{c} j_1 \\ m_1 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^j \underline{C}_1 \\ \underline{DC} \\ {}^m \underline{C}_2 \end{array} \end{array} \quad (3.136)$$

В этой матрице двойная черта отделяет  ${}^m \underline{C}_2$  от  ${}^j \underline{C}_2$ , и между сетями по-прежнему есть двойственные отношения:  $\underline{m}_1 = j_1$ ;  $\underline{m}_2 = j_2$ ;  $\underline{j}_1 = m_1$ ;  $\underline{j}_2 = m_2$ , а также имеет место новое соотношение, связывающее изменяемые пути  $\underline{Dm} = Dj$ , но в двойственной сети увеличивается число разомкнутых путей.

Если в сети часть узлов разомкнуть, то узлов становится больше  $J_2 = J_1 + DJ$ . Таким образом, в результате разъединений количество базисных разомкнутых путей увеличивается на  $Dj = DJ$  (при условии, что количество независимых подсетей в сети не изменилось), а число контуров уменьшилось на  $Dm = DJ$ . Тогда подматрица изменений  $\Delta C$  в новой сети переходит от  ${}^m C_2$  к  ${}^j C_2$ , таким образом, они меняются местами:

$$C_{a1}^a = \begin{array}{c} m_1 \\ j_1 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^m C_{a1}^a \\ {}^j C_{a1}^a \end{array} \end{array}; \quad C_{a2}^a = \begin{array}{c} m_2 < m_1 \\ j_1 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^m C_{a1}^a \\ DC_{a^a} \\ {}^j C_{a2}^a \end{array} \end{array} \Bigg|_{j_2} = \begin{array}{c} m_2 \\ j_1 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{array}{c} {}^m C_1 \\ DC \\ {}^j C_2 \end{array} \end{array} \quad (3.137)$$

где двойная линия показывает теперь новую границу между  ${}^m C_2$  и  ${}^j C_2$ .

Аналогично в двойственной сети произойдут соответствующие изменения, то есть, замкнутся узлы, уменьшится число разомкнутых путей и увеличится число контуров.

### **Выбор координат и тензор структуры.**

Для удобства вывода формул расчета сети при изменении структуры сделано предположение, что *пути в новой сети проходят по тем же ветвям, что и в старой сети*. Вместе с тем это предположение не принципиально. Пути являются только системами координат, которые в сети используются для представления различных объектов, величин. В разных системах координат объекты могут иметь различные компоненты, однако сами объекты не меняются при изменении точки зрения.

Матрица решения представляет собой метрический тензор для сети с данной структурой соединения ветвей и с данными весами ветвей. В системах координат, соответствующих разному выбору путей базиса, компоненты метрического тензора могут принимать различные значения. Однако при переходе от путей к ветвям, метрический тензор имеет одни и те же инвариантные значения для данной сети. Матрица решения имеет порядок, равный количеству ветвей, и выражает метрические отношения между ветвями в связанной сети. Матрицы решения, в конечном счете, связывают воздействия и отклики, т.е. обеспечивают решение задачи сети при изменении структуры.

При изменениях в сети, в ветвях сети, а это изменения структуры (матрицы инцидентий) и (или) изменения весов ветвей, значения метрического тензора меняются. Если этот новый тензор выражен в координатах путей, то для разных базисов его компоненты могут быть различны. Однако если выражать значения метрического тензора по отношению к ветвям, то они остаются инвариантными, не зависят от выбора координат, путей. Если мы получаем новый тензор (матрицу решения) из старого тензора, используя матрицы преобразования путей, то результат такого преобразования не зависит от выбора базиса путей. По этой причине выбор путей в сети может быть произвольным, конечный результат, матрица решения, от этого не зависит. Разумеется, выбранные пути должны составлять базис, как для замкнутых путей, так и для разомкнутых путей.

Изменяемые пути характеризуют изменения структуры. То есть те пути, которые были замкнутыми, а стали разомкнутыми; или те пути, которые были разомкнутыми, а стали замкнутыми. Они и составляют матрицу, которую можно назвать «матрица преобразования для изменяемых путей при изменении структуры» или, коротко, «матрица изменений». Матрица изменений играет главную роль при тензорном линейном преобразовании метрической матрицы старой сети в метрическую матрицу новой сети. Однако сама *матрица изменения, составляющие ее пути, в конечной матрице решения не присутствуют*. Поэтому не имеет значения, какие именно пути выбраны в качестве изменяемых среди множества тех путей, которые могут отображать сделанные изменения.

Матрицы преобразования путей вообще в расчете сети не участвуют. Их задача – только изменить метрику при изменении структуры. Само множество матриц преобразования может рассматриваться как тензор, который Крон предлагал называть «тензор соединения». Крон писал: «тензор соединения является аристократом в обществе тензоров. Он только участвует в соединениях ветвей, исчезая из конечных формул. Избегая, таким образом, черновой работы по выполнению конкретных вычислений» (Крон, 1979).

Однако правильнее было бы назвать этот «тензор соединения» как «тензор изменения структуры», или просто «тензор структуры», поскольку он отражает не только преобразования соединения, но и преобразования разъединения. Инвариантом этих преобразований, как отмечалось, является сумма метрических тензоров двух двойственных сетей. Сумма прямых метрических тензоров двойственных сетей равна метрическому тензору свободных замкнутых ветвей – закрытые системы. Сумма обратных метрических тензоров этих сетей равна тензору свободных разомкнутых ветвей – открытые системы.

Таким образом, в новой сети можно сохранить такую же конфигурацию путей, что и в старой сети. То есть, считать, что все пути в новой сети могут продолжать проходить по тем же ветвям, как и в старой сети.

Рассмотрим пример сети из шести ветвей на рис. 3.12.а, которая при соединении узлов А и В преобразуется в сеть на рис. 3.12.б. Направление соединения узлов показано жирным пунктиром с двумя стрелками. Другие стрелки показывают ориентации ветвей и направления выбранных контуров, которые показаны тонкими линиями и представлены в матрицах преобразования  $C^1$  и  $C^2$ . Результатом соединения узлов становится изменение путей. В данном случае разомкнутый путь  $p_3$  в сети на рис. 3.12.а, превращается в замкнутый путь  $p_3$  в сети на рис. 3.12.б, проходя по тем же ветвям  $b_1$  и  $b_3$ , т.е. по составу остается прежним.

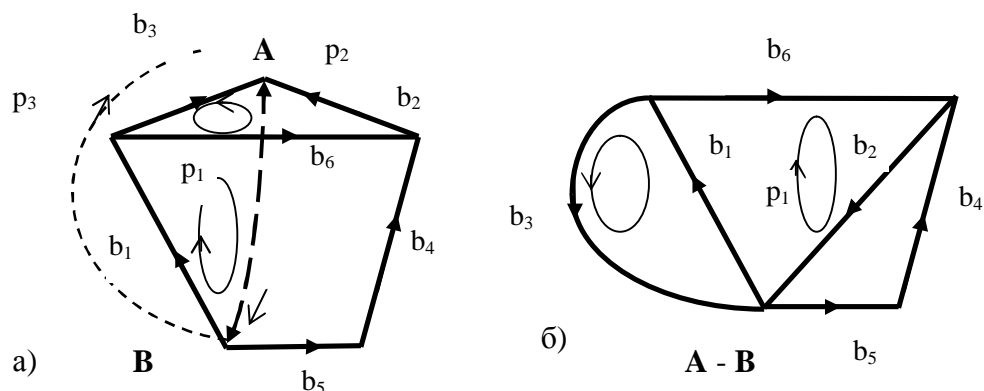


Рис. 3.12. Пересоединение ветвей с замыканием узлов  
а) – исходная сеть; б) – узлы А и В соединены в один узел

Матрицы преобразования путей, элементы которых показывают прохождение путей в каждой из сетей на рис. 3.12 имеют следующий вид:

$$C^1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1^{\wedge} \\ 2^{\wedge} \\ 3^{\wedge} \\ 4^{\wedge} \\ 5^{\wedge} \\ 6^{\wedge} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & & & 1 \\ \hline 1 & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} m \\ m \\ j \\ j \\ j \\ j \end{matrix} \end{matrix} \quad C^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1^{\wedge} \\ 2^{\wedge} \\ 3^{\wedge} \\ 4^{\wedge} \\ 5^{\wedge} \\ 6^{\wedge} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & & & 1 \\ \hline 1 & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ j \\ j \\ j \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.138)$$

Пути  $p_1$  и  $p_2$  были и остались замкнутыми. Можно видеть, что хотя элементы матриц преобразования не изменились, но подматрица контуров в первой сети,  ${}^m C^1$ , увеличилась в  ${}^m C^2$  на одну строку 3, которая и представляет собой здесь матрицу изменений  $DC$ . При этом путь  $p_3$ , который проходит по ветвям  $b_3$  и  $b_1$ , преобразовался из разомкнутого пути в замкнутый путь. Двойная линия в каждой матрице отделяет строки замкнутых путей от строк разомкнутых путей.

В двойственной сети соединениям узлов соответствуют разъединения узлов. В сетях, двойственных к сетям на рис. 3.12, соединения изменятся так, что на один узел станет больше. Такие двойственные сети показаны жирными линиями на рис. 3.13, где заданные сети показаны тонкими линиями.

Матрицы преобразования  $\underline{C}^1$  и  $\underline{C}^2$  этих сетей даны в (3.139). По элементам строк и столбцов этих матриц можно проследить пути в сетях. В результате изменения соединений ветвей появился новый узел (а, следовательно, разомкнутый путь вместо контура) и произошло изменение соединений ветвей  $\underline{b}_3$  и  $\underline{b}_1$ . Эти ветви как раз и составляли в данной сети изменяемый путь, ставший из разомкнутого пути замкнутым путем.

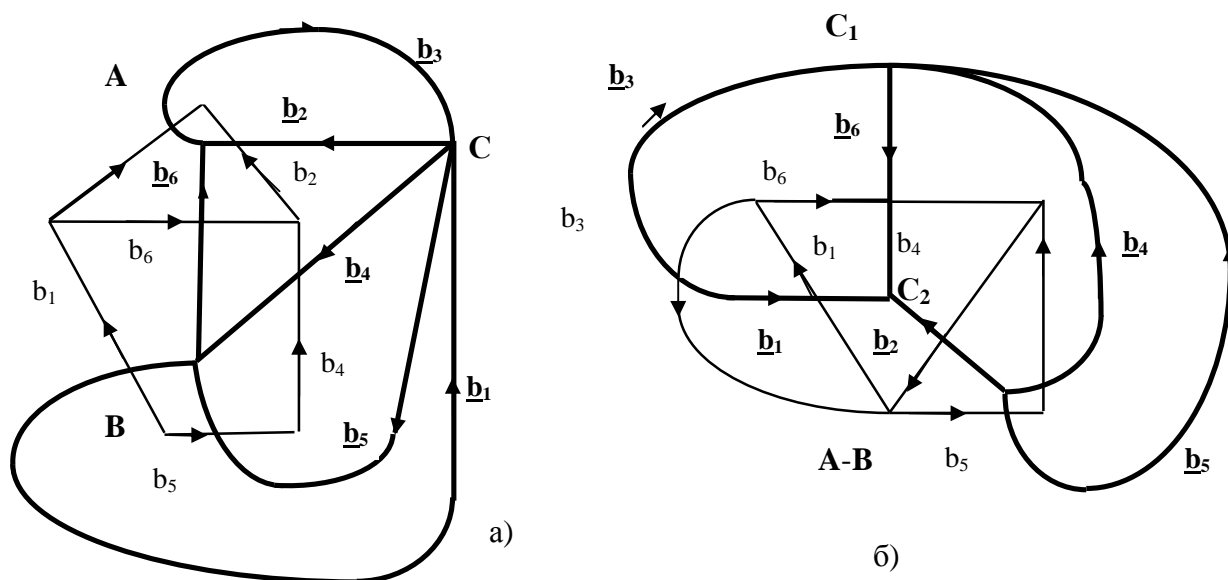


Рис. 3.13. Изменение соединения ветвей с размыканием узлов в двойственных сетях а) – исходная сеть и двойственная к ней; б) – сеть, в которой узлы А и В соединены в один узел А-В; и двойственная к ней, где узел С разъединен на два узла  $C_1$  и  $C_2$

Матрицы преобразования исходной двойственной сети и двойственной сети с изменением соединений представлены в (3.139).

$$\underline{C}^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1^{\setminus} & 1 & -1 & -1 & & & \\ 2^{\setminus} & & 1 & & & & \\ \hline 3^{\setminus} & & 1 & 1 & & & \\ 4^{\setminus} & 1 & -1 & -1 & 1 & & \\ 5^{\setminus} & 1 & -1 & -1 & & 1 & \\ 6^{\setminus} & -1 & & 1 & & & 1 \end{array} & \begin{array}{l} j \\ j \\ m \\ m \\ m \\ m \end{array} \end{array} \quad \underline{C}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1^{\setminus} & 1 & -1 & -1 & & & \\ 2^{\setminus} & & 1 & & & & \\ \hline 3^{\setminus} & & 1 & 1 & & & \\ 4^{\setminus} & 1 & -1 & -1 & 1 & & \\ 5^{\setminus} & 1 & -1 & -1 & & 1 & \\ 6^{\setminus} & -1 & & 1 & & & 1 \end{array} & \begin{array}{l} j \\ j \\ j \\ m \\ m \\ m \end{array} \end{array} \quad (3.139)$$

Пути  $p_1$  и  $p_2$  были и остались разомкнутыми. Интересно, что в этих  $\alpha$  сетях контур из ветвей  $b_2$  и  $b_3$  входит во многие пути как отдельная петля. На рис. 3.13.а этот путь  $b_2$  и  $b_3$  был замкнутым, а на рис. 3.13.б стал разомкнутым (и разорванным). Хотя сами элементы этих матриц также не изменились, но подматрица контуров в первой сети,  ${}^m\underline{C}^1$ , уменьшилась в  ${}^m\underline{C}^2$  на одну строку 3, которая и представляет собой матрицу изменений  $DC$ . При этом путь  $p_3$ , который проходит по ветвям  $b_3$  и  $b_2$ , преобразовался из замкнутого пути в разомкнутый. Двойная линия отделяет строки подматриц замкнутых и разомкнутых путей.

Такие матрицы используются для расчета преобразования компонент наложенного вектора, заданного в контурах при изменении структуры. Для вектора, заданного в разомкнутых путях, матрицу преобразований  $A$  и ее изменения можно построить аналогично. При обратном преобразовании структуры от сети на рис. 3.12.б к сети на рис. 3.12.а, узлы разъединяются, матрицы преобразования  $C^1$  и  $C^2$  меняются местами. В одной сети возможны два типа изменений: и соединения и разъединения узлов. В двойственной сети этому соответствуют, наоборот, разъединения и соединения.

Если число переменных, независимых векторов базиса, т.е. замкнутых или разомкнутых путей, при изменении структуры *увеличивается* и появляется матрица изменений, то можно решить задачу расчета новой сети по известной матрице решения старой сети и матрице изменений. Если *число переменных уменьшается*, то, *кажется, что такую вырожденную задачу решить нельзя, поскольку число строк в матрице преобразований новой сети сокращается, и матрица изменений исчезает*. Покажем, что инвариантность двойственных сетей позволяет решить эту проблему.

Для вектора, который задан в контурах  ${}^m\mathbf{d}$ , изменению путей (увеличению числа контуров) при соединении узлов в данной сети соответствуют матрицы  ${}^mC^2 = {}^mC^1 \hat{A} DC^2$ . Разъединению узлов в данной сети (уменьшению числа контуров) соответствуют матрицы  ${}^mC^2 = {}^mC^1 \hat{A} DC$ . В двойственной сети, соответственно, наоборот, происходит разъединение

<sup>2</sup>Под знаками  $\oplus$  или  $\ominus$  для матриц преобразования, например,  ${}^mC_1 \hat{A} DC$  следует понимать составление строк или столбцов этих матриц в одну матрицу, или отделение части строк или столбцов, в отличие от принятого в алгебре матриц поэлементного сложения или вычитания.

узлов – матрица  ${}^jA^2 = {}^jA^1 \underline{A} DA$  и соединение узлов – матрица  ${}^jA^2 = {}^jA^1 \overset{\circ}{A} DA$ . Таким образом, вырожденной задаче в одной сети соответствует невырожденная задача в двойственной сети.

Для вектора, заданного в разомкнутых путях  ${}^j\mathbf{d}$ , аналогично, соединениям узлов соответствуют матрицы  ${}^jA^2 = {}^jA^1 \underline{A} DA$ , а их разъединению – матрицы  ${}^jA^2 = {}^jA^1 \overset{\circ}{A} DA$  в данной сети. В двойственной сети – матрицы  ${}^mC^2 = {}^mC^1 \overset{\circ}{A} DC$  и  ${}^mC^2 = {}^mC^1 \underline{A} DC$  соответственно. Здесь также можно видеть, что вырожденной задаче в одной сети, соответствует невырожденная задача в двойственной сети.

Решив в каждом случае невырожденную задачу для той сети, для которой это возможно (число переменных увеличивается), можно с помощью инварианта двойственности получить решение для той сети, где при изменении структуры число переменных уменьшается и преобразование является вырожденным.

### 3.3.2. Матрицы решения при наложении связей

При наложении связей количество независимых замкнутых путей в заданной сети возрастает, а количество разомкнутых путей соответственно уменьшается. В двойственной сети преобразования структуры происходят наоборот, т.е. наложению связей соответствует разрывание связей.

Для пересчета решения старой сети в решение новой сети установим связь между их матрицами решения,  $Y_c^1$  и  $Y_c^2$ , и матрицей изменений  $DC$ . Рассмотрим невырожденные случаи получения матриц решения, которые обозначим как  $Y_c^{2+}$ , для базиса замкнутых путей (вектора  ${}^m\mathbf{d}$ ) при введении соединений узлов, и матриц решения  $Z_c^{2-}$  для базиса разомкнутых путей (вектора  ${}^j\mathbf{d}$ ), при введении разъединения узлов. В следующем разделе получим с использованием двойственных соотношений матрицы решения для вырожденных задач. При введении разъединения узлов будет получена матрица решения  $Y_c^{2-}$  – для вектора  ${}^m\mathbf{d}$ , и при введении соединений узлов матрица решения  $Z_c^{2+}$  – для вектора  ${}^j\mathbf{d}$ .

Если одновременно в сложной сети производятся и соединения и разъединения, т.е. одни узлы соединяются, а другие разделяются, то, вообще говоря, следует получить матрицы решений сначала для одного вида изменений, потом для другого, и результаты сложить (в соответствии с принципом суперпозиции).

Матрица решения старой сети для контуров при расчете сети по отдельным ветвям имеет вид:  $Y_c^1 = {}^mC_{1t} ({}^mC_1 Z {}^mC_{1t})^{-1} {}^mC_1$ , а матрица решения новой сети – аналогично:

$$Y_c^{2+} = {}^mC_{2t} ({}^mC_2 Z {}^mC_{2t})^{-1} {}^mC_2, \quad (3.140)$$

где через  $Y_c^{2+}$  обозначена матрица решения сети при введении соединений, наложении связей (уменьшении числа узлов). Затем подставим сюда выражение для матрицы  ${}^mC_2$  через матрицу  ${}^mC_1$  и матрицу  $DC$  из соотношения (3.135):

$$Y^{2+}_c = \begin{matrix} m_1 & Dm \\ \hline {}^m C_{1t} & DC_t \end{matrix} \left( \begin{matrix} m_1 & n \\ Dm & \begin{matrix} {}^m C_1 & n \\ \hline DC & Z \end{matrix} \end{matrix} \right)^{-1} \begin{matrix} m_1 & n \\ Dm & \begin{matrix} {}^m C_1 & n \\ \hline DC & DC_t \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.141)$$

Произведение в скобках дает символьную матрицу импедансов связанной сети  ${}^m Z_2$  (текущие индексы опускаем) следующего вида:

$${}^m Z_2 = \begin{matrix} m_1 & Dm \\ \hline {}^m C_1 Z {}^m C_{1t} & {}^m C_1 Z DC_t \\ DC Z {}^m C_{1t} & DC Z DC_t \end{matrix} m_2 = \begin{matrix} m_1 & Dm \\ \hline a & b \\ c & d \end{matrix} m_2 \quad (3.142)$$

Здесь справа через  $a, b, c, d$  сокращенно обозначены элементы матрицы  ${}^m Z_2$ .

Обратную матрицу к этой матрице,  $({}^m Z_2)^{-1} = ({}^m C_2 Z {}^m C_{2t})^{-1}$ , получим также в символьном виде. Если опустить промежуточные выкладки, то эта матрица примет следующий вид:

$${}^m Y_2 = ({}^m Z_2)^{-1} = \begin{matrix} m_1 & Dm \\ \hline a^{-1}(I + b D c a^{-1}) & -a^{-1} b D \\ -D c a^{-1} & D \end{matrix} m_2 = \begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix} \quad (3.143)$$

Здесь введено сокращенное обозначение  $D = (d + c a^{-1} b)^{-1}$ , а справа через  $e, f, g, h$  сокращенно обозначены элементы матрицы  ${}^m Y_2$ . Приведем для примера вид одного элемента этой матрицы, например, элемента  $f$ , чтобы показать процесс преобразований при получении результата:

$$\begin{aligned} f &= -a^{-1} b D = -a^{-1} b (d + c a^{-1} b)^{-1} = \\ &= -({}^m C_1 Z {}^m C_{1t})^{-1} {}^m C_1 Z DC_t (DC Z DC_t + DC Z {}^m C_{1t} ({}^m C_1 Z {}^m C_{1t})^{-1} {}^m C_1 Z DC_t)^{-1} = \\ &= -({}^m C_1 Z {}^m C_{1t})^{-1} {}^m C_1 Z DC_t (DC Z DC_t + DC Z (Y^l_c) Z DC_t)^{-1} \end{aligned}$$

Чтобы получить матрицу решения  $Y^{2+}_c$ , эту матрицу  ${}^m Y_2$  умножим слева на  ${}^m C_{2t}$  и справа на  ${}^m C_2$ , выраженные через матрицы  ${}^m C_1$  и матрицу изменений структуры  $\Delta C$ . Затем подставим вместо сокращений  $a, b, c, d$  элементов  ${}^m Z_2$  их значения из (3.142), произведем необходимые преобразования, и получим матрицу решения новой сети (для базиса замкнутых путей при введении связей, уменьшении числа узлов). Это матрица  $Y^{2+}_c$ , выраженная через матрицу решения первой, старой сети  $Y^l_c$  и матрицу изменений  $\Delta C$ :

$$\begin{aligned} Y^{2+}_c &= Y^l_c + D Y_c = \\ &= Y^l_c + (I - Y^l_c Z) DC_t [DC Z (I - Y^l_c Z) DC_t]^{-1} DC (I - Z Y^l_c), \end{aligned} \quad (3.144)$$

где второе слагаемое, обозначенное как  $D Y_c$ , представляет собой матрицу изменения решения сети. Эта формула описывает изменения в заданной сети при наложении связей – для подпространства замкнутых путей.

Можно видеть, что матрица решения новой сети,  $Y^{2+}_c$  получена как сумма прежней матрицы решений  $Y^l_c$  и матрицы изменений решения  $DY_c$ . Каждая из них представляет собой, по сути, метрическую матрицу для сети сложной конфигурации. Получение этих матриц не связано с присутствием наложенных векторов, или каких-либо других объектов. То есть, *это свойства самого пространства двойственных сетей.*

Эти метрические матрицы, матрицы решения, могут связывать, тем не менее, ковариантные и контравариантные компоненты наложенных геометрических объектов в сетях с разной структурой. Например, если вектор  ${}^m\mathbf{d}$  задан ковариантными компонентами  ${}^m d^0_a$ , то контравариантные компоненты  ${}^m d_{c2}^a$  в новой сети получим по формуле:

$${}^m d_{c2}^a = Y^{2+}_c {}^m d^0_a = (Y^l_c + DY_c) {}^m d^0_a = {}^m d_{c1}^a + D^m d_{c1}^a. \quad (3.145)$$

Здесь появляются дополнительные компоненты вектора  $D^m d_{c1}^a$ , обусловленные введением связей в сети, которые заданы матрицей  $DC$ . Эти дополнительные компоненты изменяют компоненты старой сети  ${}^m d_{c1}^a$  в компоненты новой сети  ${}^m d_{c2}^a$ . При этом все эти компоненты получаются из заданных в свободных ветвях ковариантных компонент  ${}^m d^0_a$  с помощью *матриц изменения*, подобных метрическим:

$$\begin{aligned} {}^m d_{c2}^a &= Y^{2+}_c {}^m d^0_a; \\ {}^m d_{c1}^a &= Y^l_c {}^m d^0_a; \\ D^m d_{c1}^a &= DY_c {}^m d^0_a. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Такие матрицы изменения преобразуют ковариантные компоненты в контравариантные компоненты. Первая матрица преобразует ковариантные компоненты свободных ветвей в контравариантные компоненты новой сети. Вторая матрица преобразует ковариантные компоненты свободных ветвей в контравариантные компоненты старой сети. Третья матрица преобразует ковариантные компоненты вектора, заданные для свободных ветвей, в такие контравариантные компоненты, которые изменяют контравариантные компоненты старой сети в контравариантные компоненты новой сети. Однако такие преобразования происходят в сетях с разной структурой. Для таких сетей размерность подпространств замкнутых и разомкнутых путей может оказаться различной.

Если метрики нет (т.е.  $Z = Y = I$ ), то матрица  $Y^{2+}_c$  в соотношении (3.144) имеет более простой вид:

$$Y^{2+}_c = Y^l_c + (I - Y^l_c) DC_t [DC (I - Y^l_c) DC_t]^{-1} DC (I - Y^l_c), \quad (3.147)$$

где теперь  $Y^l_c = {}^m C_{1t} ({}^m C_{1t} {}^m C_{1t})^{-1} {}^m C_{1t}$ . *Это выражение представляет чисто структурные свойства сетей.* Отсюда также видно, что метрические отношения при изменении структуры основаны на свойствах инварианта двойственных сетей.



Поскольку при уменьшении числа узлов растет число контуров, то для вектора  ${}^m\mathbf{d}$  растет число переменных, следовательно, растет число уравнений, и задача вроде бы становится избыточной. Но это только на первый взгляд. В *двух* двойственных сетях, число переменных каждого типа всегда постоянно, следовательно, в двойственной  $\alpha$  сети число контуров уменьшается, как и число переменных для вектора  ${}^m\mathbf{d}$ , поэтому общее метрическое соотношение, данное в (3.18) или (3.19) остается инвариантным. Также остается постоянным квадрат величины вектора в двух двойственных сетях. Эти свойства двойственной инвариантности лишают проблему расчета сетей, как избыточности, так и вырождения.

Получение матрицы решения новой сети  $Z_c^{2+}$  при введении соединений для вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , заданного в разомкнутых путях, обеспечат двойственные соотношения из (3.17). Для этого, например, подставим в (3.17) значение  $Y_c^{2+}$  из (3.144), преобразуем и получим матрицу решения для подпространства разомкнутых путей сети:

$$\begin{aligned} Z_c^{2+} &= Z - Z Y_c^{2+} Z = Z - Z (Y_c^1 + D Y_c^1) Z = Z - Z Y_c^1 Z - Z D Y_c^1 Z = \\ &= Z_c^1 - Z (I - Y_c^1 Z) D C_t [D C Z (I - Y_c^1 Z) D C_t]^{-1} D C (I - Z Y_c^1 Z). \end{aligned}$$

Выражения слева и справа от квадратных скобок, а также в самих квадратных скобках, можно записать через матрицу решения  $Z_c^1$  для вектора  ${}^j\mathbf{d}$  в старой сети из (3.17), что позволяет сделать запись короче:  $Z_c^1 = Z (I - Y_c^1 Z)$ . Отсюда следует, что:

$$Z_c^{2+} = Z_c^1 - Z_c^1 \Delta C_t (\Delta C Z_c^1 \Delta C_t)^{-1} \Delta C Z_c^1, \quad (3.148)$$

т.е. матрица решения новой сети  $Z_c^{2+}$  выражается через матрицу решения старой сети  $Z_c^1$  и матрицу изменения путей  $DC$ . *Эта формула описывает изменения в заданной сети при наложении связей – для разомкнутых путей.*

Формулу (3.148) также представим как формулу (3.144): в виде суммы матрицы решения  $Z_c^1$  и матрицы изменения решения  $DZ_c = Z D Y_c Z$ , причем  $DY_c$  здесь *остается той же самой*:

$$Z_c^{2+} = Z_c^1 - Z D Y_c Z = Z_c^1 - DZ_c. \quad (3.149)$$

Это формула аналогична (3.17) и представляет в терминах метрических матриц те же преобразования геометрических параметров сети. По сравнению с (3.144), где знак «плюс» показывает, что метрические параметры *увеличиваются* с ростом числа переменных (контуров), здесь знак «минус» показывает двойственное *уменьшение* этих параметров с уменьшением числа разомкнутых путей.

Итак, получили выражение матрицы решения для вектора  ${}^j\mathbf{d}$  в новой сети  $Z_c^{2+}$  по его матрице решения в старой сети  $Z_c^1$  и матрице изменений  $\Delta C$ . Эта матрица изменений одинакова и для вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , и для вектора  ${}^m\mathbf{d}$  при изменении структуры сети, вызванном уменьшением числа узлов, т.е. введением новых соединений между ветвями, наложением связей на сеть.

Выражение (3.148) проще, чем (3.144), но по числу умножений и обращений матриц они одинаковы. Разница состоит в размерности матрицы решения старой сети. В одной формуле она равна числу контуров, а в другой – числу разомкнутых путей. Это позволяет выбирать такой вариант расчета сети, который содержит меньшее число переменных, а, следовательно, экономнее по объему вычислений.

- Например, если контуров значительно меньше, чем  $j$ -путей, то легче получить матрицу решения  $Y_c^1$ , а уже по ней найти  $Z_c^1$  с помощью (3.17).
- Если, наоборот, разомкнутых путей много меньше, чем контуров, то легче сначала получить матрицу решения  $Z_c^1$ , а уже затем по ней найти  $Y_c^1$  с помощью инварианта двойственности сетей.

Полученные в данном разделе формулы показывают, что при наложении связей метрические матрицы – матрицы решений старой сети  $Y_c^1$  (для подпространства замкнутых путей сети) или  $Z_c^1$  (для подпространства разомкнутых путей), преобразуются с помощью матриц изменяемых путей в матрицы решений новой сети – соответственно, в матрицы  $Y_c^{2+}$  и  $Z_c^{2+}$ . Эти матрицы изменения определяются матрицей  $DC$ . Полученные формулы представляют структурные и метрические свойства самих двойственных сетей. Они определяют свойства наложенных на сеть векторов, их воздействий и откликов.

### 3.3.3. Матрицы решения при разрывании связей

При разрывании связей количество независимых замкнутых путей в заданной сети уменьшается, а количество разомкнутых путей соответственно возрастает. В двойственной сети все происходит наоборот, т.е. разрыванию связей соответствует наложение связей.

Казалось бы, что самый простой путь получить матрицы решения при разрывании связей – это получить исходную матрицу  $Y_c^1$  прямо по формуле (3.144), или  $Z_c^1$  по формуле (3.149), например:

$$Y_c^1 = Y_c^{2+} - DY_c, \text{ или}$$

$$Z_c^1 = Z_c^{2+} + Z DY_c Z = Z_c^{2+} + DZ_c$$

Однако это невозможно, поскольку сама искомая в таком случае матрица решения  $Y_c^1$  входит в матрицу изменения решения  $DY_c$ . Точно также и матрица решения  $Z_c^1$  входит в матрицу изменения решения  $DZ_c$ . Поэтому нельзя использовать формулы соединения для получения формул разъединения, т.е. матриц решения при разрывании связей в сети. Однако можно использовать тот же способ решения этой задачи, поскольку *разрыванию связей в данной сети соответствует соединение узлов в двойственной сети*. Записав формулы расчета для соединений в двойственной сети, двойственными преобразованиями перейдем к формулам разъединения в заданной сети. И, наоборот, по формулам соединений в данной

сети с помощью двойственных преобразований перейдем к формулам разъединения в двойственной сети.

Итак, при разрывании связей (разъединении узлов), в сети уменьшается число контуров и на столько же возрастает число разомкнутых путей. Для вектора  $^j\mathbf{d}$  в данной сети (или вектора  $^m\mathbf{d}$  в двойственной сети) возрастает число переменных и, в соответствии с (3.136), в матрице преобразования появляется подматрица  $\underline{DC} = \underline{DA}$ , которая описывает пути, измененные при разрывании связей.

Для получения матрицы решения новой сети по матрице решения старой сети  $Y_c^1$  и матрице изменений (типа  $\Delta Y_c$ ) при разрывании связей можно действовать как в предыдущем разделе: получим двойственный аналог матрицы (3.142), затем аналог обратной к ней матрицы типа (3.143), откуда получим формулу пересчета матрицы решения типа (3.144). Однако проще использовать двойственные соотношения (3.16 – 3.19); они приводят к тем же результатам.

Итак, поскольку *разъединению* в данной сети соответствует *соединение* в двойственной сети, то все рассуждения предыдущего раздела о перерасчете матриц решения и компонент вектора повторим здесь полностью, но подчеркивая все буквы. Таким образом, заменяем все величины, соответствующие данной сети, на величины, соответствующие двойственной сети. Для перехода к заданной сети необходимо затем воспользоваться следующими формулами:

- (3.19) – согласно которой матрица решения для замкнутых путей заданной сети равна матрице решения для разомкнутых путей двойственной сети, т.е.  $Y_c = \underline{Z}_c$ .
- (3.18) – согласно которой матрица решения для разомкнутых путей заданной сети равна матрице решения для замкнутых путей двойственной сети, т.е.  $Z_c = \underline{Y}_c$ .

Итак, запишем формулу (3.144) для замкнутых путей в двойственной сети, заменяя путем подчеркивания все величины на двойственные величины:

$$\begin{aligned} \underline{Y}^{2+}_c &= \underline{Y}^1_c + \underline{D}\underline{Y}_c = & (3.150) \\ &= \underline{Y}^1_c + (\underline{I} - \underline{Y}^1_c \underline{Z}) \underline{DC} [\underline{DC} \underline{Z} (\underline{I} - \underline{Y}^1_c \underline{Z}) \underline{DC}]^{-1} \underline{DC} (\underline{I} - \underline{Z} \underline{Y}^1_c). \end{aligned}$$

Эта формула описывает изменения в двойственной сети при наложении связей – для замкнутых путей.

В соотношении (3.150) можно использовать соответствие двойственных величин метрических матриц и матриц преобразования в заданной сети и двойственной сети:  $\underline{Z} = \underline{Y}$ ,  $\underline{Y}^1_c = \underline{Z}^1_c$ ,  $\underline{C} = \underline{A}$ ,  $\underline{DC} = \underline{DA}$ . Матрице решения  $\underline{Y}^{2+}_c$  в двойственной сети соответствует матрица решения  $\underline{Z}^{2-}_c$  в данной сети из (3.18):  $\underline{Z}^{2-}_c = \underline{Y}^{2+}_c$ , поскольку они относятся к одной структуре ветвей. Тогда, подставляя в (3.150) двойственные величины, получим формулу расчета матрицы решения для разомкнутых путей при разрывании связей в сети:

$$\begin{aligned} Z_c^{2-} &= Z_c^1 + D\underline{Y}_c = \\ &= Z_c^1 + (I - Z_c^1 Y) DA_t [DA Y (I - Z_c^1 Y) DA_t]^{-1} DA (I - Y Z_c^1). \end{aligned} \quad (3.151)$$

Здесь новая матрица решения  $Z_c^{2-}$  при разрывании связей выражена через старую матрицу решения  $Z_c^1$  и ортогональную матрицу изменения путей  $DA$ . Это *разрывание* связей есть обратное преобразование структуры по отношению к *введению, наложению* связей, для которого расчет матрицы изменения решения разомкнутых путей был представлен формулой (3.148). Знак «плюс» показывает, что метрические параметры здесь увеличиваются, поскольку увеличивается число переменных – разомкнутых путей, в то время как в (3.148) их количество уменьшалось. *Эта формула описывает изменения в заданной сети при разрывании связей – для разомкнутых путей.*

Точно также запишем (3.148) для разомкнутых путей в двойственной сети, заменяя все величины на двойственные подчеркиванием букв. Получим:

$$\underline{Z}_c^{2+} = \underline{Z}_c^1 - \underline{Z}_c^1 \underline{DC}_t (\underline{DC} \underline{Z}_c^1 \underline{DC}_t)^{-1} \underline{DC} \underline{Z}_c^1 = \underline{Z}_c^1 - \underline{DZ}_c. \quad (3.152)$$

*Эта формула описывает изменения в двойственной сети при наложении связей – для разомкнутых путей.*

Здесь используется такое же соответствие величин в заданной сети и двойственной сети:  $\underline{Z} = Y$ ,  $\underline{Y}_c^1 = Z_c^1$ ,  $\underline{C} = A$ ,  $\underline{DC} = DA$ , а матрица решения новой сети  $\underline{Z}_c^{2+}$  выражается через  $\underline{Z}_c^1$  старой сети и матрицу изменений путей  $\underline{DC}$ . Матрице  $\underline{Z}_c^{2+}$  в двойственной сети соответствует  $Y_c^{2-}$  в данной сети по формуле (3.19):  $Y_c^{2-} = \underline{Z}_c^{2+}$ , поскольку они относятся к одной и той же структуре ветвей. Тогда, подставляя двойственные величины, получим формулу для вычисления матрицы решения замкнутых путей при разрывании связей в сети:

$$Y_c^{2-} = Y_c^1 - Y_c^1 DA_t (DA Y_c^1 DA_t)^{-1} DA Y_c^1. \quad (3.153)$$

Эту формулу также представим как в (3.149): в виде разности матрицы решения старой сети  $Y_c^1$  и матрицы изменений решения  $DZ_c$ , которая здесь *точно такая же*, как и в (3.151):

$$Y_c^{2-} = Y_c^1 - DZ_c = Y_c^1 - \underline{Z} D\underline{Y}_c \underline{Z} = Y_c^1 - Y D\underline{Y}_c Y. \quad (3.154)$$

*Эта формула описывает изменения в заданной сети при разрывании связей – для замкнутых путей.* Формулы (3.153) и (3.154) описывают обратное преобразование структуры сети – разрывание, заданное ортогональной матрицей  $DA$ , в отличие от соединений, которые и даны в (3.149). Знак «минус» показывает, что метрические параметры сети для замкнутых путей уменьшаются (не увеличиваются) при разъединении части узлов, что уменьшает число контуров.

Таким образом, всего 8 формул описывают все изменения структуры в двойственных сетях – 4 для заданной сети и 4 – для двойственной сети. Из этих 4 формул две – при

наложении связей и две – при разрывании связей. Из каждой двух – одна для замкнутых путей, другая – для разомкнутых путей.

Изменения в структуре *заданной сети* описывают формулы:

- *при наложении связей*, уменьшении числа узлов
  - (3.144) – для замкнутых путей, матрица решения  $Y_c^{2+}$
  - (3.148) – для разомкнутых путей, матрица решения  $Z_c^{2+}$ .
- *при разрывании связей*, увеличении числа узлов
  - (3.151) – для разомкнутых путей, матрица решения  $Z_c^{2-}$
  - (3.154) – для замкнутых путей, матрица решения  $Y_c^{2-}$ .

Изменения в структуре *двойственной сети* описывают формулы:

- *при наложении связей*, уменьшении числа узлов
  - (3.150) – для замкнутых путей, матрица решения  $\underline{Y}_c^{2+}$
  - (3.152) – для разомкнутых путей, матрица решения  $\underline{Z}_c^{2+}$ .
- *при разрывании связей*, увеличении числа узлов
  - – для замкнутых путей, матрица решения  $\underline{Y}_c^{2-} = \underline{Y}_c^1 - DZ_c$
  - – для разомкнутых путей, матрица решения  $\underline{Z}_c^{2-} = \underline{Z}_c^1 + DY_c = \underline{Z}_c^1 + \underline{Z} DZ_c \underline{Z}$ .

Таким образом, и в этом случае получим формулы расчета двойственной сети, аналогичные формулам для заданной сети при уменьшении числа узлов с соответствующими двойственными заменами.

Каждая из восьми представленных выше формул расчета сети при изменении структуры содержит в себе, или представляет собой, алгоритм расчета, который реализуем программами для вычислительной техники. Ниже будут рассмотрены возможности и особенности применения вычислительной техники с параллельной архитектурой для расчета по частям сетей и представленных ими сетевых моделей сложных систем.

Эти формулы полностью описывают преобразования матриц решения (*а также компонент векторов потока энергии*), при изменении числа узлов в связанной сети, изменении числа замкнутых и разомкнутых путей.

Формулы расчета при связывании свободных ветвей в сеть, рассмотренные в разделе 3.1, являются частными случаями общих формул расчета сетей при изменении структуры. Они получаются тогда, когда матрица изменений исчезает. То есть, когда число узлов не меняется, и количество замкнутых путей и разомкнутых путей остается прежним. Например, формула (3.144) при  $DC = 0$ , т.е. при постоянном числе контуров,  $\Delta m = 0$ , превращается в тождество  $Y_c^1 = Y_c^1$ , поскольку  $DC$  входит сомножителем в произведение матриц, а ее равенство нулю означает, что в этой матрице нет ни одной строки, т.е. ее просто нет.

Формулы изменения (преобразования) матриц решения при уменьшении и увеличении числа узлов в сети для расчета, как данной сети, так и двойственной сети, представлены в Таблице 3.3. В этой таблице представлены все возможные варианты расчета процессов в сетях с переменной структурой при изменении связей между ветвями (элементами) сети.

Таблица 3.3.

### Формулы расчета матриц решения при изменении структуры сети

ДАННАЯ СЕТЬ		ДВОЙСТВЕННАЯ СЕТЬ	
Уменьшение числа узлов (наложение связей)		Увеличение числа узлов (разрывание связей)	
<b>Для замкнутых путей</b>			
Матрица решения при увеличении числа контуров	$Y_c^{2+} = Y_c^1 + DY_c$	$\underline{Y}_c^{2-} = \underline{Y}_c^1 - DZ_c$	Матрица решения при уменьшении числа контуров
<b>Для разомкнутых путей</b>			
Матрица решения при уменьшении числа j-путей	$Z_c^{2+} = Z_c^1 - DZ_c =$ $= Z_c^1 - Z DY_c Z$	$\underline{Z}_c^{2-} = \underline{Z}_c^1 + DY_c =$ $= \underline{Z}_c^1 + \underline{Z} DZ_c \underline{Z}$	Матрица решения при увеличении числа j-путей
Увеличение числа узлов (разрывание связей)		Уменьшение числа узлов (наложение связей)	
<b>Для замкнутых путей</b>			
Матрица решения при уменьшении числа контуров	$Y_c^{2-} = Y_c^1 - DZ_c =$ $= Y_c^1 - Y DY_c Y$	$\underline{Y}_c^{2+} = \underline{Y}_c^1 + DY_c$	Матрица решения при увеличении числа контуров
<b>Для разомкнутых путей</b>			
Матрица решения при увеличении числа j-путей	$Z_c^{2-} = Z_c^1 + DY_c =$ $= Z_c^1 + Y DZ_c Y$	$\underline{Z}_c^{2+} = \underline{Z}_c^1 - DZ_c =$ $= \underline{Z}_c^1 - \underline{Z} DY_c \underline{Z}$	Матрица решения при уменьшении числа j-путей

Матрицы изменения решений в каждом случае обладают симметричной двойственностью и представлены в соотношениях (3.155–3.158).

$$DY_c = Y DZ_c Y = (I - Y^1_c Z) DC_i [DC Z (I - Y^1_c Z) DC_i]^{-1} DC (I - Z Y^1_c), \quad (3.155)$$

$$DZ_c = Z DY_c Z = Z_c^1 DC_i (DC Z_c^1 DC_i)^{-1} DC Z_c^1. \quad (3.156)$$

$$DY_c = \underline{Y} DZ_c \underline{Y} = \quad (3.157)$$

$$= (I - \underline{Y}^1_c \underline{Z}) \underline{DC}_i [\underline{DC} \underline{Z} (I - \underline{Y}^1_c \underline{Z}) \underline{DC}_i]^{-1} \underline{DC} (I - \underline{Z} \underline{Y}^1_c) =$$

$$= (I - Z^1_c Y) DA_i [DA Y (I - Z^1_c Y) DA_i]^{-1} DA (I - Y Z^1_c),$$

$$DZ_c = Y DY_c Y = \underline{Z}_c^1 \underline{DC}_i (\underline{DC} \underline{Z}_c^1 \underline{DC}_i)^{-1} \underline{DC} \underline{Z}_c^1 = \quad (3.158)$$

$$= Y_c^l DA_t (DA Y_c^l DA_t)^{-1} DA Y_c^l.$$

Покажем также, что изменения структуры в пределах одной сети (и соответствующие изменения в двойственной сети) подчиняются всем тем закономерностям преобразований путей и наложенных векторов, которые были рассмотрены в главе 2. А именно, покажем что:

1. сумма компонент отклика по каждой ветви в двойственных сетях для любого вектора остается постоянной при изменениях соединения ветвей; в том числе, при таких изменениях, при которых изменяется количество узлов;
2. сумма квадратов величины вектора в данной сети и двойственной сети остается постоянной при изменении структуры;
3. если в сети часть узлов друг с другом соединены, а потом те же самые узлы разъединены, то матрица решения возвращается в исходное состояние, а также и при обратном преобразовании, т.е., при разъединении узлов с последующим соединением.

Это последнее свойство особенно важно, поскольку подтвердит групповые свойства преобразований структуры в сети, которые использовались, например, для получения ковариантных компонент вектора в связанной сети по его контравариантным компонентам в свободных ветвях. В обычной геометрии для этого умножают на квадратные матрицы преобразования, образующие группу, поскольку размерности пространств не меняются в процессе преобразований. Здесь же, как показано выше, прямое и обратное преобразование структур, (например, соединение и разъединение), *происходят по разным путям* и с использованием разных матриц преобразования. Покажем, что, несмотря на это, разъединение сделанных соединений *приводит к исходному результату*.

1. Постоянство суммы компонент вектора в двойственных сетях выражается соотношением (3.24), откуда следует, что контравариантные компоненты вектора  ${}^m d$  в *новых* двойственных сетях можно представить в следующем виде:

$${}^m d_c^a + {}^m \underline{d}_c^a = (Y_c^{2+} + Y Z_c^{2+} Y) {}^m d_a^0 = Y_{c0} {}^m d_a^0 = {}^m d_0^a, \quad (3.159)$$

причем не имеет значения, получены ли новые матрицы решения расчетом матриц решения старой сети, или расчетом новой сети заново. Подставим теперь сюда выражения этих матриц через  $Y_c^l$  и  $Z_c^l$ , а также матрицу изменений  $DY_c$  по формулам (3.144) и (3.148), получим:

$${}^m d_c^a + {}^m \underline{d}_c^a = (Y_c^l + DY_c + Y Z_c^l Y - Y Z DY_c Z Y) {}^m d_a^0 = (Y_c^l + Y Z_c^l Y) {}^m d_a^0. \quad (3.160)$$

Сравнивая (3.159) и (3.160) можно видеть, что при изменении структуры сумма компонент вектора по каждой ветви в двух сетях остается постоянной. Эта сумма равна тому значению компоненты вектора, которое она имела в свободной ветви. Компоненты вектора в этой сумме равны тем, которые были бы получены при расчете новой сети с самого начала.

Это происходит потому, что сами формулы перерасчета выведены из матрицы решения новой сети, представленной в (3.140).

2. Постоянство квадратов величины следует отсюда непосредственно, поскольку получается умножением суммы контравариантных компонент в (3.160) на заданные в каждой ветви ковариантные компоненты  ${}^m d_a^0$  и суммированием затем по всем ветвям.

3. Покажем, что разъединение сделанных соединений приводит к матрице решений исходной сети. Для этого подставим в формулу, например, (3.151) матрицы решения при разрывании связей,  $Z_c^{2-}$ , вместо матрицы решения исходной сети  $Z_{c0}^1$  – матрицу решения, полученную при наложении связей, т.е.  $Z_{c0}^1 = Z_c^{2+}$ . Получим исходную матрицу решения старой сети  $Z_c^1$ . В соответствии с Таблицей 3.3 имеем:

$$\begin{aligned} Z_c^{2-} &= Z_{c0}^1 + DY_c = Z_c^{2+} + DY_c = \\ &= Z_c^{2+} + (I - Z_c^{2+} Y) DA_t (DA Y_c^{2+} DA_t)^{-1} DA (I - Y Z_c^{2+}). \end{aligned} \quad (3.161)$$

Подставим сюда из Таблицы 3.3 выражения для матриц решения при введении соединений  $Z_c^{2+}$  и  $Y_c^{2+}$ , и преобразуем полученные выражения с учетом ортогональности матриц преобразования. Тогда получим:

$$Z_c^{2-} = Z_c^1 - Z (DY_c - Y_c^{2+} DA_t (DA Y_c^{2+} DA_t)^{-1} DA Y_c^{2+}) Z,$$

и, таким образом, задача сводится к тому, чтобы показать равенство в круглых скобках двух выражений:

$$DY_c = Y_c^{2+} DA_t (DA Y_c^{2+} DA_t)^{-1} DA Y_c^{2+}. \quad (3.162)$$

Преобразование правой части (3.162) в левую часть использует два равенства, основанных на ортогональности матриц преобразования:  $DC DA_t = I$ , а также  ${}^m C^l DA_t = 0$ . Например, левое произведение в правой части имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_c^{2+} DA_t &= Y_c^1 DA_t + DY_c DA_t = {}^m C_t^l ({}^m C^l Z {}^m C_t^l)^{-1} \underline{{}^m C^l DA_t} + \\ &+ (I - Y_c^1 Z) DC_t (DC Z_c^1 DC_t)^{-1} DC (DA_t - Z {}^m C_t^l ({}^m C^l Z {}^m C_t^l)^{-1} \underline{{}^m C^l DA_t}). \end{aligned}$$

В силу указанных равенств, слагаемые, включающие подчеркнутые выражения, равны нулю. Производя дальнейшие подстановки и преобразования, получаем равенство (3.162), а, следовательно, и (3.161).

Это доказывает, что *при изменении структуры сети формулы пересчета обладают групповыми свойствами, которые обеспечивают обратные преобразования* – то есть, разъединения после сделанных соединений приводят к матрице решения исходной сети. В силу двойственности можно сказать, что восстановление *соединения* после сделанного *разъединения* также приводит к матрице решения исходной сети.

Итак, для матриц решения замкнутых путей (для вектора  ${}^m \mathbf{d}$ , заданного в контурах), каждому преобразованию соединения соответствует разъединение, и наоборот. Такие же, но двойственные рассуждения можно выполнить и для вектора  ${}^j \mathbf{d}$ , заданного в разомкнутых



путях. Это подтверждает групповой характер операторов матриц преобразования, составляющих матрицы решения и матрицы расчета компонент векторов потока энергии. Эти преобразования обеспечивают расчеты изменения процессов при произвольных изменениях структуры, в том числе связанных с изменением числа узлов, когда меняются размерности подпространств замкнутых и разомкнутых путей.

### 3.3.4. Эффективность вычислений при изменении структуры

Рассмотрим условия, при которых целесообразно прибегать к пересчету матриц решения и компонент векторов потока, а не производить вычисления заново. Кроме того, рассмотрим последовательность этапов, составляющих алгоритм пересчета, как матриц решения, так и компонент векторов потока при таких вычислениях.

В квадратных скобках формулы (3.144) обращается матрица порядка ( $Dm \times Dm$ ). Порядок этой матрицы пропорционален числу соединенных узлов, новых контуров в сети, т.е. пропорционален произведенным изменениям в структуре. При небольших изменениях структуры эта матрица невелика и ее обращение займет меньше времени, чем получение уравнений и расчет матрицы решения другими методами. Матрица решения новой сети здесь получается без использования ее собственной матрицы преобразования  ${}^m C_2$  от свободных ветвей к связанным. Формула (3.144) заменяет расчет матрицы решения новой сети  $Y_c^{2+}$ , по (3.140), которая хотя внешне и проще формулы пересчета, но содержит обращение матрицы порядка ( $m_2 \times m_2$ ), при этом число контуров в новой сети,  $m_2$ , обычно бывает значительно больше числа изменяемых путей  $Dm$ .

Из сопоставления  $Dm$  и  $m_2$  можно оценить размеры сети и масштабы изменений, при которых пересчет старого решения лучше, чем расчет сети заново. Обращение матрицы общего вида имеет (на последовательной машине) сложность того же порядка, что и задача решения линейной системы (при выполнении естественных условий на скорость роста сложности обеих задач с увеличением их порядка). Размерность, порядок задачи здесь обозначим через  $n$ . Эта сложность не превышает  $n$  в степени  $\log_2 7$ , т.е. примерно  $n^{2,808}$  или (округленно) кубической степени числа переменных (уравнений) (Ахо, 1979).

Вообще говоря, решение задачи сети в любом базисе и при любой структуре связей ветвей представляет собой решение системы линейных уравнений. Обращение матрицы, как известно, в этом случае обычно проигрывает и в арифметической работе, и в численной устойчивости по сравнению с прямым решением линейной системы (Мат. Энциклоп., т.3, стб. 1138), хотя, как сказано выше, по сложности эти задачи сопоставимы. Обращение имеет смысл в тех случаях, когда полученная в результате матрица используется многократно, как, например, матрицы решений. Вместе с тем расчет изменения решения по формуле (3.144)

также можно выполнять как решение системы линейных уравнений во всех тех случаях, где это эффективнее, чем обращение матрицы в  $DY_c$ .

Кроме того, обращение матриц оправдано при многократном решении линейных систем с одной и той же матрицей общего вида на ЭВМ с параллельной архитектурой, т.е. с большим числом параллельно работающих процессоров. Это связано с тем, что прямые методы решения линейных систем не столь удобны для распараллеливания, как умножение матрицы на вектор. Расчет *сетей по частям* позволяет рассчитывать линейные сетевые системы параллельно с большой экономией объема вычислений (и времени), за счет использования их структурных свойств. Это показано в следующем разделе.

**Алгоритм расчета изменения решения сети.** Несмотря на внешнюю сложность, полученная формула (3.144) достаточно проста и состоит из ряда перемножений нескольких матриц, часть которых уже известна. Этапы построения алгоритма производятся в соответствии с этапами расчета сети, которые были рассмотрены в разделе 3.1.4.

Сначала рассмотрим алгоритм построения матрицы изменения решения, которая обеспечивает преобразование матрицы решения в старой сети в матрицу решения в новой сети по формуле (3.144), т.е. при наложении связей, для замкнутых путей.

1.  $Y_c^l$  – матрица решения старой сети уже известна;
2.  $Z Y_c^l = Y_c^l Z$  – матрицы  $Z$  и  $Y_c^l$  симметричны, поэтому достаточно вычислить их произведение один раз;
3.  $I - Z Y_c^l = I - Y_c^l Z = Y Z_c^l$  – этот основной «блок» матриц в (3.144) в силу симметрии также вычисляется только один раз и представляет собой фактически преобразование к двойственной сети в соответствии с (3.16) или (3.17);
4.  $DC (I - Z Y_c^l) = ((I - Y_c^l Z) DC_t)_t$  – можно видеть, что эта матрица появляется в (3.144) трижды, но вычисляется однажды;
5.  $Z - Z Y_c^l Z = Z_c^l$  – это просто матрица решения двойственной сети в (3.17), вычисляемая без новых обращений матриц;
6.  $DZ_c = DC Z_c^l DC_t = DC (Z - Z Y_c^l Z) DC_t$  – это преобразование матрицы решения двойственной сети к изменяемым путям. Данное преобразование сохраняет только ту часть метрики этой сети, которая относится к изменениям в структуре; именно это преобразование, связанное с двойственной сетью, позволяет по старому решению получить новое, не производя всех вычислений с самого начала;
7.  $DC (DZ_c)^{-1} DC_t = DC_t (DC (Z - Z Y_c^l Z) DC_t)^{-1} DC$  – это фактически распространение изменений метрики в измененных путях на все ветви, составляющие данную сеть и получение аналога матрицы изменения решений. Каждый элемент этой матрицы показывает, на сколько надо изменить такой же элемент прежней матрицы решений,

чтобы получить элемент новой матрицы решений. На самом деле матрица  $(\Delta Z_c)^{-1}$  умножается слева и справа на матрицы, вычисленные в пункте 4, что дает матрицу:

8.  $DY_c = (I - Y_c^l Z) DC_t (DC (Z - Z Y_c^l Z) DC_t)^{-1} DC (I - Z Y_c^l)$  – это и есть матрица изменения решения. Она одного порядка с матрицами решения старой  $Y_c^l$  и новой  $Y_c^{2+}$  сетей, поэтому преобразует одну в другую в соответствии с (3.144).

Теперь можно сравнить объемы вычислений при полном расчете матрицы решения в новой сети  $Y_c^{2+}$  и при расчете матрицы изменения решения  $DY_c^l$ . Тогда определим, при каких условиях становится выгоднее пересчитать решение из уже полученного ранее решения для другой структуры, чем получить его заново. Для этого обозначим время обращения матрицы с числом переменных  $m_1$  как  $t_1$ , а матрицы с числом переменных  $m_1 + Dm$  как  $t_2$ . Время обращения матриц пропорционально кубу их порядка, тогда, взяв их отношение, получим:

$$t_2 = (1 + Dm/m_1)^3 t_1. \quad (3.163)$$

Расчет матрицы решения  $Y_c = {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C$ , состоит из четырех перемножений матриц и одного обращения. Время перемножения пропорционально порядку матрицы, т.е. количеству строк и столбцов. Если обозначить время умножения матриц  $(n \times n)$  как  $t_{nn}$ , то время умножения матриц  $(m \times n)$  или  $(n \times m)$  обозначим как  $t_{mn}$  и это время примерно равно  $t_{mn} = (m/n) t_{nn}$ , а матриц  $(m \times n)$  и  $(m \times m)$  – соответственно, время умножения  $t_{mm} = (m/n)^2 t_{nn}$ . То есть, время умножения матриц пропорционально произведению порядков двух перемножаемых индексов и одного перемножаемого индекса:  $t(A_{nm} B^{mk}) @ (n \times m \times k)$ . Тогда получим время расчета для матрицы решения старой сети:

$$t_{01} = t_1 + 2(m_1/n) (1 + m_1/n) t_{nn}, \quad (3.164)$$

а для матрицы решения новой сети :

$$t_{02} = t_2 + 2(m_2/n) (1 + m_2/n) t_{nn} = t_{01} + Dt, \quad (3.165)$$

где  $Dt = (3k + 3k^2 + k^3) t_1 + 2(p + 2pm/n + p^2) t_{nn}$ , – т.е. это рост времени расчета при росте числа контуров, а  $m_2 = m_1 + Dm$ , и обозначено через  $k = Dm/m_1$ , а через  $p = Dm/n$ .

Фактически надо сравнить время расчета матрицы решения  $Y_c^{2+}$  новой сети  $t_{02}$  со временем расчета матрицы изменения решения  $DY_c^l$ , которое обозначим как  $t_{12}$ , поскольку операции сложения этих матриц ( $Y_c^{2+} = Y_c^l + DY_c^l$ ) занимают меньше времени, чем операции умножения и их влиянием на суммарное время расчета можно пренебречь. Для матрицы изменения  $DY_c$  из формулы (3.144) имеем в соответствии с этапами алгоритма расчета (1–8) следующее:

в пункте 2 умножаются матрицы  $(n \times n)$  и  $(n \times n)$  за время  $t_{nn}$ , затем

в пункте 4 – матрицы  $(Dm \times n)$  и  $(n \times n)$  за время  $p t_{nn}$ ,

в пункте 5 – снова умножение за  $t_{nn}$ ,

в пункте 6 – два умножения за время  $p t_{nn}$  и  $p^2 t_{nn}$ ,

в пункте 7 – обращение матрицы  $DZ_c$  за время  $k^3 t_l$ , и наконец,

в пункте 8 – снова два умножения за время  $p t_{nn}$  и  $p^2 t_{nn}$ , что в сумме составит:

$$t_{12} = (2 + 3p + 3p^2) t_{nn} + k^3 t_l. \quad (3.166)$$

Разность между временем расчета новой сети с изменением соединений заново и временем пересчета старого решения  $Dt_{12}$  по формуле (3.144) составит:

$$\begin{aligned} Dt_{12} &= t_{02} - t_{12} = t_{01} + Dt - t_{12} = \\ &= (3k + 3k^2 + 1) t_l + 2 (r + 4pr + r^2) t_{nn} - (2 + r + r^2) t_{nn}. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Здесь обозначено через  $r = m_l/n$ , а обозначения  $k$  и  $p$  имеют прежний смысл. Если эта разность больше нуля, то пересчет выгоден, если меньше нуля – то нет. Например, для сети из 10 ветвей, имеем  $n = 10$ , в которой было 4 контура,  $m_l = 4$ , при слиянии четырех узлов появятся еще 4 контура, т.е.  $Dm = 4$ , тогда:  $k = 1$ ,  $p = 0,4$ ,  $r = 0,4$  и разность имеет вид:

$$\begin{aligned} Dt_{12} &= (3 + 3 + 1) t_l + 2 (0,4 + 4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,16) t_{nn} - \\ &- (2 + 0,4 + 0,16) t_{nn} = 7 t_l + 2,4 t_{nn} - 2,56 t_{nn} = 7 t_l - 0,16 t_{nn}. \end{aligned}$$

Обращение матрицы (4 x 4) может составить  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$  умножений, это пропорционально  $t_l$ , а перемножение матриц порядка (10 x 10) –  $10^3$  умножений, т.е. 1000, тогда получим:

$$\Delta t_{12} = 7 \cdot 120 - 0,16 \cdot 1000 = 840 - 160 = + 680,$$

откуда следует, что в этом случае эффективнее пересчитать решение, обращая матрицу (4x4), чем рассчитать заново, обращая матрицу (8x8).

Для сетей на рис. 3.12, в которых ветвей  $n = 6$ ,  $m_l = 2$ ,  $Dm = 1$ , значения параметров имеем  $k = 0,5$ ,  $p = 1/6 = 0,167$ ,  $r = 2/6 = 0,333$ , эти времена составят:

$$\begin{aligned} Dt_{12} &= (3 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,5 + 1) t_l + 2 (0,33 + 4 \cdot 0,167 \cdot 0,33 + 0,11) t_{nn} - \\ &- (2 + 0,33 + 0,11) t_{nn} = 3,25 t_l + 1,323 t_{nn} - 2,44 t_{nn} = 3,25 t_l - 1,12 t_{nn}. \end{aligned}$$

Обращение матрицы (2 x 2) требует 6 умножений (а также деления), а перемножение матрицы (6 x 6) – 216 умножений, тогда получим, что

$$Dt_{12} = 3,25 \cdot 6 - 1,12 \cdot 216 \cong 20 - 242 = - 222.$$

Отсюда следует, что в этом случае гораздо проще сделать расчет заново, обращая матрицу (3x3), чем пересчитать решение, хотя для этого требуется обращать матрицу (1x1), т.е. просто число.

**Алгоритм расчета компонент вектора в сети с измененной структурой.** Для расчета изменения компонент  ${}^m d_{c1}^a$  в компоненты  ${}^m d_{c2}^a$  того же самого вектора  ${}^m \mathbf{d}$  при переходе к сети с новой структурой связей, заданных матрицей  $DC$ , необходимо выполнить те же 8 этапов. Совокупность этих этапов представляет собой алгоритм реализации данного метода

по формуле (3.145), но часть преобразований теперь станут умножениями матрицы на вектор, что требует меньше умножений, чем вычисление произведения матриц.

1.  ${}^m d_{cl}^a = Y_c^l {}^m d_a^0$  – контравариантные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в отдельных ветвях старой сети; они уже известны.
2.  ${}^m d^{cl}_a = Z {}^m d_{cl}^a = Z Y_c^l {}^m d_a^0$  – ковариантные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в отдельных ветвях старой сети, которые также могут быть известны.
3.  ${}^m \underline{d}_a^{cl} = {}^m d_a^0 - Z {}^m d_{cl}^a = (I - Z Y_c^l) {}^m d_a^0$  – ковариантные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в ветвях старой двойственной сети.
4.  $D^m \underline{d}_a = DC {}^m \underline{d}_a^{cl} = DC (I - Z Y_c^l) {}^m d_a^0$  – преобразование двойственных компонент к изменяемым путям в сети.

До сих пор мы умножали только матрицы на вектор. Далее надо вычислять в квадратных скобках матрицу импедансов изменяемых путей в двойственной сети в (3.144), что требует перемножения матриц; т.е. повторить этапы 5–7 расчета матрицы решений.

5.  $I - Y_c^l Z = Y Z_c^l = \underline{Z} \underline{Y}_c^l$  – в силу (3.18) и это представляет собой преобразование к двойственной сети в соответствии с (3.17);
6.  $Z (I - Y_c^l Z) = Z_c^l$  – это просто матрица решения двойственной сети в (3.17), которая получается без новых обращений матриц;
7.  $DZ_c = DC Z_c^l DC_t = DC (Z - Z Y_c^l Z) DC_t$  – это преобразование матрицы решения двойственной сети к изменяемым путям, которое «вырезает» только изменяемую часть в структуре сети. Таким образом, это преобразование метрической матрицы «учитывает» изменения, произведенные в структуре сети.
8.  $(DZ_c)^{-1}$  – получаем обратную метрическую матрицу изменений в двойственной сети. Далее снова следуют умножения матриц на вектор:
9.  $D^m \underline{d}^a = (DZ_c)^{-1} D^m \underline{d}_a$  – контравариантные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в изменяемых путях двойственной сети, т.е. та часть компонент  ${}^m \mathbf{d}$ , которая в результате изменения соединений должна оказаться в данной сети;
10.  $D^m \underline{d}_{cl}^a = DC_t D^m \underline{d}^a$  – преобразование компонент в изменяемых путях в компоненты в отдельных ветвях двойственной сети.
11.  $D^m d_{cl}^a = (I - Y_c^l Z) D^m \underline{d}_{cl}^a = Z_c^l D^m \underline{d}_{cl}^a$ . Здесь получаем преобразование компонент вектора, которое изменяет старое решение в новое решение.

Так получаем преобразование из двойственной сети в данную сеть. Это те значения, на которые надо изменить в каждой ветви заданной сети ранее полученное решение, чтобы получить из (3.145) решение для новой структуры без расчета сети заново. Умножение на вектор требует меньше вычислений, но матрицу решения, как в (3.144) не получим.

Для других вариантов расчета матриц решения новой сети по матрице решения старой сети, а также компонент заданных векторов для сети с измененной структурой, алгоритмы получаются аналогично, с надлежащей заменой всех величин на их двойственные аналоги.

### 3.3.5. Пример расчета матриц решения при изменении структуры

Рассмотрим расчет изменения матрицы решения и проведем его сравнение с прямым расчетом матрицы решения сети на примере сети на рис. 3.12. Положим метрические параметры ветвей единичными для простоты вычислений. Тогда матрицу решения  $Y_c^l$  сети на рис. 3.12.а можно вычислить по обычной формуле для замкнутых путей-контуров типа (3.140):  $Y_c^l = {}^m C_t^l ({}^m C^l {}^m C_t^l)^{-1} {}^m C^l$ , где матрица преобразования контуров состоит из первых двух строк матрицы  $C^l$  в соотношении (3.138). Эту матрицу получим за три шага.

1. Метрическая матрица связанной сети в этом случае получается как произведение матриц преобразования  ${}^m C^l$  и  ${}^m C_t^l$ , т.е.  ${}^m Z = {}^m C^l {}^m C_t^l$ . Таким образом:

$${}^m C^l {}^m C_t^l = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.168)$$

2. Обратная метрическая матрица связанной сети:

$$({}^m Z)^{-1} = ({}^m C^l {}^m C_t^l)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/11 \quad (3.169)$$

3. Матрицу решения для исходной сети получим умножением на  ${}^m C_t^l$  и  ${}^m C^l$ :

$$Y_c^l = {}^m C_t^l ({}^m C^l {}^m C_t^l)^{-1} {}^m C^l = \quad (3.170)$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & -1 \\ -1 & \\ -1 & \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/11 \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 4 & -1 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix} 1/11 = Y_c^l.$$

Аналогично получим матрицу решения  $Y_c^2$  новой сети на рис. 3.12.б, с которой затем сравним результат пересчета матрицы решения старой сети  $Y_c^1$ . Матрицу  $Y_c^2$  сети получим по той же формуле:  $Y_c^2 = {}^m C_t^2 ({}^m C^2 {}^m C_t^2)^{-1} {}^m C^2$ , где подматрица контуров состоит из первых трех строк  $C^2$  из (3.138). Эту матрицу также получим за три шага.

1.  ${}^m C^2 {}^m C_t^2 =$  (3.172)

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & & & 1 \\ 1 & & 1 & & & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \\ -1 & & \\ -1 & & \\ 1 & 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. Обратная матрица  $({}^m Z_2)^{-1} = ({}^m C^2 {}^m C_t^2)^{-1} =$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 5 \\ -4 & 5 & 11 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/13 \quad (3.173)$$

3. Матрица решения  $Y_c^2 = {}^m C_t^2 ({}^m C^2 {}^m C_t^2)^{-1} {}^m C^2 =$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \\ -1 & & \\ -1 & & \\ 1 & 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 5 \\ -4 & 5 & 11 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/13 \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & -1 \\ & 1 & -1 & & \\ 1 & & 1 & & \end{bmatrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 8 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/13 = Y_c^2 \quad (3.174)$$

Можно видеть, что матрицы решения этих сетей  $Y_c^1$  и  $Y_c^2$  различны, причем имеют разные знаменатели (обратные к определителям). Проведем расчет матрицы решения второй сети  $Y_c^2 = Y_c^{2+}$  по матрице решения первой сети  $Y_c^1$  и матрице изменений путей  $DC$ , которая состоит из строки 3 матрицы в (3.138):

$$DC = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ 3' & \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.175)$$

При этом используем формулу (3.147) пересчета решения в отсутствии метрики. В этой формуле трижды повторяется матрица  $(I - Y_c^1)$ , которая умножается на матрицу изменения

путей  $DC$  то справа, то слева. В силу симметрии самой матрицы  $Y^l_c$ , эти три произведения отличаются друг от друга только транспонированием, поэтому достаточно получить одно из этих произведений и перейти к расчету матрицы измененных импедансов путей двойственной сети в квадратных скобках. Это произведение соответствует этапу 4:

$$(I - Y^l_c) DC_t = \tag{3.176}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 4 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 7 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 8 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -3 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{11} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1 \\ \\ \\ \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{11}$$

Найдем матрицу импедансов измененных путей в двойственной сети  $DZ$ , которая равна  $DZ = DC (I - Y^l_c) DC_t =$

$$= 3' \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{11} \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = 3' \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 13 \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{11} \tag{3.177}$$

Обратная матрица к этой матрице очень проста  $(DZ)^{-1} = [DC (I - Y^l_c) DC_t]^{-1} =$

$$= 3' \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 11 \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{13} \tag{3.178}$$

Умножая, слева и справа на (3.176) получим матрицу изменений решения, выраженную через матрицу решения старой сети  $Y^l_c$  и матрицу изменяемых путей  $DC$ :

$DY_c = (I - Y^l_c) DC_t [DC (I - Y^l_c) DC_t]^{-1} DC (I - Y^l_c)$ , которая равна:

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{11} \cdot 3' \begin{matrix} & \begin{matrix} 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 11/13 \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 3' \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{11} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 49 & 35 & 42 & 28 & 28 & 7 \\ 35 & 25 & 30 & 20 & 20 & 5 \\ 42 & 30 & 36 & 24 & 24 & 6 \\ 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\ 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{143} = DY_c \tag{3.179}$$



Остается сложить матрицу решения старой сети  $Y^l_c$  и матрицу изменения решения  $\Delta Y_c$ . Это позволит выразить матрицу решения новой сети  $Y^{2+}_c$ , через матрицу решения старой сети и  $DC$ , т.е.  $Y^{2+}_c = Y^l_c + DY_c =$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 4 & -1 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{11} + \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 49 & 35 & 42 & 28 & 28 & 7 \\ 35 & 25 & 30 & 20 & 20 & 5 \\ 42 & 30 & 36 & 24 & 24 & 6 \\ 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\ 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{143} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 88 & 22 & 55 & -11 & -11 & 33 \\ 22 & 77 & -22 & 33 & 33 & 44 \\ 55 & -22 & 88 & 11 & 11 & -33 \\ -11 & 33 & 11 & 55 & 55 & -22 \\ -11 & 33 & 11 & 55 & 55 & -22 \\ 33 & 44 & -33 & -22 & -22 & 66 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{(11 \times 13)} = Y^{2+}_c \quad (3.180)$$

Можно видеть, что полученная матрица решения  $Y^{2+}_c$  полностью совпадает с той, которая была получена прямым расчетом в соотношении (3.174) для сети на рис. 3.12.б. Заметим, что все численные значения в этих вычислениях связаны только со структурными преобразованиями самих путей, поскольку не заданы метрические веса на ветвях или значения компонент каких-либо наложенных векторов. Таким образом, здесь рассмотрены чисто структурные свойства преобразования сети.

Рассмотрим теперь матрицу решения  $Y^{2+}_c$  сети на рис. 3.12.б, где сделаны разъединения узла А–В, которые превращают эту сеть в сеть на рис. 3.12.а. Сразу преобразовать эту матрицу в матрицу решения  $Y^l_c$  с помощью той же матрицы изменений  $DY_c$  нельзя, поскольку в нее сама входит ныне искомая матрица  $Y^l_c$ . Поэтому надо использовать формулу пересчета для разъединения ветвей. В случае матрицы решения для замкнутых путей такая формула для матрицы решения  $Y^{2+}_c$  дана соотношением (3.153), в которой матрица изменения путей  $DA$  представлена строкой 3 в матрице (3.139):

$$DA = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.181)$$

Роль матрицы решения  $Y^l_c$  теперь играет матрица решения  $Y^{2+}_c = Y^2_c$ . Как и в предыдущем примере, формула пересчета содержит три умножения матриц изменения путей на матрицу решения  $DA Y^2_c = (Y^2_c DA)_t$ . Все три таких «блока» матриц при вычислении приводят к одинаковому результату в силу симметрии матрицы  $Y^2_c$ , поэтому их можно

получить сразу с помощью одного (любого из трех) перемножения данных матриц, например:

$$Y_c^2 DA_t = \quad (3.182)$$

$$= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 8 & 2 & 5 & -1 & -1 & 3 \\ \hline 2 & 7 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 5 & -2 & 8 & 1 & 1 & -3 \\ \hline -1 & 3 & 1 & 5 & 5 & -2 \\ \hline -1 & 3 & 1 & 5 & 5 & -2 \\ \hline 3 & 4 & -3 & -2 & -2 & 6 \\ \hline \end{array} \frac{1}{13} = \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \frac{1}{13}$$

Полученная матрица совпадает, в данном случае, с (3.176) с точностью до знаменателя.

Найдем матрицу адмитансов измененных путей в  $\alpha$  сети  $DY_c$ , равную  $DY_c = DA Y_c^2 DA_t =$

$$= \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & & & \\ \hline \end{array} \frac{1}{13} = \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \frac{1}{13} \quad (3.183)$$

Обратная матрица к этой матрице получается просто

$$(DY_c)^{-1} = (DA Y_c^2 DA_t)^{-1} = \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 13/11 \\ \hline \end{array} \quad (3.184)$$

Умножим результат слева и справа на вектор из (3.182), в результате получим матрицу изменений решения  $DY_c = Y_c^2 DA_t (DA Y_c^2 DA_t)^{-1} DA Y_c^2$ , которая равна:

$$= \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \frac{1}{13} \quad \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 13/11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 5 & 6 & 4 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \frac{1}{13} =$$

$$= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 49 & 35 & 42 & 28 & 28 & 7 \\ \hline 35 & 25 & 30 & 20 & 20 & 5 \\ \hline 42 & 30 & 36 & 24 & 24 & 6 \\ \hline 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\ \hline 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\ \hline 7 & 5 & 6 & 4 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \frac{1}{(11 \times 13)} = \Delta Y_c \quad (3.185)$$

Остается вычесть  $DY_c$  из  $Y_c^2$  и получить матрицу решения старой сети  $Y_c^1$ , через матрицу новой  $Y_c^2$  и  $DA$ , т.е.  $Y_c^1 = Y_c^2 - DY_c =$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ = 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 8 & 2 & 5 & -1 & -1 & 3 \\
 \hline
 2 & 7 & -2 & 3 & 3 & 4 \\
 \hline
 5 & -2 & 8 & 1 & 1 & -3 \\
 \hline
 -1 & 3 & 1 & 5 & 5 & -2 \\
 \hline
 -1 & 3 & 1 & 5 & 5 & -2 \\
 \hline
 3 & 4 & -3 & -2 & -2 & 6 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \frac{1}{13}
 -
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 49 & 35 & 42 & 28 & 28 & 7 \\
 \hline
 35 & 25 & 30 & 20 & 20 & 5 \\
 \hline
 42 & 30 & 36 & 24 & 24 & 6 \\
 \hline
 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\
 \hline
 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\
 \hline
 7 & 5 & 6 & 4 & 4 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \frac{1}{143}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ = 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 3 & -1 & 1 & -3 & -3 & 2 \\
 \hline
 -1 & 4 & -4 & 1 & 1 & 3 \\
 \hline
 1 & -4 & 4 & -1 & -1 & -3 \\
 \hline
 -3 & 1 & -1 & 3 & 3 & -2 \\
 \hline
 -3 & 1 & -1 & 3 & 3 & -2 \\
 \hline
 2 & 3 & -3 & -2 & -2 & 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \frac{1}{11}
 = Y'_c \quad (3.186)$$

В силу простоты выбранного примера, все промежуточные матрицы оказались одинаковы, с точностью до знаменателей, хотя в более сложных примерах, особенно при наличии метрики, это совсем не так. Эти простые примеры показывают действие формул пересчета матриц решения при изменении структуры двойственных сетей, как при наложении связей, уменьшении числа узлов, так и при разрывании, увеличении узлов – в пределах связанной сети, представляющей собой одну подсеть. В следующем разделе рассмотрим преобразования, связанные с разделением сети на независимые подсети.

### 3.4. Расчеты сложной сети при разделении на подсети

Масштабы (количество элементов и связей между ними) современных технических, экономических, экономико-социальных систем весьма велики. Время расчета изменения их поведения при изменении внешних условий, перестройки внутренней структуры, изменении внешних и внутренних воздействий превышает потребности оперативного проектирования, управления, прогнозирования. Одним из путей повышения скорости расчета, а также аналитических возможностей математических сетевых моделей сложных систем является их разделение на части. Расчет отдельных подсистем (возможно применение вычислительных систем с параллельной архитектурой) позволяет ускорить процесс расчета и упростить процесс анализа результатов. Однако возникает проблема части и целого, когда поведение отдельных частей отличается от поведения тех же частей, соединенных в единое целое.

*Сетевые модели сложных систем позволяют применить тензорный метод двойственных сетей для решения проблемы части и целого.* Ветви, узлы, которые связывают подсистемы в единую сеть, составляют отдельную подсеть, подсистему. Это сеть соединений. Двойственная сеть к сети совокупности связей разделенных подсистем «запасает и запоминает» изменения, происходящие при разделении целого на части. Отклики в двойственной сети к сети соединений позволяют сразу восстановить взаимодействие подсистем при соединении результатов их расчета в решение целой сети.

Изменения структуры сети могут состоять в произвольной декомпозиции сети на подсети, соединении сети из подсетей, изменении соединений в связанной сети. В данном разделе рассматривается расчет связанной сети при таком изменении соединений, при котором меняется количество независимых подсетей. Наибольший интерес, в том числе практический, позволяющий применять вычислительную технику с параллельной архитектурой, представляют расчеты сети при ее разделении на независимые подсети, т.е. расчет по частям.

При организации параллельных вычислений разделенной на части сетевой модели предметной области возникает проблема расчета влияния связей между подсистемами. Расчет независимых частей, на которые разделена для анализа целая система, не учитывает тех взаимных связей, которые соединяли части в целом. В местах соединения возникают взаимные воздействия и потоки обмена. Эти взаимные потоки обмена собственно и являются тем общим, которое объединяет подсистемы в единое целое. При соединении решений подсистем в решение полной системы (в виде матриц решения или компонент отклика вектора потока), необходимо рассчитать и учесть те взаимные воздействия подсистем, которые они имели до разделения. Математически это проявляется как изменение компонент вектора потока в элементах полной системы под действием потоков от независимых

подсистем. С учетом таких изменений производится новый расчет подсистем, в которых от взаимных воздействий появляются дополнительные отклики. Затем при соединении подсистем возникают новые взаимные воздействия, вызванные дополнительными решениями, и так далее. Возникает итерационный процесс, который, если даже и сходится, то снижает эффективность расчетов по частям.

В данном разделе показано, что групповые свойства преобразований структуры двойственных сетей обеспечивают переход от связанной сети к подсетям, и наоборот, связывание сети их подсетей, *без итераций*. Формулы расчета матриц решения или компонент вектора, как и в разделе 3.3, используют матрицы изменения путей при разделении и соединении. Изменения значений матриц решения или компонент отклика при разделении на подсети приводят к обратным изменениям в двойственной сети. Инвариант двойственности позволяет получить значения откликов и метрических параметров в полной сети по их значениям в подсетях сразу и без итераций, что повышает производительность расчетов.

Впервые расчет сетей (сетевых моделей сложных систем) по частям, при которых не возникает итераций, рассмотрел Крон. Он представил инженерные методики расчета по частям для сетей двух частных случаев – так называемые диффузионные сети и пуассоновские сети (Крон, 1972). В данном разделе формулы и алгоритмы расчета при разделении сети на подсети *получены аналитически* в общем виде для любых случаев разделения сети на части или соединения целой сети из частей. Для этого используются формулы преобразования метрических матриц, матриц решения и матриц изменения путей. Матрица изменения путей для расчета по частям отличается от аналогичной матрицы раздела 3.3 более сложной конфигурацией подматриц, поскольку вместо одной сети возникает несколько независимых сетей, связанных сетью соединений.

#### **3.4.1. Матрица изменений при разделении сети на подсети**

Связанная сеть состоит из ветвей, которые соединены границами, узлами. Разделяя границы можно получить отдельные независимые подсети, которые не соединены между собой никакими границами. При организации параллельных вычислений это необходимо для разделения большой сети (сетевой модели сложной системы) на подсети, которые можно рассчитать на отдельных (параллельных), независимых компьютерах, транспьютерах и т.д., а затем соединить решения подсетей в решение полной сети. При разделении целой сети на части или соединении из частей целого меняются количества независимых замкнутых и разомкнутых путей, меняются размерности соответствующих подпространств.

Изменение количества замкнутых и разомкнутых путей вызвано изменением как числа узлов, их слияния или расслоения, так и изменением числа независимых подсетей в

соответствии с (2.1) и (2.2). Пусть в сети  $\alpha_1$  из  $n$  ветвей есть  $J_1$  узлов и одна подсеть,  $s_1 = 1$ . В такой сети независимых разомкнутых путей  $j_1 = J_1 - s_1 = J_1 - 1$ , а контуров  $m_1 = n - j_1$ . Если сеть  $\alpha_1$  разделена на подсети посредством разделения части узлов  $\Delta J$ , то она преобразуется в сеть  $\alpha_2$ , которая состоит из  $s_2 = s_1 + Ds = s_1 + 1 - 1$  независимых подсетей, а узлов в ней станет  $J_2 = J_1 + DJ$ . Тогда изменится число независимых разомкнутых путей – их станет  $j_2$ :

$$j_2 = J_2 - s_2 = J_1 + DJ - s_1 - Ds = j_1 + DJ - Ds. \quad (3.187)$$

При этом количество замкнутых путей, контуров, станет  $m_2$ :

$$m_2 = n - j_2 = n - j_1 - DJ + Ds = m_1 - DJ + Ds. \quad (3.188)$$

Разделение сети на подсети производим путем разделения узлов, или удаления целых ветвей, до тех пор, пока сеть не распадется на независимые подсети. В таком случае, кроме подсетей появляется еще одна сеть – *сеть соединения*, которая связывает подсети. Этой сети принадлежат как удаленные при разделении ветви, так и ветви, которые составляют разорванные при разделении пути.

Обозначим подсети индексом «с», таким, что:  $c = 1, \dots, s$ ; где  $s$  обозначает число независимых подсетей, или, для краткости  $s$ -сетей. Будем полагать, что подсети образовались при удалении части ветвей, которые образуют  $(s + 1)$ -ю – подсеть соединения, или  $r$ -сеть из «разорванных» при декомпозиции ветвей. Если подсети соединить между собой с помощью  $r$ -сети в полную сеть, путем соединения узлов из  $r$ -сети с узлами  $s$ -сетей, то число узлов уменьшится на  $DJ$ . В отличие от изменения соединений в одной связанной сети, здесь при соединении подсетей уменьшится и количество независимых подсетей с  $(s + 1)$  до 1; т.е. на  $Ds = s$  независимых подсетей станет меньше. Число независимых  $j$ -путей, при этом изменится на величину разности  $Dj$ :

$$Dj = DJ - Ds = DJ - s. \quad (3.189)$$

Если подсети соединяет только одна ветвь, то  $DJ = Ds$ , тогда из (3.189) ясно, что число  $m$ -путей и  $j$ -путей в сумме останется прежним. Ни в данной сети, ни в двойственной сети не появляются новые контуры. По этой причине такие подсети хотя и соединены внешне, но не взаимодействуют, остаются практически независимыми друг от друга.

Если таким образом соединены все подсети, то получается одна сеть. Далее при соединении узлов количество связей растет в пределах только одной сети, эти преобразования рассмотрены в разделе 3.3. Там показано, что в одной сети при уменьшении числа узлов увеличивается число контуров, по которым взаимодействуют подсети, а, значит, в матрице  ${}^m C$  появляются новые строки, т.е. возникает матрица изменения путей  $DC$ . Положим, что  $m$ -пути в подсетях  ${}^m p_s^1$  прежние, а замыкаются вновь только разомкнутые до этого пути  ${}^j p_r^1$  в  $(s + 1)$ -сети. При этом в новые контуры *должны* входить ветви,

принадлежащие s-сетям (было показано, что взаимодействующие подсети соединяются не менее чем двумя узлами).

Матрица преобразования подсетей  $C^1$  имеет блочно-диагональный вид. На главной диагонали стоят матрицы преобразования отдельных подсетей и г-сети соединения как для m-путей, так и для j-путей. Эта матрица, транспонированная для экономии места, имеет вид:

$$C^1_t = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_1 & m_c & m_s & m_r & j_1 & j_c & j_s & j_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_c \\ n_s \\ n_r \end{matrix} & \begin{array}{|cccc|cccc} \hline mC^1_t & & & & jC^1_t & & & \\ \hline & \dots & & & & \dots & & \\ \hline & & mC^s_t & & & & jC^s_t & \\ \hline & & & mC^r_t & & & & jC^{r1}_t \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (3.190)$$

Метрические матрицы импедансов подсетей можно представить аналогично и, таким образом, организовать расчет каждой из подсетей и сети соединений независимо от других, используя подматрицы в (3.190), по формулам раздела 3.1.

Матрица преобразования путей от свободных ветвей к полностью связанной сети  $C^2$  становится сложнее, поскольку появляются новые элементы. Эти элементы представляют ветви, замыкающие в подсетях те контуры, в которые по мере соединения подсетей превращается часть разомкнутых путей в г-сети. Транспонированная матрица  $C^2$  отличается от аналогичной матрицы для изменения соединений (3.51) в пределах одной сети:

$$(3.191) \quad C^2_t = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_1 & m_c & m_s & m_r & Dm & j_1 & j_c & j_s & j_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_c \\ n_s \\ n_r \end{matrix} & \begin{array}{|cccc|cccc} \hline mC^1_t & & & & DC^1_t & jC^1_t & & & \\ \hline & \dots & & & \dots & & \dots & & \\ \hline & & mC^s_t & & DC^s_t & & & jC^s_t & \\ \hline & & & mC^r_t & DC^r_t & & & & jC^{r2}_t \\ \hline \end{array} \end{matrix}$$

$m^0_1$  |  $j^0_1$  |  $m^0_2$  |  $j^0_2$

Здесь  $m^0_1$  и  $m^0_2$  означают полное число контуров, а  $j^0_1$  и  $j^0_2$  – полное число разомкнутых путей в подсетях (включая r-сеть) и в соединенной сети.

Итак, матрица преобразования контуров соединенной сети  ${}^m C^2$  содержит как  ${}^m C^1$ , так и матрицу соединений  $DC$ , которая состоит из строк вновь образованных контуров. Для краткости будем записывать  ${}^m C^2$  как матрицу, состоящую только из двух подматриц. Одна матрица включает все подсети, и будет обозначаться как  $({}^m C^{1s}, C^{1r})$ . Другая включает матрицу соединяющих путей и будет обозначаться как  $(DC^s, DC^r)$ . В матрице  $DC^r$  ненулевые элементы перечисляют как те ветви г-сети, которые определяют в ней изменяемые при соединении j-пути, так и те ветви, которые должны включаться дополнительно при замыкании этих j-путей в контуры. В  $DC^s$  ненулевые элементы перечисляют те ветви s-сетей, которые замыкают образованные при соединении подсетей пути  $Dm$  – новые контуры.

Именно  $DC^s$  включает новые элементы, которые обеспечивают взаимодействие  $s$  и  $r$  подсетей в соединенной сети. В результате в (3.191) контурная часть матрицы  $C^2$ , используемая далее при расчетах, принимает вид:

$${}^m C_t^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_s & m_r & Dm \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_s \\ n_r \end{matrix} & \begin{matrix} m C_t^{1s} & & DC_t^s \\ & m C_t^{1r} & DC_t^r \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.192)$$

Можно видеть, что за счет  $r$ -сети соединяющих ветвей эта матрица отличается от матрицы преобразования при изменении соединений в одной сети. Изменение матрицы преобразования *двойственной сети* при соединении подсетей происходит в соответствии с тем, что суммарное число контуров и разомкнутых путей остается постоянным, а ориентации ветвей дополняют друг друга (глава 2). Изменение матриц преобразования при соединении подсетей показано на примере двойственных сетей на рис. 3.14.

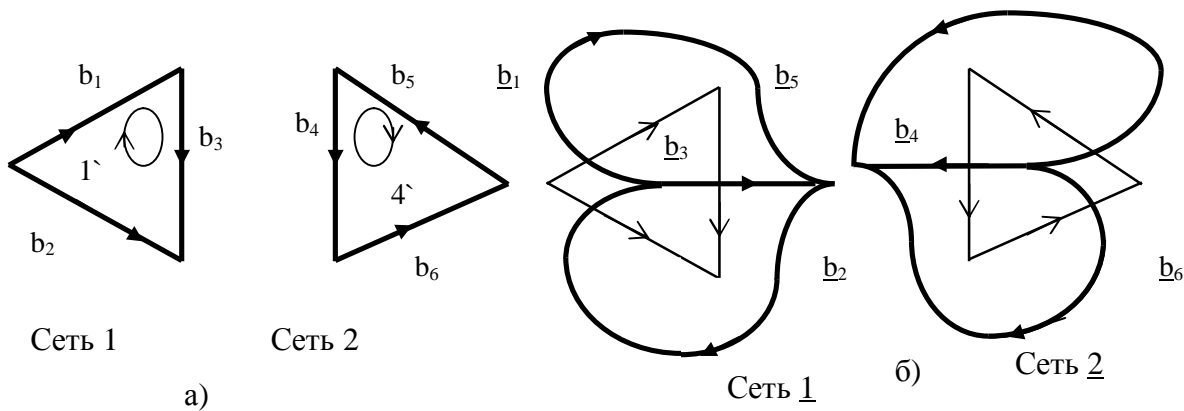


Рис. 3.14. Взаимно двойственные подсети

а) – данные подсети,

б) – двойственные подсети (данные подсети показаны тонкими линиями)

На рис. 3.14.а показаны две сети из трех ветвей с топологическими параметрами, равными:  $n = 6, s = 2, J = 6, j = J - s = 4, m = 2$ . На рис. 3.14.б представлены двойственные к ним сети из трех ветвей, (тонкими линиями показаны данные сети) с параметрами, равными:  $\underline{n} = 6, \underline{s} = 2, \underline{J} = 4, \underline{j} = \underline{J} - \underline{s} = 2, \underline{m} = 4$ . Матрицы преобразования для сетей на рис. 3.14.а:

$$C^1 = \underline{A}^1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad C^2 = \underline{A}^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4' \\ 5' \\ 6' \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.193)$$

а для двойственных сетей на рис. 3.14.б:

$$\underline{C}^1 = \underline{A}^1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{1}' \\ \underline{2}' \\ \underline{3}' \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad \underline{C}^2 = \underline{A}^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{4}' \\ \underline{5}' \\ \underline{6}' \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.194)$$



При этом каждая матрица преобразования  $C$  прямого базиса одновременно является матрицей преобразования  $A$  взаимного базиса в двойственной сети, и наоборот. При соединении подсетей *по одному узлу*, как на рис. 3.15, число замкнутых и разомкнутых путей не меняется, поэтому матрицы преобразования для выбранных путей остаются прежние.

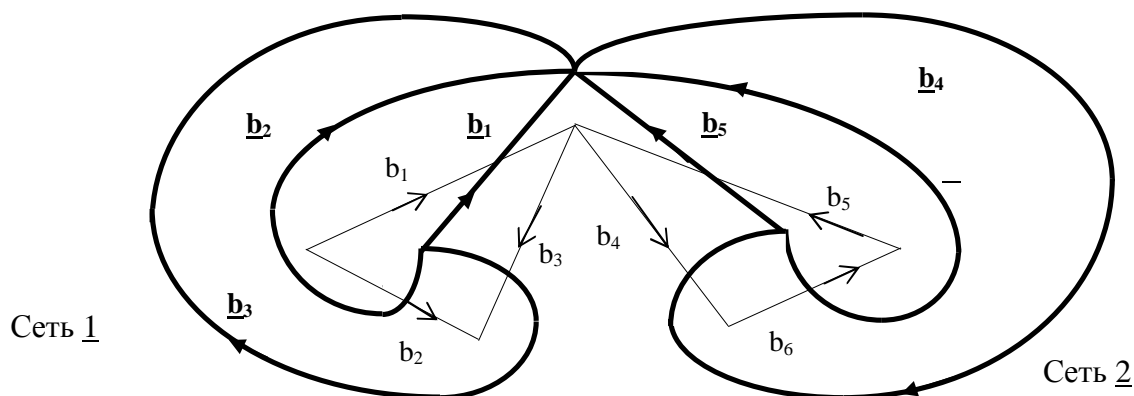


Рис. 3.15. Взаимно двойственные подсети, соединенные по одному узлу

Если же две данные подсети соединить еще и по второму узлу, то *появится новый контур*, которому в двойственной сети соответствует новый разомкнутый путь, как показано на рис. 3.16. Здесь пунктиром показано направление разъединения узла в  $\alpha$  сети, соответствующее замыканию узла в  $\alpha$  сети при соединении подсетей в связанную по двум узлам сеть.

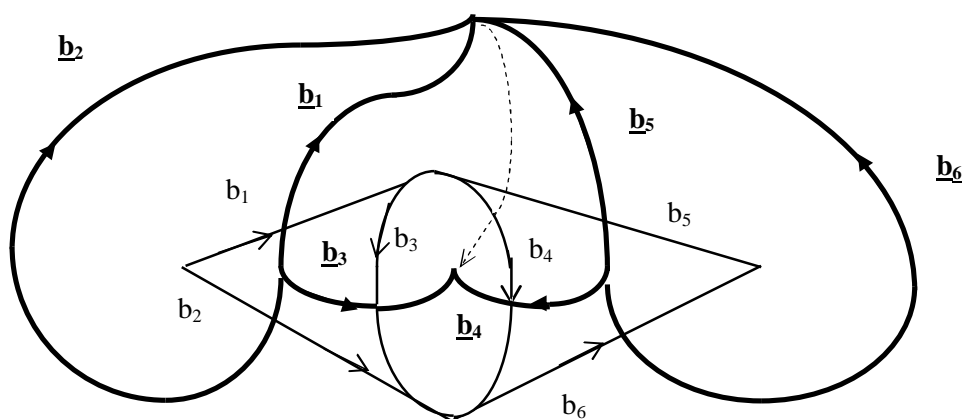


Рис. 3.16. Двойственные подсети, соединенные по двум узлам (направление соединения показано стрелкой с пунктиром)

Матрицы преобразования для таких двойственных сетей, связанных по двум узлам, которые обозначим как  $C$  и  $\underline{C}$ , меняются и принимают вид:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \\ 5' \\ 6' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & \mathbf{1} & & \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \underline{C} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{1}' \\ \underline{2}' \\ \underline{3}' \\ \underline{4}' \\ \underline{5}' \\ \underline{6}' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ -1 & & 1 & & & \\ \mathbf{1} & & -\mathbf{1} & 1 & & \\ -\mathbf{1} & & \mathbf{1} & -1 & 1 & \\ -\mathbf{1} & & \mathbf{1} & -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} j \\ m \\ j \\ j \\ m \\ m \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.195)$$

Жирным шрифтом в (3.195) показаны новые элементы в матрицах преобразования, соответствующие тем ветвям, которые были включены в пути при соединении подсетей в сеть. Получилось, что матрица изменений  $DC$  состоит из одной строки  $3'$ , причем в  $\alpha$  сети появляется контур, который замыкается ветвью  $b_4$ . В  $\underline{\alpha}$  сети при этом размыкается контур  $\underline{3}'$  и превращается в  $j$ -путь, ветви которого остаются прежними, но ортогональность вызывает изменение всех путей во второй подсети при соединении в сеть. Это связано с тем, что подсети связаны здесь напрямую, через узлы, без ветвей – «посредников», которые бы составляли  $r$ -сеть. Это показывает на примере, какие изменения происходят в путях двойственной сети при соединении подсетей в данной сети.

Теперь рассмотрим два варианта связывания тех же подсетей с помощью ветвей  $r$ -сети, представленных на рис. 3.17. Подсети на рис. 3.17 а), б), и в) соединены в две разных сети на рис. 3.17 г) и д), которые отличаются только порядком подключения узлов А и Б  $r$ -сети, сети соединений, к подсетям.

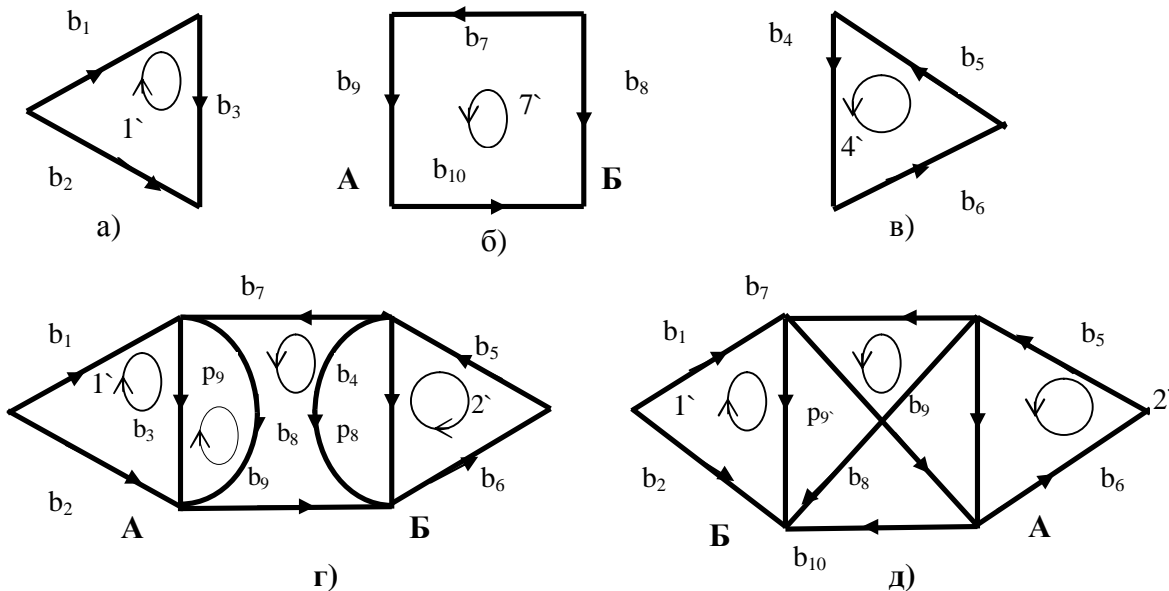


Рис. 3.17. Соединение подсетей с помощью  $r$ -сети соединений  
 Подсети: а) – сеть 1, б) –  $r$ -сеть, в) – сеть 2;  
 г) – связанная сеть с простыми контурами;  
 д) – связанная сеть, в которой контуры включают новые ветви из  $r$ -сети

При этом в связанной сети в обоих случаях возникают два новых контура. Это видно по изменению параметров сетей при соединении. Например, параметры подсетей: сумма ветвей по всем подсетям:  $n^0_1 = n_1 + n_2 + n_r = 3 + 3 + 4 = 10$ ; узлов:  $J^0_1 = J_1 + J_2 + J_r = 3 + 3 + 4 = 10$ ; подсетей  $s^0_1 = 3$ ; независимых разомкнутых путей:  $j^0_1 = j_1 + j_2 + j_r = J^0_1 - s^0_1 = 10 - 3 = 7$ ; контуров:  $m^0_1 = m_1 + m_2 + m_r = n^0_1 - j^0_1 = 10 - 7 = 3$ .

Параметры связанной сети:  $n^0_2 = n_1 + n_2 + n_r = 3 + 3 + 4 = 10$ ; узлов:  $J_2 = 6$ ; отдельных подсетей  $s_2 = 1$ ;  $j$  – путей:  $j_2 = J_2 - s_2 = 6 - 1 = 5$ ; контуров:  $m_2 = n_2 - j_2 = 10 - 5 = 5$ . Таким образом, приращение контуров равно:  $Dm = m_2 - m^0_1 = 5 - 3 = 2$ . Везде старая сеть из отдельных подсетей обозначается индексом 1, а новая, связанная, обозначается индексом 2.

Матрицы преобразования подсетей уже получены в (3.193), а матрицу преобразования г-сети выберем также достаточно простой:

$$C^{1l} = \begin{matrix} & 7 & 8 & 9 & 10 & \\ \begin{matrix} 7^ \\ 8^ \\ 9^ \\ 10^ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} m \\ j \\ j \\ j \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.196)$$

При связывании подсетей выберем наиболее простые замыкания новых контуров. Будем считать, что на рис 3.17.г они проходят через ветви  $b_8$  и  $b_9$ , которые до этого представляли разомкнутые пути в г-сети, а теперь включают ветви из подсетей  $b_3$  и  $b_4$ . Матрица преобразования для этой соединенной сети первого варианта  $C^{2l}$  тогда принимает вид, представленный на (3.197).

$$C^{2l} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\ \begin{matrix} 1^ \\ 2^ \\ 3^ \\ 4^ \\ 5^ \\ 6^ \\ 7^ \\ 8^ \\ 9^ \\ 10^ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & -1 & 1 & 1 \\ & & & & -1 & & & & 1 & & \\ & & & -1 & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} m \\ j \\ j \\ m \\ j \\ j \\ m \\ \Delta j \\ \Delta j \\ j \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.197)$$

Здесь строки  $1^$ ,  $4^$ ,  $7^$  составляют матрицу  ${}^m C^{1l}$ . Вместе со строками  $8^$  и  $9^$ , представляющими  $\Delta C$  с измененными путями  $\Delta j = \Delta m$ , т.е. с разомкнутыми путями, которые превратились в контуры, они составляют матрицу  ${}^m C^{2l}$  связанной сети. Столбцы 1–6 строк 8 и 9 составляют подматрицу  $DC^s$ , а столбцы 7–10 – подматрицу  $DC^r$  в матрице (3.192). Эти

подматрицы и подматрицы подсистем выделены в (3.197) двойными линиями. Заметим, что в  $C^{r2}$  новых элементов по сравнению с  $C^{r1}$  не появилось.

При аналогичном выборе путей матрица  $C^{21}$  для сети на рис. 3.17.д, имеет вид:

$$C^{21} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{array}{l} 1^{\setminus} \\ 2^{\setminus} \\ 3^{\setminus} \\ 4^{\setminus} \\ 5^{\setminus} \\ 6^{\setminus} \\ 7^{\setminus} \\ 8^{\setminus} \\ 9^{\setminus} \\ 10^{\setminus} \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 & & & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & & & & & \\ \hline & & 1 & & & & & & & & \\ \hline & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & & & & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & -1 & & & & 1 & & -1 \\ \hline & & & -1 & & & & & & 1 & 1 \\ \hline & & & & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (3.198)$$

Строки замкнутых и разомкнутых путей здесь остались прежними. Кроме того, как уже было в (3.197), здесь также в  $DC^{2r}$  (столбцы 7–10 в строках 8 и 9) добавляются элементы, представляющие ветви из  $r$ -сети, которые должны замкнуть возникшие новые контуры. Этими элементами, которые выделены жирным шрифтом, матрицы (3.197) и (3.198), как и сети на рис. 3.17.г и рис. 3.17.д, отличаются друг от друга.

### 3.4.2. Матрицы решения при расчетах сетей по частям

Существует три варианта расчета сетей по частям при связывании подсетей отдельной сетью соединений:

1. Полная сеть разделяется на подсети удалением части ветвей, которые составят отдельную сеть,  $r$ -сеть. При параллельном расчете можно каждый раз разделять сеть на *разные подсети*, связанные *разными  $r$ -сетями*.
2. Рассмотрим *одни и те же подсети*, которые связаны *разными  $r$ -сетями*. Тогда при проектировании можно использовать полученные решения подсетей для компоновки их в разные полные сети, представляющие, например, модели разных конструкций.
3. Рассматриваем один и тот же каркас системы в виде *одной и той же  $r$ -сети*, присоединяя, «навешивая» каждый раз на этот каркас *разные подсети*.

Для вектора, заданного в контурах  $^m\mathbf{d}$ , при соединении подсетей в сеть число переменных, контуров, увеличивается. Для вектора, заданного в разомкнутых путях  $^j\mathbf{d}$ , число переменных при соединении подсетей в сеть, соответственно, уменьшится. Сначала получим уравнения матрицы решения контуров, т.е.  $Y_c^2$  для связанной сети по матрицам решения подсетей  $Y_c^{1s}$ , сети  $Y_c^{1r}$  и матрице соединений  $DC$ . Затем, как в предыдущем разделе, используем двойственные соотношения для получения матрицы решения для разомкнутых путей. Заметим, что *любое* связывание подсетей уменьшает количество узлов и увеличивает количество контуров, как и в пределах одной сети.

Пусть заданы матрицы решения подсетей:

$$Y_c^{1s} = {}^m C_t^{1s} ({}^m C_t^{1s} Z_{1s} {}^m C_t^{1s})^{-1} {}^m C_t^{1s}, \tag{3.199}$$

где s перечисляет все подсети, а также сети связей, r-сети:

$$Y_c^{1r} = {}^m C_t^{1r} ({}^m C_t^{1r} Z_{1r} {}^m C_t^{1r})^{-1} {}^m C_t^{1r}, \tag{3.200}$$

и матрица изменения контуров  $DC_t = (DC_t^s, DC_t^r)$ . Тогда матрица решения соединенной сети, если производить ее расчет, начиная со свободных ветвей, имеет вид, как обычно:

$$Y_c^2 = {}^m C_t^2 ({}^m C_t^2 Z_2 {}^m C_t^2)^{-1} {}^m C_t^2, \tag{3.201}$$

где матрица импедансов  $Z_2$  по главной диагонали содержит блоки матриц импедансов свободных ветвей для подсетей  $Z_{1s}$  и сети связей  $Z_{1r}$ . Эти матрицы могут иметь внутри каждого блока и недиагональные элементы (взаимодействие несвязанных ветвей между собой). Выразим матрицу  ${}^m C^2$  через матрицы подсетей  ${}^m C^{1s}$ ,  ${}^m C^{1r}$ , и матрицу изменения путей  $DC$ , в соответствии с (3.192) и подставим в (3.201), как это делалось в предыдущем разделе. Положим, что  $Z = I$  (принципиальных изменений это допущение не вносит, но выкладки упрощает), а полученные результаты легко обобщить на случай  $Z \neq I$ . Как и при выводе формулы для матрицы пересчета решения, можно получить в символьном виде обратную матрицу импедансов соединенной сети в круглых скобках:

$${}^m Z_2^{-1} = ({}^m C^2 {}^m C_t^2)^{-1} =$$

	$n_s$	$n_r$		$m_s$	$m_r$	$Dm$	
$m_s$	${}^m C^{1s}$			$n_s$	${}^m C_t^{1s}$		$DC_t^s$
$m_r$		${}^m C^{1r}$		$n_r$	${}^m C_t^{1r}$		$DC_t^r$
$\Delta m$	$DC^s$		$DC^r$				

$$=$$

	$m_s$	$m_r$	$Dm$	
$m_s$	${}^m C^{1s} {}^m C_t^{1s}$		${}^m C^{1s} DC_t^s$	$m_s$
$m_r$		${}^m C^{1r} {}^m C_t^{1r}$	${}^m C^{1r} DC_t^r$	$m_r$
$Dm$	$DC^s {}^m C_t^{1s}$	$DC^r {}^m C_t^{1r}$	$DC^s DC_t^s + DC^r DC_t^r$	$Dm$

$$=$$

$m_s$	$m_r$	$Dm$
$a$		$b$
	$c$	$d$
$e$	$f$	$g$

$$\tag{3.202}$$

Здесь буквами  $a, b, c \dots$  для краткости и удобства аналитических преобразований обозначены матрицы взаимных метрических параметров, которые следовало бы обозначать соответствующими символами типа  $Z_{gd}$ , например,  $Z_{ss}$ , или  $Z_{s,Ds}$  и т.д.

Эта матрица сложнее, чем матрица в соотношении (3.142), которая использовалась для вывода формулы пересчета решения при изменении связей в сети без разделения на подсети. Однако наличие в этой матрице нулевых элементов существенно упрощает ее символьное обращение. Для общего случая недиагональной метрической матрицы, когда свободные

ветви взаимодействуют между собой, матрица  ${}^mZ_2`$  может быть заполнена по всем элементам ненулевыми значениями, что усложнит выкладки. Обратную матрицу к матрице в (3.202), т.е.  $({}^mZ_2`)^{-1} = {}^mY_2`$  найдем решением системы линейных уравнений, выражая одни элементы через другие и исключая переменные. Учтем, что диагональные элементы в (3.202) являются квадратными матрицами и могут иметь обратные, а недиагональные элементы в общем случае прямоугольные.

На самом деле матрица (3.202) отличается от (3.142) только разбиением сети на подсети. Если подсети и г-сеть записать одной матрицей, то (3.202) и (3.142) практически одинаковы. В символах обратная матрица к (3.202) имеет вид следующий:

$${}^mY_2` = ({}^mZ_2`)^{-1} = ({}^mC^2 {}^mC_t^2)^{-1} = \tag{3.203}$$

	$m_s$	$m_r$	$Dm$	
$m_s$	$a^{-1}(I + b e a^{-1} G^{-1})$	$a^{-1} b f c^{-1} G^{-1}$	$-a^{-1} b G^{-1}$	=
$m_r$	$c^{-1} d e a^{-1} G^{-1}$	$c^{-1} (I + d f c^{-1} G^{-1})$	$-c^{-1} d G^{-1}$	
$Dm$	$-e a^{-1} G^{-1}$	$-f c^{-1} G^{-1}$	$G^{-1}$	

$m_s$	$m_r$	$Dm$
$y^{11}$	$y^{12}$	$y^{13}$
$y^{12}$	$y^{22}$	$y^{23}$
$y^{13}$	$y^{23}$	$y^{33}$

где  $G^{-1} = (g - f c^{-1} d - e a^{-1} b)^{-1} =$   
 $= (DC^s DC_t^s + DC^r DC_t^r - DC^r {}^mC_t^{1r} ({}^mC_t^{1r} {}^mC_t^{1r})^{-1} {}^mC_t^{1r} DC_t^r - DC^s {}^mC_t^{1s} ({}^mC_t^{1s} {}^mC_t^{1s})^{-1} {}^mC_t^{1s} DC_t^s =$   
 $= DC^s (I - Y_c^{1s}) DC_t^s + DC^r (I - Y_c^{1r}) DC_t^r = DC^s Z_c^{1s} DC_t^s + DC^r Z_c^{1r} DC_t^r.$

Это показывает, что изменения в метрике соединенной данной сети вносятся с помощью изменения матрицы решения двойственной сети, которая имеет вид:

$$DZ_c = DC Z_c^l DC_t = \tag{3.204}$$

	$n_s$	$n_r$	
$Dm$	$DC^s$	$DC^r$	

$n_s$	$n_r$
$Z_c^{1s}$	$Z_c^{1r}$

$n_s$	$Dm$
$n_r$	$DC_t^r$

Полученная матрица  ${}^mY_2`$  умножается затем справа на  ${}^mC^2$  и слева на  ${}^mC_t^2$ . После подстановки всех обозначений и сокращений, делаем необходимые, но довольно громоздкие аналитические преобразования, которые облегчаются введенными сокращениями. В результате получим формулу расчета матрицы решения связанной сети, которая включает в себя исходные матрицы решения подсетей и матрицу изменяемых путей:

- матрицы решения подсетей,
- матрицу связывающей их сети соединений,
- матрицу преобразования путей, изменяемых при соединении подсетей в сеть.

Эта формула для базиса контуров имеет вид следующий:

$$Y_c^2 = Y_c^l + DY_c. \tag{3.205}$$

Здесь  $Y_c^l$  – блочно-диагональная матрица. Она объединяет матрицы решения подсетей и сети связей, которые расположены вдоль ее главной диагонали, а  $DY_c$  – это матрица изменений, которая имеет вид:

$$DY_c = (I - Y_c^l Z) DC_t [DC Z (I - Y_c^l Z) DC_t]^{-1} DC (I - Z Y_c^l),$$

где  $DC$  состоит из строк измененных путей, т.е. замкнутых при соединении, или разомкнутых при разъединении. Формула расчета сети по частям для замкнутых путей примет вид:

$$Y_c^2 = Y_c^l + DY_c = Y_c^l + (I - Y_c^l Z) DC_t [DC Z (I - Y_c^l Z) DC_t]^{-1} DC (I - Z Y_c^l). \quad (3.206)$$

Формулы (3.205) и (3.206) отличаются от формулы пересчета решений при введении соединений в пределах одной сети (3.144) только тем, что матрица преобразования имеет теперь вид (3.192), а не (3.135). Это естественно, поскольку пересоединения в одной сети – частный случай соединения подсетей с числом подсетей, равным единице. Таким образом, (3.205) является *общей формулой расчета изменений решения сети при изменениях структуры*, которые состоят в наложении связей (уменьшении числа узлов). Матрица решения обеспечивает расчет компонент  ${}^m d$  в соединенной сети по их значениям в подсетях, которые, в свою очередь, получены по их значениям в свободных ветвях, как это делалось в разделе 3.1.4. Общий вид формулы расчета компонент  ${}^m d_{c2}^a$  в соединенной сети вектора  ${}^m d$ , который задан в свободных ветвях ковариантными компонентами  ${}^m d_a^0$ , аналогичен (3.145):

$${}^m d_{c2}^a = Y_c^2 {}^m d_a^0 = (Y_c^l + DY_c) {}^m d_a^0 = {}^m d_{cl}^a + D^n {}^m d_{cl}^a. \quad (3.207)$$

Дополнительные компоненты  $D^n {}^m d_{cl}^a$ , которые обусловлены изменением путей при соединении подсетей, изменяют компоненты подсетей  ${}^m d_{cl}^a$  в компоненты соединенной сети  ${}^m d_{c2}^a$ . Все контравариантные компоненты (в данном случае это отклики) получаются из заданных ковариантных компонент  ${}^m d_a^0$  (в данном случае это воздействия) с помощью матриц, которые играют роль метрических матриц:

$$\begin{aligned} {}^m d_{c2}^a &= Y_c^2 {}^m d_a^0 - \text{в соединенной сети;} \\ {}^m d_{cl}^a &= Y_c^l {}^m d_a^0 - \text{в подсетях;} \\ D^n {}^m d_{cl}^a &= DY_c {}^m d_a^0 - \text{изменения при соединении подсетей в сеть.} \end{aligned} \quad (3.208)$$

Эти матрицы преобразуют ковариантные компоненты в контравариантные. Однако преобразуют в сетях с разной структурой, в подпространствах с разной размерностью.

Формулы расчета по частям отличаются от формул пересчета решения тем, что рассмотрены только преобразования соединения, т.е. уменьшения числа узлов (поскольку происходит соединение подсетей), а матрица решения исходной сети состоит из независимых матриц решения отдельных подсетей. Поскольку формулы *разъединения* подсетей здесь не рассматриваются, то в данном разделе в обозначении матриц решения знак *плюс* везде опущен, т.е. пишется, например,  $Z_c^2$  вместо  $Z_c^{2+}$ .

Для открытых сетей, разомкнутых путей, воспользуемся, как и раньше, общими формулами отношений между матрицами решения в двойственных сетях (3.16–3.19).

Матрица решения для базиса разомкнутых путей (т.е. для расчета компонент вектора  $\mathbf{d}$  в сети с изменением структуры) аналогична матрице решения в соотношениях (3.148–3.149) для наложения связей в сети и получается с использованием формулы (3.17):

$$Z_c^2 = Z_c^1 - Z_c^1 DC_t (DC Z_c^1 DC_t)^{-1} DC Z_c^1. \quad (3.209)$$

Таким образом, для  $j$ -путей матрица решения соединенной сети  $Z_c^2$  выражается через матрицы решения подсетей  $Z_c^1$  и матрицу изменения путей  $DC$ . Эту формулу также можно представить как в соотношении (3.205): в виде суммы матрицы решения  $Z_c^1$  и матрицы изменений решения  $DZ_c = Z DY_c Z$ , причем  $DY_c$  здесь *остается той же самой*:

$$Z_c^2 = Z_c^1 - Z DY_c Z = Z_c^1 - DZ_c. \quad (3.210)$$

Отсюда видно, что эта формула практически такая же, как в соотношении (3.17) и представляет преобразования метрических параметров сети. По сравнению с (3.205), где метрические параметры *увеличиваются* с ростом количества переменных (замкнутых путей, контуров), здесь матрица изменений решения вычитается, что показывает двойственное *уменьшение* этих параметров с уменьшением количества разомкнутых путей.

При разделении данной сети на подсети, в двойственной сети также происходит разделение на подсети. Это следует из топологических соотношений между ветвями, узлами и подсетями. При этом сумма замкнутых путей и разомкнутых путей в совокупности двух двойственных сетей всегда остается постоянной, хотя меняется число узлов, подсетей, число замкнутых и разомкнутых путей в каждой из сетей. Таким образом, между всеми парами подсетей в данной и двойственной сети возникают такие же отношения, как если бы они рассматривались как независимые сети.

Когда подсети связываются между собой узлами, без включения новых ветвей, то происходит обратный процесс: изменяется число узлов, число подсетей, а, следовательно, число замкнутых и разомкнутых путей, но их сумма в совокупности двух двойственных сетей также постоянная. Допустим, что все подсети уже связаны в единую сеть хотя бы по одному узлу. Тогда далее, при введении соединений в данной сети (уменьшении числа узлов) в двойственной сети происходят разъединения (увеличение числа узлов). Для базиса контуров (для расчета компонент  $\mathbf{m}$  в связанной сети) в двойственной сети матрица решения аналогична (3.150):

$$\begin{aligned} \underline{Y}_c^2 &= \underline{Y}_c^1 + \underline{DY}_c = \\ &= \underline{Y}_c^1 + (I - \underline{Y}_c^1 \underline{Z}) \underline{DC}_t [\underline{DC} \underline{Z} (I - \underline{Y}_c^1 \underline{Z}) \underline{DC}_t]^{-1} \underline{DC} (I - \underline{Z} \underline{Y}_c^1). \end{aligned} \quad (3.211)$$



Здесь существует соответствие двойственных величин:  $\underline{Z} = Y$ ,  $\underline{Y}^l_c = Z^l_c$ ,  $\underline{C} = A$ ,  $\underline{DC} = DA$ . Откуда получим, что для матриц данной сети, после подстановки двойственных величин, (3.211) имеет вид, как в (3.151):

$$\begin{aligned} \underline{Y}^2_c &= Z^l_c + D\underline{Y}_c = & (3.212) \\ &= Z^l_c + (I - Z^l_c Y) DA_t [DA Y (I - Z^l_c Y) DA_t]^{-1} DA (I - Y Z^l_c), \end{aligned}$$

где матрица решения  $\underline{Y}^2_c$  выражена через матрицу решения подсетей в данной сети  $Z^l_c$  и ортогональную матрицу изменения путей  $DA$ .

Матрица решения для базиса разомкнутых путей (компонент  $\mathbf{d}$  в связанной двойственной сети)  $\underline{Z}^2_c$  аналогична матрице в (3.152) для наложения связей в двойственной сети и получается с использованием (3.19):

$$\underline{Z}^2_c = \underline{Z}^l_c - \underline{Z}^l_c \underline{DC}_t (\underline{DC} \underline{Z}^l_c \underline{DC}_t)^{-1} \underline{DC} \underline{Z}^l_c = \underline{Z}^l_c - D\underline{Z}_c, \tag{3.213}$$

т.е. выражается через матрицы решения подсетей  $Z^l_c$  и матрицу изменений путей  $\underline{DC}$ . Эту матрицу, используя двойственность величин, также можно представить как сумму  $Y_c^l$  и матрицы  $D\underline{Z}_c = \underline{Z} D\underline{Y}_c \underline{Z}$ , причем  $D\underline{Y}_c$  здесь *остается той же самой*:

$$\underline{Z}^2_c = Y_c^l - Y D\underline{Y}_c Y = Y_c^l - Y_c^l DA_t (DA Y_c^l DA_t)^{-1} DA Y_c^l, \tag{3.214}$$

что также аналогично (3.19). Это преобразования метрических параметров сети. По сравнению с (3.212), где эти параметры *растут* с ростом числа переменных (контуров), здесь матрица изменений вычитается, что показывает двойственное *уменьшение* этих параметров с уменьшением числа разомкнутых путей.

В таблице 3.3 рассмотренным формулам соответствуют формулы, связанные с уменьшением числа узлов, т.е. с наложением связей. Отличие состоит в том, что если там матрица решения старой сети  $Y_c^l$  или  $Z_c^l$  в общем случае была полностью заполнена, то здесь соответствующая ей матрица решения подсетей состоит из независимых матриц решения этих подсетей, которые имеют вид, например:

(3.215)

	$n_l$		$n_s$		$n_{s+l}=n_r$
$Y_c^l =$	$n_l$	$Y_{cl}^l =$ $= {}^m C_{lt} ({}^m C_l Z_l {}^m C_{lt})^{-1} {}^m C_l$	...		
		...	...		...
	$n_s$		...	$Y_{cs}^l =$ ${}^m C_{st} ({}^m C_s Z_s {}^m C_{st})^{-1} {}^m C_s$	
	$n_{s+l}$		...		$Y_{cr}^l =$ ${}^m C_{rt} ({}^m C_r Z_r {}^m C_{rt})^{-1} {}^m C_r$

Матрица изменения путей  $DA$  (разомкнутых путей) или  $DC$  (замкнутых путей) также разделяется на отдельные блоки, каждый из которых «действует» на свою матрицу решения подсети, преобразуя ее к координатам изменяемых путей  $\Delta m$ , например:

$$DA = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n_l & \dots & n_s & n_r \\ \hline DA_l & \dots & DA_s & DA_r \\ \hline \end{array} \quad (3.216)$$

По характеру преобразования можно видеть, что получаемая при этом преобразовании матрица решения двойственна по отношению к типу подсетей, на которые разделена данная сеть. Это следует из того, что роль «свободных ветвей» для этого преобразования играют матрицы решения подсетей:

$$DY = DA Y_c^{-1} DA_t = DA [{}^m C^{sr}_t ({}^m C^{sr} Z_{sr} {}^m C^{sr}_t)^{-1} {}^m C^{sr}] DA_t, \quad (3.217)$$

где индексы sr означают, что сюда входят все матрицы из (3.215). Эти матрицы  $Y_c^{-1}$  сами играют роль обобщенных метрических матриц. Они преобразуют, например, ковариантные заданные компоненты в свободных ветвях в контравариантные компоненты в связанных ветвях или наоборот. Таким образом, матрица изменения путей и последующее обращение  $(DA Y_c^{-1} DA_t)^{-1}$ , изменяет метрику подсетей на обратную.

Отсюда следует, что в квадратных скобках производится расчет двойственной по отношению к подсетям сети, переменными которой являются замыкаемые при соединении подсетей контуры  $\Delta m$ , на которые как бы «проектируется» метрика матриц решения подсетей. Эту неявно выраженную сеть Крон при расчете сетей по частям методом диакоптики называл «*сеть пересечений*» (Крон, 1972). Разорванные ветви Крон просто удалял, полагая, что они сами сети не образуют и нужны только на этапе расчета двойственной сети пересечений, которую они составляют.

Оказалось, что на самом деле, разорванные, или *соединяющие ветви* сами *составляют подсеть*, связывающую другие подсети. Она может состоять из свободных ветвей. Тогда при соединении подсетей каждая ветвь образует свой изменяемый контур. Она может отсутствовать, если сеть разделена на подсети просто по узлам. Тогда при связывании контуры  $\Delta m$  образуются замыканием разомкнутых путей в самих подсетях. Сеть соединений может содержать внутри себя ветви, которые не участвуют в соединении подсетей и тогда их пути *не изменяются* при соединении.

Таким образом, сеть соединений, входящая в состав подсетей, является в настоящей работе  $(s+1)$ -сетью, а возникающая в (3.217) матрица в квадратных скобках соответствует двойственной сети пересечений в «Диакоптике» Крона и является здесь  $(s+2)$ -сетью. Во всех случаях изменения структуры матрица преобразования имеет одну конфигурацию и алгоритмы расчета для всех случаев одни и те же.

Все формулы пересчета решений и расчета сетей по частям получены в данной работе аналитически, все матрицы преобразования одинаково преобразуют базисы путей в сетях с различной структурой, и *все виды расчета изменения параметров процессов при изменении*

структуры основаны на методе двойственных сетей, теоретические основы которого рассмотрены в главе 2.

Из представленных формул наглядно видно, что *итерации* при расчете сетей по частям на основе двойственных сетей *не возникают*. Решение получается сразу при совместном использовании метрики и структуры сетей, при этом изменения в структуре (за счет  $m_j$ -инварианта сети для изменяемых путей) переходят в двойственную сеть, «запасаются» в ней и затем возвращаются при соединении решений подсетей в целое.

### 3.4.3. Алгоритмы расчета сетей по частям

Для расчета сетей по частям необходимо разделить полную сетевую модель сложной системы на подсистемы, независимые подграфы графа сети, чтобы затем рассчитать их на параллельных процессорах и использовать преимущества компьютеров с параллельной архитектурой. Декомпозиция графа на подграфы рассматривается в теории графов, существуют алгоритмы декомпозиции на подграфы, поэтому здесь этот вопрос специально не рассматривался.

Будем считать, что сеть уже разделена на подсети. Способ деления и размеры подсетей не существенны, однако желательно, чтобы число изменяемых путей было одного порядка с числом путей того же типа в подсетях. Это вызвано тем, что сложность расчета матрицы изменения, как можно видеть из (3.206), (3.209), (3.211) и (3.214), определяется обращением матрицы в квадратных скобках. *Порядок матрицы изменения равен числу путей, изменяемых при соединении подсетей в сеть.*

На рис. 3.18 представлены этапы расчета сети по частям. Такие расчеты можно проводить параллельно с использованием независимых процессоров. Эти этапы (алгоритм расчета сетей по частям) состоят из нескольких блоков расчета, часть из которых позволяет использовать ЭВМ с параллельной архитектурой, а часть может выполняться на одной из компонент такой машины, или на последовательной машине.

Алгоритм расчета по частям состоит из следующих блоков: выделение и получение исходных данных, деление сети на подсети, расчет подсетей и сети связей, формирование и расчет двойственной матрицы изменения решений с помощью матрицы изменения путей, расчет изменения решений подсетей в решение полной сети. Эффективность расчета сетей по частям можно определить по формулам раздела 3.3.4. Как отмечалось, время расчета определяется порядком наибольшей обращаемой матрицы (время обращения пропорционально кубической степени порядка матрицы), поэтому слишком большое число разорванных контуров, замыкаемых потом при соединении частей в целое, будет уменьшать вычислительную эффективность таких расчетов, так как растет порядок матрицы в квадратных скобках формул (3.206), (3.209), (3.211) и (3.214).

Алгоритмы расчета по частям матриц решения сетей других видов отличаются только двойственной заменой параметров. Алгоритмы расчета по частям компонент заданного вектора «замкнутой сети»  ${}^m\mathbf{d}$  или «разомкнутой сети»  ${}^j\mathbf{d}$  отличаются тем, что часть умножений матрицы на матрицу заменяется умножением матрицы на вектор, что требует меньше вычислений – с одной стороны, но вызывает необходимость повторения расчетов для каждого нового вектора – с другой стороны.

Выбор алгоритма зависит от поставленной задачи и от условий расчета, которые рассмотрены в разделе 3.3.4. Матрицу решений выгодно получить в том случае, когда для одной структуры сети задают векторы с разными компонентами; тогда можно получать реакцию одной структуры на разные воздействия, но при этом придется многократно умножать матрицу на матрицу. Если структура сети меняется, то выгоднее получать компоненты для каждого вектора всякий раз заново, используя преимущества меньшего объема вычислений при умножении матрицы на вектор. При этом с изменением структуры может меняться и вектор воздействия, для объема вычислений это не существенно. Отсюда получается *или* матрица решения, где на каждом этапе происходит перемножение матриц, что требует больше вычислений; *или* компоненты вектора – часть перемножений матриц заменяется умножением матрицы на вектор, но матрица решений в явном виде не вычисляется.

Алгоритм последовательности расчета сети по частям в соответствии со схемой рис. 3.18, для, например, контурной матрицы решения  $Y_c$  соединенной сети (вектора, заданного в контурах) состоит из следующих этапов.

1. Задание исходных параметров сети: метрических параметров ветвей – матрицей  $Z$  (или  $Y$ ) свободных ветвей, структурных параметров соединенной сети – матрицей преобразования  $C$  (или  $A$ ), а также компонентами наложенного вектора  ${}^m\mathbf{d}$  (или  ${}^j\mathbf{d}$ ), в свободных ветвях –  ${}^m d_a^0$  или  ${}^j d_0^a$ .

2. Разделение соединенной сети на подсети, путем выделения отдельных, несвязанных друг с другом блоков в матрице преобразования  ${}^m C^1, \dots, {}^m C^s, {}^m C^{s+1=r}$  (или матрицы инцидентий, или наглядным разделением графа сети на компоненты, или иным методом декомпозиции графа на несвязанные компоненты). Размер подсетей и способ деления на подсети – выделение сети соединений подсетей или деление подсетей в узлах – определяются условиями задачи.

3. Выделение подматрицы изменений в матрице преобразования  $DC^s, DC^r$  – т.е. строк тех путей, которые замыкаются при соединении подсетей (и, соответственно, размыкались при разделении сети на подсети).

4. Расчет  $s$  подсетей и  $(s+1)$  сети соединения подсетей, который производится по формуле  $Y^l_{cs} = {}^m C^s_t ({}^m C^s Z_s {}^m C^s_t)^{-1} {}^m C^s$ , и может выполняться на последовательной машине, на ЭВМ с параллельной архитектурой, сети ЭВМ, сети транспьютеров и т.д.

5. Начало расчета сети пересечений. Эта сеть обеспечивает взаимодействие частей в целой сети. Она состоит из ветвей, которые входят в состав изменяемых путей. Т.е. замкнутых путей, разъединяемых в разомкнутые пути при разделении на подсети; или разомкнутых путей, соединяемых в замкнутые пути при соединении частей в целое, когда подсети соединяются в связанную сеть.

Расчет блоков взаимодействия подсетей с сетью изменений:  $DC^s (I - Y^l_{cs} Z)$ , которые трижды повторяются в формулах расчета сети при изменениях структуры – как в одной сети, так и при разделении сети на подсети, например, в (3.206) или в (3.209). Для контурной матрицы  $Y^l_c$  это означает, что двойственная матрица решения подсетей и сети соединений преобразуется к изменяемым путям, поскольку  $(I - Y^l_{cs} Z) = Y Z^l_{cs}$ . На этом этапе расчеты можно выполнять параллельно.

6. Построение метрической матрицы для двойственной  $(s+2)$ -сети изменений (пересечений). Эта сеть составлена только из разделяемых при декомпозиции контуров, ее порядок сравним с порядком подсистем. Матрица метрики этой сети обеспечивает двойственное изменение решения при сохранении инварианта двойственных сетей:

$$DZ_{s+2} = DC^s Z (I - Y^l_{cs} Z) DC^s_t = DC^s DZ^l_{cs} DC^s_t.$$

Расчеты вклада каждой подсистемы в эту матрицу можно выполнить параллельно.

7. Сама матрица изменения метрики  $DZ_{s+2}$  получается суммированием вкладов всех подсетей в виде:

$$DZ_{s+2} = DC^l Z^l_{c1} DC^l_t + \dots + DC^s DZ^l_{cs} DC^s_t + DC^{s+1} DZ^l_{cs+1} DC^{s+1}_t.$$

Обращение этой матрицы  $DY_{s+2} = (DZ_{s+2})^{-1}$ , если ее порядок сопоставим с порядком подсистем и сети соединений, выполняется на одной ЭВМ. Если  $(s+2)$ -сеть велика по сравнению с подсетями, то можно и ее также рассчитать по частям, но уже с помощью двойственного алгоритма.

8. Матрица решения для совокупности путей, изменяемых при изменении структуры (например, замыкаемых контуров), имеет вид  $DY^{s+2}_c = DC^s_t (DZ_{s+2})^{-1} DC^s$ . Эта матрица воздействует на двойственные матрицы решения подсетей и дает блоки матрицы изменения  $DY^{gd}_c = (I - Y^l_{cg} Z_g) DC^g_t DY^{s+2}_c DC^d (I - Y^l_{cd} Z_d)$ , где  $g, d$  меняются от 1 до  $(s+1)$ . Смысл данных блоков матрицы изменения в том, что они изменяют значения метрических параметров подсетей в те значения, которые они должны иметь в соединенной сети. Эти расчеты выполняются параллельно.

При практической реализации алгоритма удобнее вычислять блок матриц из пункта 5, а именно  $DC^g (I - Y_{cg}^l Z_g)$ , (а не матрицу  $DY_c^{s+2} = DC_t^s (DZ_{s+2})^{-1} DC^s$  для  $(s + 2)$ -сети). Это означает приведение матриц решения подсетей к изменяемым путям.

9. Таким образом, получаем матрицу изменения решения  $DY_c$ . Она суммируется с матрицей решения  $Y_c^l$  в матрицу решения соединенной сети  $Y_c^2 = Y_c^l + DY_c$  – если число переменных при соединении подсетей растет; либо вычитается, если число переменных при соединении уменьшается:  $Z_c^2 = Z_c^l - Z DY_c Z$ . Этот этап можно выполнять параллельно. Он дает матрицу решения соединенной сети.

10. Если задан наложенный вектор  ${}^m d_a^0$ , то умножая на него матрицу решения (параллельно) получим искомые компоненты в соединенной сети  ${}^m d_c^a = Y_c^2 {}^m d_a^0$ .

Представленная общая последовательность алгоритма расчета сети по частям с использованием параллельных процессоров (схема реализации этого алгоритма дана на рис. 3.18) предназначена для описания поведения сети как замкнутой системы, т.е. базисом описания которой являются контуры, замкнутые пути.

Если сеть рассматривается как открытая система, базисом описания которой являются разомкнутые пути, в которой двойственный вектор разомкнутых путей  ${}^j d$  задан контравариантными компонентами  ${}^j d_a^0$ , или надо найти матрицу решения для разомкнутых путей  $Z_c^2$ , то эти десять этапов алгоритма расчета сети по частям повторяются с надлежащими двойственными изменениями.

Соответствующая схема алгоритма расчета сети по частям для разомкнутых путей (открытая система) получается заменой всех величин на двойственные величины.

Для расчета двойственной сети по частям данные алгоритмы меняются местами, т.е. алгоритм расчета замкнутых путей данной сети применяется для расчета разомкнутых путей в двойственной сети, и наоборот.

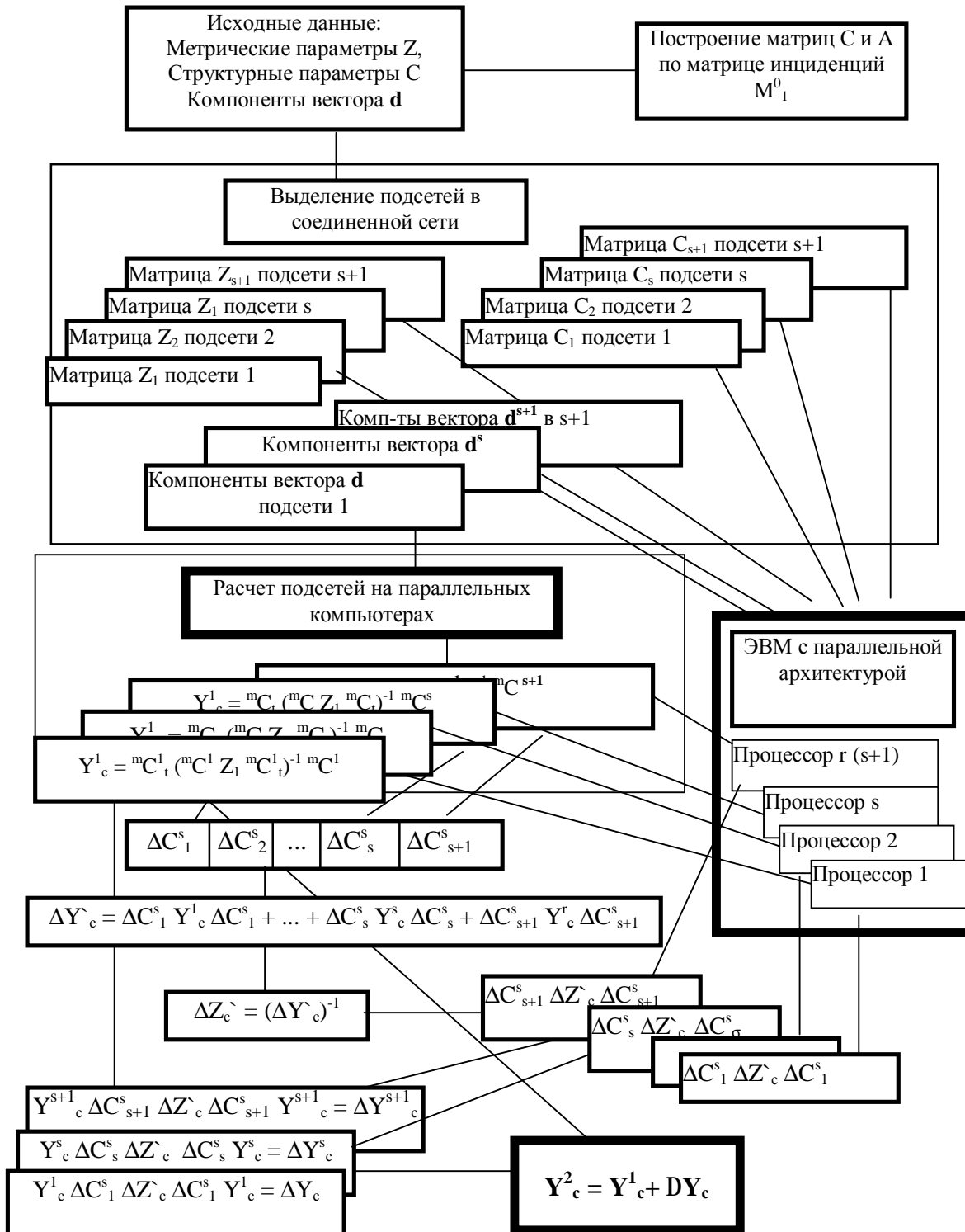


Рис. 3.18. Общая схема алгоритма расчета сети по частям с использованием параллельных процессоров (для контуров, замкнутая система).

Алгоритм расчета сети по частям для разомкнутых путей (открытая система) получается заменой всех величин на двойственные. Для расчета двойственной сети по частям данные алгоритмы меняются местами

### 3.4.4. Пример расчета сети по частям

В качестве примера рассмотрим расчет по частям контурной матрицы решения, которую обозначим как  $Y^2_c$ , для сети на рис. 3.17.д, матрица преобразования для которой уже была получена в (3.198). Подсети, на которые разделена эта сеть, представлены на рис. 3.17. а, б, в. Матрицы преобразования этих подсетей  ${}^m C^1$ ,  ${}^m C^2$  и  ${}^m C^r$  представлены, соответственно, строками 1<sup>^</sup>, 4<sup>^</sup>, 7<sup>^</sup> матрицы (3.198). Таким образом, они имеют вид:

$$\begin{array}{l} {}^m C^1 = 1^{\wedge} \\ {}^m C^2 = 4^{\wedge} \\ {}^m C^r = 7^{\wedge} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 & & & & & & & & \\ \hline & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ \hline & & & & & & 1 & -1 & 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{l} m \\ m \\ m \end{array}$$

Матрицу решения, объединяющую все матрицы решения подсетей, обозначим как  $Y^1_c$ ; она имеет ненулевые элементы только в блоках вдоль главной диагонали, поэтому можно рассчитать эти блоки параллельно и независимо друг от друга. Это позволит выполнить первые этапы алгоритма расчета сети по частям.

Для упрощения расчетов будем считать метрические параметры ветвей единичными. Таким образом, метрическая матрица свободных ветвей диагональная, единичная. Тогда получим матрицы решения для подсетей и сети соединений. В разделе 3.4.3 получению матриц решения подсистем соответствует этап 4 алгоритма расчета по частям. Для сети 1 матрицей преобразования  ${}^m C^1$  являются первые три столбца строки 1<sup>^</sup> в матрице (3.198), а матрица решения имеет вид:

$$Y^1_{c1} = {}^m C^1_t ({}^m C^1 {}^m C^1_t)^{-1} {}^m C^1 = \quad (3.218)$$

$$\begin{array}{l} 1^{\wedge} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \left( \begin{array}{c} 1^{\wedge} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 1^{\wedge} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right)^{-1} \begin{array}{c} 1^{\wedge} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 1/3 \\ \\ \end{array}$$

Для подсети 2, для которой матрица преобразования  ${}^m C^2$  – столбцы 4, 5, 6 строки 4<sup>^</sup> в матрице (3.198), матрица решения имеет вид:

$$Y^1_{c2} = {}^m C^2_t ({}^m C^2 {}^m C^2_t)^{-1} {}^m C^2 = \quad (3.219)$$

$$\begin{array}{l} 4^{\wedge} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \left( \begin{array}{c} 4^{\wedge} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 4^{\wedge} \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right)^{-1} \begin{array}{c} 4^{\wedge} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 1/3 \\ \\ \end{array}$$

Для сети соединений ( $r$ -сети), для которой матрица преобразования  ${}^m C^r$  – столбцы 7, 8, 9, 10 строки 7<sup>^</sup> в матрице (3.198), матрица решения имеет вид:



$$Y^l_{cr} = {}^m C^r_t ({}^m C^r {}^m C^r_t)^{-1} {}^m C^r = \tag{3.220}$$

$$= \begin{matrix} & \overset{7}{\phantom{7}} \\ 7 & \boxed{1} \\ 8 & \boxed{-1} \\ 9 & \boxed{1} \\ 10 & \boxed{1} \end{matrix} \left( \begin{matrix} & \overset{7}{\phantom{7}} & \overset{8}{\phantom{8}} & \overset{9}{\phantom{9}} & \overset{10}{\phantom{10}} \\ 7 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 8 & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{-1} \\ 9 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 10 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{matrix} \right)^{-1} \begin{matrix} & \overset{7}{\phantom{7}} \\ 7 & \boxed{1} \\ 8 & \boxed{-1} \\ 9 & \boxed{1} \\ 10 & \boxed{1} \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \overset{7}{\phantom{7}} & \overset{8}{\phantom{8}} & \overset{9}{\phantom{9}} & \overset{10}{\phantom{10}} \\ 7 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 8 & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{-1} \\ 9 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 10 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{matrix} \cdot 1/4$$

Таким образом, выполнили расчеты подсетей – *этап 4* алгоритма расчета по частям. Расчеты всех подсетей могут выполняться для каждой сети параллельно и независимо от других. Т.е. на этом этапе возможно применение вычислительной техники с параллельной архитектурой, применение распределенных структур вычислений. Для сетевых моделей, представляющих крупномасштабные системы с большими потоками информации, расчеты, обработка данных могут проводиться в суперкомпьютерных центрах.

Далее выполняется *этап 5*, в соответствии с формулой (3.206). На этом этапе расчета матрицы решения подсетей начинают формировать матрицу решения сети изменений (пересечений). Т.е. сети, включающей в себя те пути, которые замыкаются при соединении подсетей (или, соответственно, размыкаются при разъединении подсетей). Сеть пересечений состоит из ветвей тех путей, которые проходят через разные подсети и сеть соединения (если таковая выделена в отдельную подсеть), т.е. «пересекают» их. По этим путям как раз и происходит взаимодействие частей сети, которое соединяет их в единое целое.

По сути, этот этап состоит в получении матрицы (s+2)-сети в квадратных скобках (3.206). Для этого в каждой подсети вычисляются выражения вида  $(I - Y^l_{cs})$ , т.е. полученные матрицы решения подсетей вычитаются из единичной матрицы. В результате получается двойственная матрица решения  $Z^l_c$  (для разомкнутых путей). Затем, как и при изменении соединений в связанной сети, эти матрицы умножаются на матрицы изменения путей ΔC. Для каждой сети это можно сделать отдельно и параллельно, в данном примере – в соответствии с разбиением строк 8 и 9 матрицы (3.198) по подсетям. Для подсети 1 результаты расчета этого блока имеют следующий вид:

$$(I - Y^l_{c1}) DC^l_t = Z^l_{c1} DC^l_t = \tag{3.221}$$

$$= \begin{matrix} & \overset{1}{\phantom{1}} & \overset{2}{\phantom{2}} & \overset{3}{\phantom{3}} \\ 1 & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{-1} \\ 2 & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ 3 & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{2} \end{matrix} \cdot 1/3 \quad \begin{matrix} & \overset{8}{\phantom{8}} & \overset{9}{\phantom{9}} \\ 1 & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \\ 2 & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \\ 3 & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{-1} \end{matrix} = \begin{matrix} & \overset{8}{\phantom{8}} & \overset{9}{\phantom{9}} \\ 1 & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{1} \\ 2 & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{-1} \\ 3 & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{-2} \end{matrix} \cdot 1/3$$

Для подсети 2 получим:

$$(I - Y_{c2}^l) DC_t^2 = (I - Y_{cs}^l) DC_t^s = Z_{cs}^l DC_t^s = \tag{3.222}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & \\ & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/3$$

Для сети соединений, состоящей из ветвей, которые связывают подсети:

$$(I - Y_{c,s+1}^l) DC_t^{s+1} = (I - Y_r^l) DC_t^r = Z_{cr}^l DC_t^r = \tag{3.223}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & \\ 1 & \\ & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/2$$

Эти вычисления также могут выполняться для каждой подсети независимо друг от друга на параллельных процессорах.

Этап 6 алгоритма состоит в расчете метрической матрицы (импедансов)  $DZ_{s+2} = DZ^*$  двойственной сети, которая включает в себя замыкаемые при соединении пути. Вид этой матрицы в (3.206):  $DZ^* = DC^s ((I - Y_{cs}^l) DC_t^s)$ . Эта формула включает в себя расчеты составляющих матрицы сети изменений для каждой подсети отдельно, (можно выполнять на параллельных процессорах). Матрица  $DZ_{s+2}$  равна сумме этих матриц по всем подсетям. Поскольку в каждой подсети переменные приводятся к одной и той же системе координат – изменяемых путей, то их можно суммировать и получить общее воздействие на  $(s+2)$  сеть пересечений со стороны всех подсетей, включая  $(s+1)$  сеть соединений. Для первой подсети используем результат, полученный в соотношении (3.221), и соответствующий блок матрицы (3.198). Тогда компонента метрической матрицы пересечений примет следующий вид:

$$DZ_l^* = DC^l (I - Y_{c1}^l) DC_t^l = \tag{3.224}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & 1 \\ & -1 \\ & -2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} & \\ & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/3$$

Для второй подсети, используя матрицу (3.198) и результат, полученный в (3.222):

$$DZ_2^* = DC^2 (I - Y_{c2}^l) DC_t^2 = \tag{3.225}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & \\ & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/3$$

Для r-сети соединений, используя матрицу (3.198) и результат, полученный в (3.223):

$$DZ_r^* = DC^{s+1} ((I - Y_{c,s+1}^l) DC_t^{s+1}) = DC^{s+1} (I - Y_r^l) DC_t^r = \tag{3.226}$$

$$= \begin{matrix} & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{matrix} 8^{\setminus} \\ 9^{\setminus} \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & \\ & 1 & & -1 \\ & & & 1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 8^{\setminus} & 9^{\setminus} \\ 7 & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 8 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 9 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ 10 & \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix} \cdot 1/2 = \begin{matrix} & 8^{\setminus} & 9^{\setminus} \\ \begin{matrix} 8^{\setminus} \\ 9^{\setminus} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Суммируя значения компонент матриц в соотношениях (3.224–3.226), получим метрическую матрицу (импедансов) двойственной сети изменяемых путей:

$$DZ^{\setminus} = DC^s ((I - Y_{cs}^d) DC_t^s) = DZ_{l1}^{\setminus} + DZ_{l2}^{\setminus} + DZ_{r1}^{\setminus} = \quad (3.227)$$

$$= \begin{matrix} & 8^{\setminus} & 9^{\setminus} \\ \begin{matrix} 8^{\setminus} \\ 9^{\setminus} \end{matrix} & \begin{bmatrix} & \\ & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/3 + \begin{matrix} & 8^{\setminus} & 9^{\setminus} \\ \begin{matrix} 8^{\setminus} \\ 9^{\setminus} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & \\ & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/3 + \begin{matrix} & 8^{\setminus} & 9^{\setminus} \\ \begin{matrix} 8^{\setminus} \\ 9^{\setminus} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & 8^{\setminus} & 9^{\setminus} \\ \begin{matrix} 8^{\setminus} \\ 9^{\setminus} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & \\ & 5 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 1/3$$

Полученная матрица соответствует метрической матрице такой сети, переменными которой являются пути, изменяемые при соединении, т.е. замыкаемые пути. Эти же пути размыкались при разъединении, разделении сети на подсети. Эти пути могут проходить через ветви нескольких подсетей и сети соединений, т.е. по этим путям подсети «пересекаются» друг с другом, взаимодействуют. Отсюда и название этой сети – «сеть пересечений». С другой стороны, общие для подсетей пути (контуры) разрываются при разделении; при этом контуры превращаются в разомкнутые пути. Отсюда другое название этой сети – «сеть изменений». Такая сеть является двойственной по отношению к подсетям, т.е. двойственной также к исходной сети.

Этап 7 алгоритма расчета сети по частям представляет собой расчет этой двойственной сети изменений. Метрическая матрица, обратная к полученной матрице  $DZ^{\setminus}$ , обозначена  $DY^{\setminus}$ . Она равна:

$$DY^{\setminus} = (DZ^{\setminus})^{-1} = \begin{matrix} & 8^{\setminus} & 9^{\setminus} \\ \begin{matrix} 8^{\setminus} \\ 9^{\setminus} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3/5 & \\ & 3/5 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.228)$$

Расчет этой матрицы можно производить на одном процессоре, если ее порядок не очень значительно отличается от наибольшего порядка обрабатываемых матриц подсетей. Если же сеть пересечений оказалась велика, то и ее можно рассчитать по частям, используя такой же алгоритм, но для двойственной сети, т.е. по формуле (3.209). Сеть пересечений может оказаться велика для сильно связанной сети, когда при разделении на части придется разорвать много контуров, превратить их в разомкнутые пути, т.е. значительно изменить размерности исходных подпространств.

Как правило, чем больше элементов в системе, т.е. чем больше ее размерность, тем она менее связанная. Не вдаваясь в тонкости определения связности (она в данном случае показывает соотношение количества элементов сети и количества связей между ними), отметим, что меньшей связности соответствует меньшая плотность (доля) ненулевых элементов

в метрической матрице сети. Известно, что с ростом размеров системы, ее связность, как правило, снижается, и отдаленные элементы (разделенные большим количеством других элементов) оказывают все меньшее влияние друга на друга. Например, в экономической матрице В.Леонтьева порядка нескольких тысяч строк, оказываются не более 3-4% ненулевых элементов. Малое заполнение ненулевыми элементами метрических матриц сложных систем породило направление вычислительной математики, известное как «разреженные матрицы», или «слабо заполненные матрицы», где при расчетах производят действия только с элементами, которые отличны от нуля.

*Этап 8* – расчет новых *воздействий* со стороны сети изменений (пересечений) на подсети и сеть соединений. Здесь те изменения метрики и векторов, которые произошли при разделении сети на подсети (и были *запасены* в двойственной сети к сети пересечений), возвращаются на свои места, приводя все параметры к соединенному виду. Расчеты выполняются на параллельных процессорах. Для подсети 1 получим, в соответствии с (3.206), используя результаты, уже полученные в (3.221) и в (3.228):

$$(I - Y_{c1}^l) DC_t^l DY^c = \quad (3.229)$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 8^c & 9^c \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{array} \\ \end{array} \begin{array}{c} 1/3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} 8^c & 9^c \\ 3/5 & \\ & 3/5 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 8^c & 9^c \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{array} \\ \end{array} \begin{array}{c} 1/5 \\ \\ \end{array}$$

Для подсети 2 – из результатов, полученных в соотношениях (3.222) и (3.228):

$$(I - Y_{c2}^l) DC_t^2 DY^c = (I - Y_{cs}^l) DC_t^s DY^c = \quad (3.230)$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 8^c & 9^c \\ 4 & -2 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{array} \\ \end{array} \begin{array}{c} 1/3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} 8^c & 9^c \\ 3/5 & \\ & 3/5 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 8^c & 9^c \\ 4 & -2 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{array} \\ \end{array} \begin{array}{c} 1/5 \\ \\ \end{array}$$

Для сети соединений – из соотношений (3.223) и (3.228):

$$(I - Y_{c,s+1}^l) DC_{s+1}^l DY^c = (I - Y_r^l) DC_r^l DY^c = \quad (3.231)$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 8^c & 9^c \\ 7 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \end{array} \\ \end{array} \begin{array}{c} 1/2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} 8^c & 9^c \\ 3/5 & \\ & 3/5 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 8^c & 9^c \\ 7 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \end{array} \\ \end{array} \begin{array}{c} 3/10 \\ \\ \\ \end{array}$$

Продолжение *этапа 8* – это вычисление блоков, составляющих матрицу изменения решения  $DY_c$  исходной сети. Для этого каждая матрица, полученная в (3.229–3.231) умножается на каждую транспонированную матрицу, полученную в (3.221–3.223).

Здесь и получаем значения изменяемых метрических параметров не только в каждой подсети, но и параметры взаимодействия подсетей в соединенной сети. Это блоки воздействия каждой подсети на каждую другую подсеть, включая себя. Это *наиболее важная*

характеристика, отличающая соединенную сеть от отдельных, не взаимодействующих подсетей. Все перемножения матриц на этом этапе алгоритма также можно выполнить параллельно, на независимых процессорах.

Будем обозначать (в соответствии с пунктом 8 алгоритма) получаемые составляющие блоки матрицы изменения решения соединенной сети  $DY_c$  как  $\Delta Y_c^{gd}$ , где каждый индекс  $g, d$  обозначает одну из взаимодействующих подсетей. Например,  $DY_c^{gd} = DY_c^{11}$  означает умножение матрицы (3.229) на транспонированную матрицу (3.221):

$$(3.232) \quad DY_c^{11} = (I - Y_{cl}^1) DC_t^1 DY_c DC^1 (I - Y_{cl}^1) =$$

$$DY_c^{11} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & 1 \\ & -1 \\ & -2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{5} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{3} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{15}$$

В силу симметрии метрической матрицы свободных ветвей исходной сети (тогда она диагональная и единичная), достаточно получить только три блока матрицы  $\Delta Y_c$  по диагонали, а также три недиагональных блока, а три других недиагональных будут им симметричны, т.е. транспонированы. Один диагональный блок получен в соотношении (3.232), два других имеют вид  $DY_c^{22}$  – из соотношений (3.230) и (3.222) как транспонированной матрицы:

$$(3.233) \quad DY_c^{22} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{5} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ & & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{3} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{15}$$

а блок  $DY_c^{rr}$  – из соотношений (3.231) и (3.223) как транспонированной матрицы:

$$(3.234) \quad \Delta Y_c^{rr} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{3}{10} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & & & -3 \\ & 3 & 3 & \\ & 3 & 3 & \\ -3 & & & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{10}$$

Три блока матрицы изменения решения –  $DY_c^{12}$ ,  $DY_c^{1r}$  и  $DY_c^{2r}$  – дают параметры взаимодействия подсетей в полной сети. Здесь, например,  $\Delta Y_c^{12}$  обеспечивает взаимодействие подсети 1 и подсети 2. Или, например,  $DY_c^{1r}$  обеспечивает взаимодействие подсети 1 и сети соединений  $r = s+1$ . Три других блока –  $DY_c^{21}$ ,  $DY_c^{r1}$  и  $DY_c^{r2}$  – транспонированы по отношению к ним. Получим  $DY_c^{12}$ :

$$DY_c^{12} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & 1 \\ & -1 \\ & -2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{5} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ & & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{3} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Это показывает, что ветви подсетей не влияют друг на друга и в соединенной сети. Получим  $\Delta Y_c^{1r}$ , перемножая матрицы из соотношений (3.229) и (3.223), причем последняя транспонирована:

$$DY_c^{1r} = ((I - Y_{cl}^l) DC_t^l DY^r) DC^r (I - Y_{cr}^l) = \tag{3.235}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & 1 \\ & -1 \\ & -2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{5} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{10}$$

Наконец, перемножая матрицы из соотношений (3.230) и (3.223), которую берем как транспонированную матрицу, получим:

$$DY_c^{2r} = ((I - Y_{c2}^l) DC_t^2 DY^r) DC^r (I - Y_{cr}^l) = \tag{3.236}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{5} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{10}$$

Все вместе матрицы  $DY_c^{1l}$ ,  $DY_c^{22}$ ,  $DY_c^{rr}$ ,  $DY_c^{12}$ ,  $DY_c^{1r}$ ,  $DY_c^{2r}$ ,  $DY_c^{2l}$ ,  $DY_c^{r1}$  и  $DY_c^{r2}$ , которые можно получить на параллельных процессорах, составят матрицу изменений  $\Delta Y_c$ , которая в сумме с матрицей  $Y_c^l$  (3.218–3.220), дает матрицу решения  $Y_c^2$  как в (3.205):

$$Y_c^2 = Y_c^l + DY_c^l = \begin{matrix} & \begin{matrix} l & s & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} l \\ s \\ s+l=r \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{cl}^l & & \\ & Y_{c2}^l & \\ & & Y_{cr}^l \end{bmatrix} \end{matrix} + \begin{matrix} & \begin{matrix} l & s & s+l \end{matrix} \\ \begin{matrix} l \\ s \\ s+l=r \end{matrix} & \begin{bmatrix} DY_c^{1l} & DY_c^{12} & DY_c^{1r} \\ DY_c^{2l} & DY_c^{22} & DY_c^{2r} \\ DY_c^{r1} & DY_c^{r2} & DY_c^{rr} \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{3.237}$$

Если подставить вместо каждого блока его числовые значения, полученные выше, то матрица изменений  $\Delta Y_c$  предстает в следующем виде:

$$DY_c^l = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 & & & & -3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & & & & 3 & -3 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 8 & & & & 6 & -6 & -6 & -6 \\ & & & 8 & -4 & -4 & -6 & -6 & -6 & 6 \\ & & & -4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ & & & -4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 6 & -6 & 3 & 3 & 9 & & & -9 \\ 3 & -3 & -6 & -6 & 3 & 3 & & 9 & 9 & \\ 3 & -3 & -6 & -6 & 3 & 3 & & 9 & 9 & \\ 3 & -3 & -6 & 6 & -3 & -3 & -9 & & & 9 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{30} \tag{3.238}$$

Здесь выделены блоки матриц изменения решения  $DY_c^{gg}$ , а значения в блоках приведены к общему знаменателю. При суммировании с матрицей решения подсистем в соотношении (3.238), изменятся только выделенные блоки и  $Y_c^2$  соединенной сети примет окончательный вид. Вообще говоря, для расчетов эту матрицу полностью выписывать нет необходимости, как, впрочем, и в соотношении (3.238), поскольку вычисления могут производиться

параллельно, т.е. по отдельным блокам. Однако для наглядности матрицу решения соединенной сети покажем здесь полностью:

$$Y_c^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \end{array} \begin{array}{|cccccccccc|} \hline 8 & -8 & 4 & & & & -2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline -8 & 8 & -4 & & & & 2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 4 & -4 & 12 & & & & 4 & -4 & -4 & -4 \\ \hline & & & 12 & 4 & 4 & -4 & -4 & -4 & 4 \\ \hline & & & 4 & 8 & 8 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ \hline & & & 4 & 8 & 8 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ \hline -2 & 2 & 4 & -4 & 2 & 2 & 11 & -5 & 5 & -1 \\ \hline 2 & -2 & -4 & -4 & 2 & 2 & -5 & 11 & 1 & -5 \\ \hline 2 & -2 & -4 & -4 & 2 & 2 & 5 & 1 & 11 & 5 \\ \hline 2 & -2 & -4 & 4 & -2 & -2 & -1 & -5 & 5 & 11 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad 1/20 \quad (3.239)$$

В этой окончательной матрице решения соединенной сети все элементы по завершении вычислений приведены к общему знаменателю.

Для проверки правильности проведенных расчетов зададим компоненты вектора (источники воздействия) в подсетях и рассчитаем для каждого блока отклики. Полученные компоненты заданного вектора в соединенной сети проверим на выполнение законов Кирхгофа в ее узлах и контурах. Итак, пусть вектор  ${}^m d$  задан в ветвях сети следующими ковариантными компонентами воздействия:

$${}^m d_a^0 = \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{array}{|cccccccccc|} \hline & 2 & & & 1 & 2 & & 1 & 3 & \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (3.240)$$

Отклики на ветвях соединенной сети получим умножением матрицы в соотношении (3.239) на вектор в соотношении (3.240) параллельно, умножая каждый блок полученной матрицы решения на соответствующие компоненты вектора воздействия. Затем суммируем значения в полные компоненты откликов для вектора  ${}^m d$  в ветвях соединенной сети.

Получим следующие контравариантные компоненты отклика для вектора в замкнутых путях, обозначенные как  ${}^m d_c^{ab} = DY_c^{ag} {}^m d_g^0$ .

$${}^m d_c^{11} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \begin{array}{|ccc|} \hline 8 & -8 & 4 \\ \hline -8 & 8 & -4 \\ \hline 4 & -4 & 12 \\ \hline \end{array} \quad 1/20 \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline -16 \\ \hline 16 \\ \hline -8 \\ \hline \end{array} \quad 1/20 \end{array} \quad (3.241)$$

$${}^m d_c^{1r} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \begin{array}{|cccc|} \hline -2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 4 & -4 & -4 & -4 \\ \hline \end{array} \quad 1/20 \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline -8 \\ \hline -16 \\ \hline \end{array} \quad 1/20 \end{array} \quad (3.242)$$

Ясно, что компоненты  ${}^m d_c^{12} = {}^m d_c^{21} = 0$ , поскольку соответствующие им блоки матриц  $DY_c^{12}$  и  $DY_c^{21}$  в соотношениях (3.237) и (3.238) равны нулю:  $DY_c^{12} = DY_c^{21} = 0$ .

Оставшиеся компоненты получаются следующие:

$${}^m d_c^{22} = \begin{array}{c} 4 \quad 5 \quad 6 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 12 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 8 & 8 \\ \hline 4 & 8 & 8 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \frac{1}{20} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 12 \\ \hline 24 \\ \hline 24 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20} \quad (3.243)$$

$${}^m d_c^{2r} = \begin{array}{c} 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -4 & -4 & -4 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & -2 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \frac{1}{20} = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -16 \\ \hline 8 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20} \quad (3.244)$$

$${}^m d_c^{r1} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & -2 & -4 \\ \hline 2 & -2 & -4 \\ \hline 2 & -2 & -4 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \frac{1}{20} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 2 \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline -4 \\ \hline -4 \\ \hline -4 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20} \quad (3.245)$$

$${}^m d_c^{r2} = \begin{array}{c} 4 \quad 5 \quad 6 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline -4 & 2 & 2 \\ \hline -4 & 2 & 2 \\ \hline -4 & 2 & 2 \\ \hline 4 & -2 & -2 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \frac{1}{20} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 6 \\ \hline 6 \\ \hline -6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20} \quad (3.246)$$

$${}^m d_c^{rr} = \begin{array}{c} 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & -5 & 5 & -1 \\ \hline -5 & 11 & 1 & -5 \\ \hline 5 & 1 & 11 & 5 \\ \hline -1 & -5 & 5 & 11 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \frac{1}{20} = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 14 \\ \hline 34 \\ \hline 10 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20} \quad (3.247)$$

Полные отклики по каждой ветви, входящей в подсети соединенной сети, можем получить суммированием компонент, дающих вклад в одинаковые ветви в соотношениях (3.241–3.247). Это приводит к следующим результатам:

$${}^m d_c^{1} = {}^m d_c^{11} + {}^m d_c^{12} + {}^m d_c^{1r} = \quad (3.248)$$

$$= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -16 \\ \hline 16 \\ \hline -8 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20} + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline -8 \\ \hline -16 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -8 \\ \hline 8 \\ \hline -24 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20}$$

$${}^m d_c^{2} = {}^m d_c^{21} + {}^m d_c^{22} + {}^m d_c^{2r} = \quad (3.249)$$

$$= \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 12 \\ \hline 24 \\ \hline 24 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20} + \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -16 \\ \hline 8 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -4 \\ \hline 32 \\ \hline 32 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{20}$$



Полные отклики в отдельных ветвях сети соединений также можно получить суммированием соответствующих компонент (3.245–3.247):

$$\begin{aligned}
 {}^m d_c^r &= {}^m d_c^{r1} + {}^m d_c^{r2} + {}^m d_c^{rr} = & (3.250) \\
 &= \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline -4 \\ \hline -4 \\ \hline -4 \\ \hline \end{array} 1/20 + \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 6 \\ \hline 6 \\ \hline -6 \\ \hline \end{array} 1/20 + \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 14 \\ \hline 34 \\ \hline 10 \\ \hline \end{array} 1/20 = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 20 \\ \hline 16 \\ \hline 36 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} 1/20
 \end{aligned}$$

Для наглядности будем, как и ранее, использовать для проверки электрические аналогии. Т.е. считаем, что ковариантные компоненты представляют напряжения (разности потенциалов) на ветвях, а контравариантные компоненты – токи в ветвях.

Для проверки подставим полученные результаты на ветви сети рис. 3.17.д, который воспроизведен на рис. 3.19, и проверим законы Кирхгофа. Поскольку мы приняли допущение, что метрические параметры единичные (это означает, что сопротивления ветвей равны их проводимостям и равны единицам, а взаимные воздействия свободных ветвей равны нулю), то ковариантные и контравариантные компоненты совпадают, поэтому их значения запишем один раз в каждой ветви. Это означает, что в данном случае ток в каждой ветви численно равен напряжению.

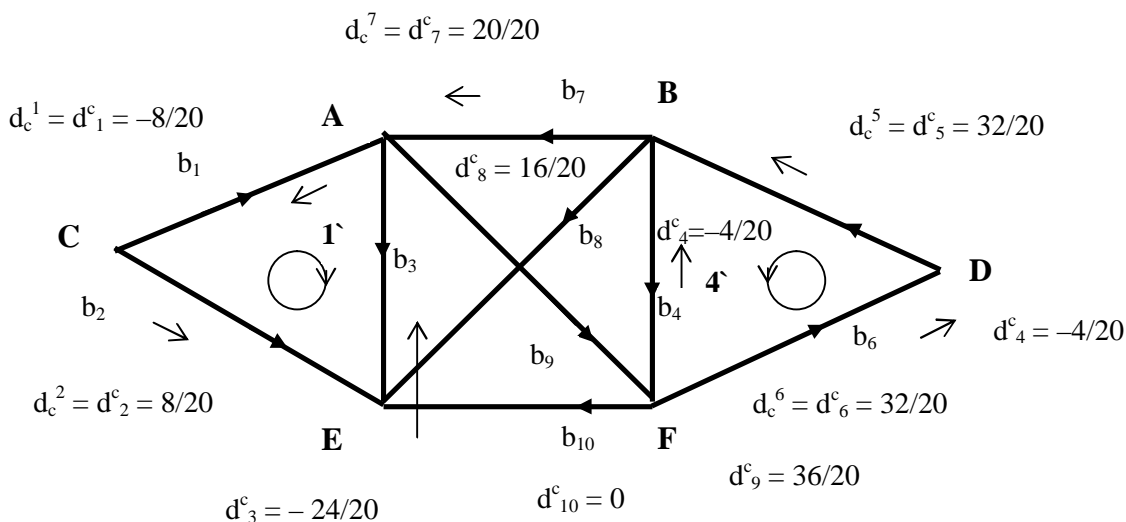


Рис. 3.19. Результаты расчета по частям откликов на ветвях соединенной сети при заданных воздействиях

Первый закон Кирхгофа (ЗКТ) – сумма токов в каждом узле равна нулю:

- узел А:  $+d_c^1 - d_c^3 + d_c^7 - d_c^9 = (-8 + 24 + 20 - 36)/20 = 0$ ;
- узел В:  $-d_c^7 - d_c^8 - d_c^4 + d_c^5 = (-20 - 16 + 4 + 32)/20 = 0$ ;
- узел С:  $+d_c^1 - d_c^2 = (+8 - 8)/20 = 0$ ;

- узел D:  $+d_c^6 - d_c^5 = (32 - 32)/20 = 0$ ;
- узел E:  $+d_c^2 + d_c^3 + d_c^8 + d_c^{10} = (8 - 24 + 16 + 0)/20 = 0$ ;
- узел F:  $+d_c^4 - d_c^6 + d_c^9 - d_c^{10} = (-4 - 32 + 36 + 0)/20 = 0$ .

Таким образом, для данной сети ЗКТ полностью выполняется.

Второй закон Кирхгофа (ЗКН) – сумма напряжений (падения напряжения, разности потенциалов) по ветвям, составляющим каждый контур, равна сумме источников напряжения, ЭДС, заданных на тех же ветвях. Иначе говоря, сумма ковариантных компонент вектора (откликов) в ветвях каждого контура связанной сети равна сумме ковариантных компонент вектора, которые были заданы в свободных ветвях, составляющих данный контур.

Для получения этого равенства в каждом контуре необходимо сделать следующее:

- Сложить ковариантные компоненты (напряжения) на всех ветвях, которые входят в контур, с учетом их ориентации относительно контура. Компоненты (напряжения) ветвей, ориентированных против направления контура, входят в эту сумму со знаком минус, а те, которые ориентированы по направлению контура, входят в эту сумму со знаком плюс.
- Подставить в эту сумму значения компонент (напряжений), полученных в результате расчета (отклики), с их знаками плюс или минус.

Получим суммарное напряжение, падение напряжения в контуре (на ветвях контура), которое должны уравновесить источники напряжения. Это первая сумма.

- Составить сумму заданных компонент вектора (источников напряжения, воздействий) с учетом их собственных знаков плюс или минус, т.е. ориентации относительно направления тех ветвей, в которых они заданы. А также с учетом знаков ориентации самих ветвей относительно направления ориентации контура.

Получим сумму источников напряжения в контуре (или сумму источников воздействия), которая должна уравновесить падения напряжения на ветвях контура. Это вторая сумма, которая должна равняться первой. Иначе говоря, вычитая одну сумму из другой должны получить нуль по каждому контуру.

С учетом сказанного проверим баланс напряжений в контурах данной сети для проверки правильности полученных результатов.

Контур выбираем по матрице (3.198). Это пути 1`, 4`, 7`, 8` и 9`:

- контур 1` ( $+b_1 - b_2 + b_3$ ):  

$$(+d^1 - d^2 + d^3) - (-d^0) = (-8 - 8 - 24)/20 + 2 = 0$$
;
- контур 4` ( $+b_4 + b_5 + b_6$ ):  

$$(+d^4 + d^5 + d^6) - d^0 - d^6 = (-4 + 32 + 32)/20 - 1 - 2 = 0$$
;
- контур 7` ( $+b_7 - b_8 + b_9 + b_{10}$ ):

$$(+ d^c_7 - d^c_8 + d^c_9 + d^c_{10}) + d^0_8 - d^0_9 = (20 - 16 + 36 + 0)/20 + 1 - 3 = 0;$$

- контур 8` ( $-b_4 + b_8 - b_{10}$ ):

$$(- d^c_4 + d^c_8 - d^c_{10}) - d^0_8 = (4 + 16 - 0)/20 - 1 = 0;$$

- контур 9` ( $-b_3 + b_9 + b_{10}$ ):

$$(- d^c_3 + d^c_9 + d^c_{10}) - d^0_9 = (-(-24) + 36 + 0)/20 - 3 = 0.$$

Таким образом, для данной сети ЗКН также полностью выполняется. Это показывает, что *расчет сети по частям выполнен правильно*. Матрица решения получена так, что на каждом этапе вычисляются только ее отдельные блоки, что допускает выполнение всех операций с использованием ЭВМ с параллельной архитектурой или другой параллельной вычислительной техники.

Можно видеть, что *расчет проведен без итераций*, т.е. решение получено сразу, что обеспечивает эффективность применения данного метода декомпозиции и распараллеливания расчета задачи на уровне сети или сетевой модели предметной области. Такую возможность обеспечивает существование и применение инварианта двойственных сетей. Можно также одновременно использовать другие методы распараллеливания вычислений на более низких уровнях: от параллельного выполнения элементарных операций до блочных методов решения систем уравнений и методов вычислений с разреженными матрицами. Это еще более повысит общую эффективность расчетов.

### 3.4.5. Изменение величины вектора при изменении структуры сети

Значения откликов, характеризующих реакцию сети на приложенные воздействия, изменяются при изменении структуры связи ветвей. Рассмотрим изменения значений инвариантных параметров (например, квадрата величины вектора) при изменениях структуры (изменениях соединений ветвей, или декомпозиции на подсети). Суть любых изменений структуры одна – меняется число замкнутых и разомкнутых путей (и размерность их подпространств), вызванное изменением числа узлов и подсетей. Единую сущность этих преобразований подтверждают одинаковые формулы вычисления матриц решения (и компонент векторов) которые состоят в применении групповой последовательности (операторе) преобразования двойственных сетей (глава 2). Такие преобразования основаны на инварианте квадрата величины вектора, который связывает *метрические параметры* ветвей (метрические матрицы) и *структурные параметры* соединения этих ветвей в сети произвольной конфигурации, представленные матрицами преобразования базисов замкнутых и разомкнутых путей.

Фактически все формулы, рассмотренные в разделах 3.3 и 3.4, представляют собой проявление этой структурно-метрической закономерности, одна из форм которой была представлена соотношением (2.75), а в отсутствии метрики (единичная метрическая матрица)

– соотношением (2.76). При этом *любые изменения в структуре одной сети, одновременно приводят к компенсирующим (или дополнительным) изменениям в двойственной сети, так что сохраняется постоянной сумма метрических матриц этих сетей.* Более того, соотношения между матрицами решения двойственных сетей (3.16–3.19) использованы для получения формул расчета матриц решения при изменении структуры. Например, подставим в соотношение (3.16), связывающее матрицы решений сети свободных ветвей и связанных двойственных сетей, выражения для матриц решения типа (3.205) для замкнутых путей и (3.210) для разомкнутых путей, соответственно:

$$Y_c^2 = Y_c^1 + DY_c,$$

$$Z_c^2 = Z_c^1 - Z DY_c Z = Z_c^1 - DZ_c.$$

Им соответствуют аналогичные формулы пересчета матриц решения, тогда получим для сети с измененной структурой:

$$Y = Y_c^2 + Y Z_c^2 Y = Y_c^1 + DY_c + Y Z_c^1 Y - Y Z DY_c Z Y, \quad (3.251)$$

откуда, поскольку  $Y = (Z)^{-1}$ , проведем сокращения и получим такое же соотношение для исходной сети:

$$Y = Y_c^2 + Y Z_c^2 Y = Y_c^1 + Y Z_c^1 Y. \quad (3.252)$$

В результате получаем выражение матрицы решения сети из свободных ветвей через матрицы решения связанных двойственных сетей. Это и является формальным проявлением действия инварианта двойственных сетей, связывающего метрическую матрицу сети из свободных ветвей, обозначенную  $Y$ , с метрическими матрицами (решения) двойственных сетей –  $Y_c^2$ ,  $Z_c^2$  и  $Y_c^1$ ,  $Z_c^1$ . Аналогичное, но двойственное выражение можно записать для матрицы двойственной сети из свободных ветвей.

С точки зрения физики, изменения величины потока энергии, вызванные изменениями в структуре одной сети, немедленно приводят к таким изменениям в двойственной сети, при которых суммарный поток энергии через эти сети остается постоянным (при постоянных источниках) при любых изменениях в структуре соединения ветвей. Наглядно это проявляется в изменениях на круговой диаграмме рассеиваемой мощности в сети.

Суть круговой диаграммы в том, что рассеиваемая мощность в данной сети и в двойственной сети представлена площадью круга. Этот круг разделен пополам горизонтальной линией, так что верхняя часть относится к данной сети, а нижняя часть к двойственной сети. Для открытой сети с внешними источниками совокупные мощности (представляющие квадрат величины вектора потока энергии), рассеиваемые в данной сети и в двойственной сети составляют одну половину круга. Этот полукруг может изменять свое положение относительно горизонтальной линии. Для замкнутой сети с внутренними источниками совокупные мощности (представляющие квадрат величины вектора потока

энергии), рассеиваемые в данной сети и в двойственной сети составляют другую половину круга. Этот полукруг также может изменять свое положение относительно горизонтальной линии. Таким образом, диаграмма имеет два двойственных разделения, две дихотомии. Одно деление проходит между данной и двойственной сетью. Другое деление проходит между закрытой сетью (замкнутые пути) и открытой сетью (разомкнутые пути). Половина круга представляет мощность в замкнутых путях, а другая половина круга представляет мощность в разомкнутых путях. Наглядно такую диаграмму можно представить как детский мячик, состоящий из красной половины, и синей половины, наполовину погруженный в «жидкость». Изменение структуры приводит к вращению мячика, при котором меняются наблюдаемые доли красного и синего цвета над поверхностью, но сумма их площадей остается постоянной.

Если в сети заданы внешние источники и внутренние источники воздействия (энергии), то заполнены обе половины круговой диаграммы «мячика», причем площади его половин остаются постоянными (они пропорциональны мощности источников), пока не меняется величина источников. Если в сети заданы только внешние источники, или только внутренние источники воздействия, то заполнена только одна, соответствующая половина круга. При изменении структуры сети происходит только перераспределение площадей этих половин, относящихся к данной сети и двойственной сети. Это изменение площадей, представляющие изменение мощности в данной сети и двойственной сети, при сохранении их суммы в двух сетях, наглядно можно представить как вращение «мячика».

Изменения на диаграмме состоят в том, что при изменении структуры «мячик» вращается. Угол его поворота соответствует перераспределению потока энергии (мощности) *между данной и двойственной сетями, которые являются компонентами единой по своей сути сети*. Таким образом, само существование данного инварианта показывает, что каждая сетевая структура (в принципе многомерная, а не только состоящая из одномерных отрезков-ветвей) имеет две двойственные по отношению друг к другу компоненты, в которых каждому замкнутому пути соответствует разомкнутый путь, и наоборот. Эти компоненты-сети дополняют друг друга до единого целого.

Если нет векторов воздействия, то изменение структуры приводит к изменению метрических матриц, матриц решения двух двойственных сетей. Но сумма этих матриц для сети, состоящей из заданного набора ветвей, всегда остается постоянной. Таким образом, свойства двойственности с инвариантом присущи самой структуре сетей. А также систем, представленных сетевыми моделями.

Если сеть состоит из свободных замкнутых ветвей, то вся контурная часть мячика находится сверху, в наблюдаемом пространстве. При этом вся метрика разомкнутых путей –

ветвей, все компоненты вектора разомкнутых путей находятся снизу – в двойственном, ненаблюдаемом пространстве. Если сеть состоит из свободных разомкнутых ветвей – то наоборот. При соединении ветвей число путей любого типа меняется, и мячик поворачивается из горизонтального положения в наклонное положение. Если соединения ветвей изменить: наложить связи, (уменьшить число узлов) или разорвать связи (увеличить число узлов), то угол наклона мячика изменится. Дробность структуры проявляется в количестве, «спектре» возможных положений мячика. Точно такая же картина возникает при соединении подсетей в сеть, что естественно, поскольку все это суть одни и те же преобразования структуры сети.

Площадь секторов мячика определяется суммой квадратов величины вектора  ${}^m\mathbf{d}$  (или  ${}^j\mathbf{d}$ ) в ветвях сети (связанной, состоящей из подсетей или свободных ветвей). Таким образом, остаются постоянными площади секторов, соответствующих контурной и узловой составляющим круговой диаграммы (которые представлены на рис. 3.20). Это постоянство определяется суммой произведений ковариантных и контравариантных компонент вектора, соответствующих данной и двойственной сетям. Изменение угла наклона «мячика», связанное с изменением этих квадратов, обусловлено матрицами изменения решения –  $DY_c$  (или  $DZ_c$ ). Определим роль этих матриц во вращении мячика по данным уже рассчитанных примеров. Для этого произведем расчеты квадратов величины вектора тех сетей, которые были рассмотрены в предыдущем разделе. Это сеть из свободных ветвей, связанная сеть и сеть, разделенная на подсети. Квадрат величины вектора  ${}^m\mathbf{d}$ , заданного в свободных ветвях сети компонентами из соотношения (3.240), равен (ковариантные и контравариантные компоненты, напомним, здесь равны; нулевые значения опускаем):

$$\begin{aligned} |{}^m\mathbf{d}|^2 &= {}^m d_2^0 {}^m d_0^2 + {}^m d_5^0 {}^m d_0^5 + {}^m d_6^0 {}^m d_0^6 + {}^m d_8^0 {}^m d_0^8 + {}^m d_9^0 {}^m d_0^9 = \\ &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 4 + 1 + 4 + 1 + 9 = \mathbf{19}. \end{aligned} \quad (3.253)$$

На диаграмме это площадь полукруга, представляющего мощность, которая рассеивается в замкнутых ветвях. Квадрат величины вектора  ${}^m\mathbf{d}$  в ветвях подсетей рассчитаем по значениям компонент вектора в этих подсетях. Для этого умножим матрицы решения подсетей (3.218–3.220) на соответствующие части компонент  ${}^m d_s^0$  вектора  ${}^m\mathbf{d}$ , которые заданы в (3.240).

Тогда получим вектор отклика для подсети 1, умножая матрицу в (3.218) на первые три элемента вектора в (3.240) –  ${}^m d_{c1}$ :

$${}^m d_{c1} = Y_{c1}^l {}^m d_{s=1}^0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{-2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{-2} \end{matrix} \cdot 1/3 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 2 & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{-1} \\ 3 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} \end{matrix} \cdot 1/3 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{2} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{matrix} \quad (3.254)$$

Для подсети 2 получим вектор отклика, умножая матрицу в (3.219) на вторые три элемента вектора в (3.240) –  ${}^m d_{c2}$ :

$${}^m d_{c2} = Y_{c2}^l {}^m d_{s=2}^0 = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \cdot 1/3 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot 1/3 = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (3.255)$$

Для сети соединений ( $r$ -сети) компоненты – отклики  ${}^m d_{cr}$  в отдельных ветвях данного примера принимают следующие значения:

$${}^m d_{cr} = Y_{cr}^l {}^m d_{s=r}^0 = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline -2 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \cdot 1/4 = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot 1/4 = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (3.256)$$

Для компонент вектора в подсетях и сети соединений (их матрицы решения составляют  $Y_c^l$ ), квадрат величины  $|{}^m \mathbf{d}_{s1}|^2$  принимает следующее значение:

$$\begin{aligned} |{}^m \mathbf{d}_{s1}|^2 &= {}^m d_{c1}^c {}^m d_{c1}^l + {}^m d_{c2}^c {}^m d_{c2}^l + {}^m d_{cr}^c {}^m d_{cr}^l = \\ &= ((-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) / (3 \cdot 3) + \\ &+ (2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2) / (4 \cdot 4) = (12 + 27) / 9 + 16 / 16 = 4,333 + 1 = \mathbf{5,333}. \end{aligned} \quad (3.257)$$

На диаграмме это площадь сектора, соответствующего мощности, которая рассеивается в подсетях. Для соединенной сети (матрица решения  $Y_c^2$ ), компоненты  ${}^m \mathbf{d}$  в ветвях которой даны в соотношениях (3.248–3.250), и обозначены индексом  $s2$ , квадрат величины вектора  $|{}^m \mathbf{d}_{s2}|^2$  примет следующее значение:

$$\begin{aligned} |{}^m \mathbf{d}_{s2}|^2 &= {}^m d_{c2}^{c2} {}^m d_{c2}^l + {}^m d_{c2}^{c2} {}^m d_{c2}^2 + {}^m d_{cr}^{c2} {}^m d_{c2}^r = \\ &= ((-8) \cdot (-8) + 8 \cdot 8 + (-24) \cdot (-24) + (-4) \cdot (-4) + 32 \cdot 32 + 32 \cdot 32 + \\ &20 \cdot 20 + 16 \cdot 16 + 36 \cdot 36 + 0 \cdot 0) / (20 \cdot 20) = 4720 / 400 = \mathbf{11,8}. \end{aligned} \quad (3.258)$$

На круговой диаграмме это площадь сектора, соответствующего мощности, которая рассеивается в соединенной сети.

Изменения компонент в ветвях сети при соединении подсетей в сеть производится со стороны сети пересечений. Для матрицы изменений  $\Delta Y_c$ , которая представляет «проекцию» сети пересечений на ветви связанной сети, квадрат величины вектора  $|{}^m \mathbf{d}_{\Delta s}|^2$  равен сумме произведений контравариантных и ковариантных компонент изменения по ветвям. Обозначим эти компоненты, соответственно, как  ${}^m Dd_c^a$  и  ${}^m Dd_c^c$ . Контравариантные компоненты в ветвях  ${}^m Dd_c^a$ , представляют собой произведение матрицы изменения решения  $DY_c$  на исходные компоненты  ${}^m d_a^0$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в свободных ветвях, которые заданы в (3.240). Часть составляющих этих компонент изменений уже была получена в соотношениях (3.242), (3.244–3.246) при расчете откликов в связанной сети. Это получилось потому, что блоки вне

главной диагонали матрицы решений соединенной сети целиком состояли из элементов матрицы изменений. Однако диагональные блоки матрицы решений связанной сети там включают в себя вклады, как подсетей, так и сети изменений. Поэтому теперь необходимо рассчитать эти недостающие значения изменений компонент вектора в подсетях, используя диагональные блоки только матрицы изменений решения в (3.238). Затем надо сложить их по соответствующим ветвям (осям координат) с уже полученными компонентами изменений для недиагональных блоков этой матрицы, что даст отклики в сети изменений.

Таким образом, получим следующие значения компонент для диагональных блоков матрицы изменений решения:

Для подсети 1 –  ${}^m Dd_c^{11} = DY_c^{11} {}^m d_{a1}^0 =$

$${}^m Dd_c^{11} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -4 \\ \hline 4 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} 1/30 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & -2 & -4 \\ \hline -2 & 2 & 4 \\ \hline -4 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} 1/30 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 2 \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (3.259)$$

Для подсети 2 –  ${}^m Dd_c^{22} = DY_c^{22} {}^m d_{a2}^0 =$

$${}^m Dd_c^{22} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -12 \\ \hline 6 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} 1/30 = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & -4 & -4 \\ \hline -4 & 2 & 2 \\ \hline -4 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} 1/30 = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (3.260)$$

Для подсети соединений –  ${}^m Dd_c^{rr} = DY_c^{rr} {}^m d_{ar}^0 =$

$${}^m Dd_c^{rr} = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 36 \\ \hline 36 \\ \hline \\ \hline \end{array} 1/30 = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 9 & & & -9 \\ \hline & 9 & 9 & \\ \hline & 9 & 9 & \\ \hline -9 & & & 9 \\ \hline \end{array} 1/30 = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (3.261)$$

Эти собственные компоненты изменений (влияние подсетей на самих себя при их соединении в полную сеть), вместе с ранее найденными компонентами взаимных изменений (влияние подсетей на другие подсети при соединении в полную сеть), дают полные значения изменений компонент вектора при соединении подсетей.

Для ветвей подсети 1, с учетом того, что  ${}^m \Delta d_c^{12} = {}^m d_c^{12} = 0$ , а  ${}^m \Delta d_c^{1r} = {}^m d_c^{1r}$  из (3.242), получим компоненты вектора изменений:

$${}^m Dd_c^1 = {}^m Dd_c^{11} + {}^m Dd_c^{12} + {}^m Dd_c^{1r} = \quad (3.262)$$

$$= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -4 \\ \hline 4 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} 1/30 + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 12 \\ \hline -12 \\ \hline -24 \\ \hline \end{array} 1/30 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline -8 \\ \hline -16 \\ \hline \end{array} 1/30$$

Аналогично для ветвей подсети 2, где  ${}^m Dd_c^{21} = {}^m d_c^{21} = 0$ , а  ${}^m Dd_c^{2r} = {}^m d_c^{2r}$  из (3.244) также получим компоненты вектора изменений:



$${}^m Dd_c^2 = {}^m Dd_c^{21} + {}^m Dd_c^{22} + {}^m Dd_c^{2r} = \quad (3.263)$$

$$= \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -12 \\ \hline 6 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} 1/30 + \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -24 \\ \hline 12 \\ \hline 12 \\ \hline \end{array} 1/30 = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -36 \\ \hline 18 \\ \hline 18 \\ \hline \end{array} 1/30$$

Полные отклики – компоненты изменений – в ветвях сети соединений получим как сумму компонент, где  ${}^m Dd_c^{r1} = {}^m d_c^{r1}$  из (3.245), а  ${}^m Dd_c^{r2} = {}^m d_c^{r2}$  из (3.246):

$${}^m Dd_c^r = {}^m Dd_c^{r1} + {}^m Dd_c^{r2} + {}^m Dd_c^{rr} = \quad (3.264)$$

$$= \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline -6 \\ \hline -6 \\ \hline -6 \\ \hline \end{array} 1/30 + \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline 9 \\ \hline 9 \\ \hline -9 \\ \hline \end{array} 1/30 + \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 36 \\ \hline 36 \\ \hline \\ \hline \end{array} 1/30 = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 15 \\ \hline 39 \\ \hline 39 \\ \hline -15 \\ \hline \end{array} 1/30$$

Таким образом, получены контравариантные компоненты, изменяющие отклики в ветвях, которые дают следующее значение квадрата величины вектора изменений (с учетом равенства токов и напряжений).

$$|{}^m \mathbf{d}_{\Delta s}|^2 = {}^m Dd_c^1 \cdot {}^m Dd_c^1 + {}^m Dd_c^2 \cdot {}^m Dd_c^2 + {}^m Dd_c^r \cdot {}^m Dd_c^r = \quad (3.265)$$

$$= (8 \cdot 8 + (-8) \cdot (-8) + (-16) \cdot (-16) + (-36) \cdot (-36) + 18 \cdot 18 + 18 \cdot 18 + 15 \cdot 15 + 39 \cdot 39 + 39 \cdot 39 + (-15) \cdot (-15)) / (30 \cdot 30) = 5820/900 = 6,4667.$$

Сравнивая (3.257), (3.258) и (3.265) можно видеть, что *квадрат величины вектора в соединенной сети равен сумме квадрата величины вектора в подсетях и квадрата величины вектора изменений в подсетях* при их соединении в связанную сеть:

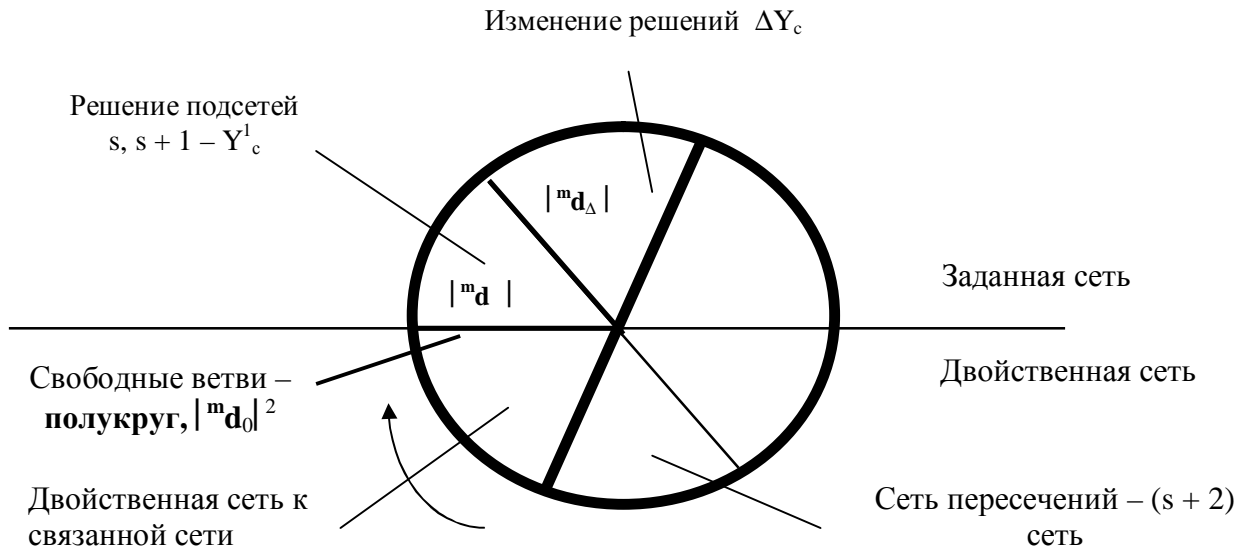
$$|{}^m \mathbf{d}_{s2}|^2 = |{}^m \mathbf{d}_{s1}|^2 + |{}^m \mathbf{d}_{Ds}|^2 = 5,3333 + 6,4667 = 11,8. \quad (3.266)$$

Убедившись, что *квадрат величины вектора остается постоянным* при соединении сети из подсетей, заметим, что в каждой из рассмотренных сетей можно определить значение квадрата величины вектора в двойственной к ней сети, зная полное значение квадрата этой величины в свободных ветвях. Это значение, равное 19, было уже вычислено в (3.253). Принимая, как и в разделе 3.2, эту величину за единицу, равную по площади половине круга, т.е.  $180^0$ , вычислим доли и углы наклона «мячика», представляющего рассеиваемую мощность (*поток энергии*), при разных способах соединения ветвей.

На рис. 3.20 углы наклона секторов, соответствующих рассеиваемой мощности, круговой диаграммы мощности имеют следующие значения:

- для подсетей –  $(5,333/19) 180^0 = 50,5^0$ ;
- для сети изменений –  $(4,467/19) 180^0 = 61,3^0$ ;
- для соединенной сети –  $(11,8/19) 180^0 = 111,8^0$ .

Эти углы и показаны на диаграмме, где видно, что сети изменений соответствует двойственная сеть. Площадь сектора, соответствующего соединенной сети, равна сумме площадей, соответствующих подсетям и сети соединений.



$$\text{Квадрат величины вектора связанной сети } |^m d_{s2}|^2 = |^m d_{s1}|^2 + |^m d_{Ds}|^2$$

Рис. 3.20. Изменение квадрата величины вектора (потока энергии) при изменении структуры сети – расчете сети по частям

Аналогичные результаты получим при изменении структуры в пределах одной сети. Рассмотрим примеры расчета матриц решения при изменении соединения ветвей в сети раздела 3.3.5, где положим, что *вектор воздействия*  $^m d$  имеет единичные значения компонент  $^m d^0_a$  в каждой свободной ветви. Получим значения откликов в исходной сети, в сети с изменением соединений в структуре, и в сети, соответствующей матрице изменений. Матрица решений исходной сети  $Y^l_c$  получена в (3.186). Умножая эту матрицу на контравариантные компоненты  $^m d_{cl}^a$  вектора  $^m d$  в соединенной сети, получим следующие значения:

$$^m d_{cl}^a = Y^l_c \ ^m d^0_a =$$

$$\begin{matrix}
 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 -1 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \\ 3
 \end{bmatrix}
 \cdot 1/11
 =
 \begin{matrix}
 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 3 & -1 & 1 & -3 & -3 & 2 \\
 -1 & 4 & -4 & 1 & 1 & 3 \\
 1 & -4 & 4 & -1 & -1 & -3 \\
 -3 & 1 & -1 & 3 & 3 & -2 \\
 -3 & 1 & -1 & 3 & 3 & -2 \\
 2 & 3 & -3 & -2 & -2 & 5
 \end{bmatrix}
 \cdot 1/11
 \begin{matrix}
 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1
 \end{bmatrix}$$

Квадрат величины вектора в этой сети равен (метрическая матрица единичная):

$$|^m d_{cl}^0|^2 = (1 + 16 + 16 + 1 + 1 + 9)/121 = 4/11 \tag{3.267}$$

Матрица решений сети с изменением соединений  $Y_c^2$  дана в (3.180) или в (3.182), контравариантные компоненты  ${}^m d_{c2}^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в этой соединенной сети имеют значения:

$${}^m d_{c2}^a = Y_c^2 {}^m d_a^0 = \quad (3.268)$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 16 \\ \hline 17 \\ \hline 10 \\ \hline 11 \\ \hline 11 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{13} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 2 & 5 & -1 & -1 & 3 \\ \hline 2 & 7 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 5 & -2 & 8 & 1 & 1 & -3 \\ \hline -1 & 3 & 1 & 5 & 5 & -2 \\ \hline -1 & 3 & 1 & 5 & 5 & -2 \\ \hline 3 & 4 & -3 & -2 & -2 & 6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{13} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Квадрат величины вектора в этой сети равен (метрическая матрица единичная):

$$|{}^m \mathbf{d}_{c2}|^2 = (256 + 289 + 100 + 121 + 121 + 36)/169 = 71/13. \quad (3.269)$$

Матрица решений сети изменений  $DY_c$  была дана в (3.185), контравариантные компоненты  ${}^m d_{cD}^a$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в этой гипотетической сети изменений имеют такие значения, которые вносят измененные, в данном случае замыкаемые, пути:

$${}^m d_{cD}^a = DY_c {}^m d_a^0 = \quad (3.270)$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 189 \\ \hline 135 \\ \hline 162 \\ \hline 108 \\ \hline 108 \\ \hline 27 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{143} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 49 & 35 & 42 & 28 & 28 & 7 \\ \hline 35 & 25 & 30 & 20 & 20 & 5 \\ \hline 42 & 30 & 36 & 24 & 24 & 6 \\ \hline 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\ \hline 28 & 20 & 24 & 16 & 16 & 4 \\ \hline 7 & 5 & 6 & 4 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{1}{143} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$|{}^m \mathbf{d}_{cD}|^2 = (35721 + 18225 + 26244 + 11664 + 11664 + 729)/(143 \cdot 143) = \quad (3.271)$$

$$= 104247/20449 = 729/143.$$

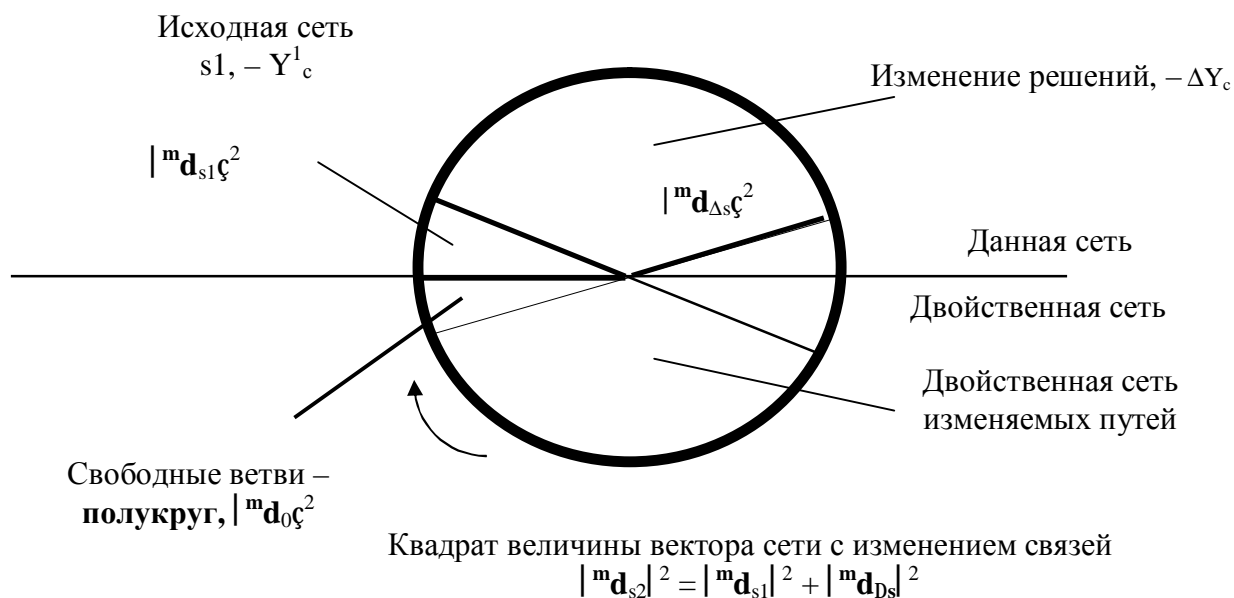
Сопоставляя полученные квадраты величин вектора для исходной сети  $|{}^m \mathbf{d}_{c1}|^2$ , сети с изменением соединений  $|{}^m \mathbf{d}_{c2}|^2$  и сети изменений  $|{}^m \mathbf{d}_{cD}|^2$ , получим что:

$$|{}^m \mathbf{d}_{c2}|^2 = |{}^m \mathbf{d}_{c1}|^2 + |{}^m \mathbf{d}_{cD}|^2 = 4/11 + 729/143 = 781/143 = 71/13,$$

что совпадает с (3.269) и показывает, что при изменении соединений в сети изменения процессов появляются из двойственной сети измененных путей. Порядок обрабатываемой матрицы таков, что при небольших изменениях пересчет выгоднее полного расчета сети.

На рис. 3.21 представлена круговая диаграмма изменений квадрата величины вектора (потока энергии) в двойственных сетях при замыкании узлов  $A$  и  $B$  в сети на рис. 3.12.а и превращении ее в сеть на рис. 3.12.б. На рис. 3.21 круговой диаграммы мощности углы наклона секторов, соответствующих рассеиваемой мощности, имеют следующие значения:

- для исходной сети свободных ветвей  $|{}^m \mathbf{d}_0|^2 = 6$ ; это  $180^\circ$  – весь полукруг,
- для исходной связанной сети  $|{}^m \mathbf{d}_{s1}|^2: 4/(11 \cdot 6) = 0,061$  – это  $10,9^\circ$ ;
- для связанной сети с изменением соединений  $|{}^m \mathbf{d}_{s2}|^2: 71/(13 \times 6) = 0,91$  – это  $163,8^\circ$ .



**Рис. 3.21. Изменение квадрата величины вектора (потока энергии) при изменении структуры сети – наложении связей**

Если рассматривать сеть как электрическую цепь, то в подсетях квадрату величины вектора соответствует величина мощности (потока энергии). Тогда, если при разделении сети на подсети мощность уменьшается, то в двойственной сети она на столько же увеличивается, что и показывает круговая диаграмма.

Инвариантность квадрата величины вектора, выражаемая  $m_j$ -инвариантностью, обеспечивает расчет по частям *без итераций*, с возможностью распараллеливания вычислений. Это происходит потому, что изменения параметров в связях (значений метрических компонент и/или компонент вектора) переходят, запасаются в *двойственной сети*, притом в той ее части, которая состоит только из *изменяемых путей*, т.е. путей, которые замыкаются или размыкаются при изменении структуры. Поэтому размер этой двойственной сети, порядок обращаемой матрицы, определяются только изменениями в структуре сети.

Параметры двойственных сетей изменяются совместно, оставаясь постоянными. Это позволяет рассчитать изменения процессов при изменении структуры, без многократного расчета взаимовлияния изменений в подсетях, как в других методах, что порождает итерации, связанные с ними проблемы сходимости и т.д. Это возможно для задач, представимых эквивалентной сетевой моделью, с объединением процессов в элементах (ветвях) и связей, соединяющих элементы в структуру.

### Результаты главы 3

1. Показано, что при изменении структуры расчет сетей производится едиными уравнениями, основанными на инварианте двойственных сетей, который рассмотрен в главе 2. Форма уравнений расчета определяется количеством изменяемых путей и зависит от вида преобразования структуры (связывание свободных ветвей в соединенную сеть, изменение соединений в связанной сети; а преобразование наиболее общего вида – разделение сети на подсети и соединение из отдельных подсетей). Эти виды расчета отличаются составом блоков в матрицах преобразования, соответствующих подматрице изменения путей.

2. Уравнения расчета для отдельных видов преобразования структуры являются частными случаями общих уравнений вида (3.206) и (3.209) для расчета при разделении сети на подсети или соединении целой сети из подсетей. Два основных вида уравнений (и алгоритмов) расчета сети при изменении структуры определяются видом заданного вектора (представляющего процесс в сети или сетевой модели сложной системы).

3. Если процесс (распространение потока энергии) задан внутренними источниками, то компоненты его вектора определяются разложением по базису замкнутых путей (определяющих контуры циркуляции потока внутри сети). Общее уравнение расчета при соединении подсетей в сеть для базиса контуров дано в (3.206):

$$Y_c^2 = Y_c^1 + \Delta Y_c = \\ = Y_c^1 + (I - Y_c^1 Z) \Delta C_t [DC Z (I - Y_c^1 Z) \Delta C_t]^{-1} \Delta C (I - Z Y_c^1),$$

где в  $Y_c^1$  по главной диагонали расположены матрицы решения подсетей,  $\Delta Y_c$  – матрица решения сети изменений (пересечений), а  $\Delta C$  состоит из путей, измененных при соединении.

4. Если процесс (распространение потока энергии) задан внешними источниками, то компоненты его вектора определяются разложением по базису разомкнутых путей (определяющих узлы входа и выхода потока из сети). Этому соответствует общее уравнение расчета, представленное в (3.209):

$$Z_c^2 = Z_c^1 - \Delta Z_c = Z_c^1 - Z_c^1 \Delta C_t (DC Z_c^1 \Delta C_t)^{-1} \Delta C Z_c^1,$$

где матрица решения соединенной сети  $Z_c^2$  выражается через матрицы решения подсетей  $Z_c^1$  и матрицу изменений путей  $\Delta C$ .

При расчете сети по частям разделением на независимые подсети, которые можно рассчитать параллельно, двойственная сеть пересечений обеспечивает расчет *без итераций*, значительно уменьшая объем вычислений, повышая эффективность расчетов.

Представленные формулы расчета сетей при изменении структуры (включая разделение на части или соединение из частей целого), с использованием двойственного инварианта, представляют собой обобщение диакоптики Крона, полученное аналитическим путем.

5. Рассмотрены условия эффективности преобразования известного решения в решение для новой структуры по сравнению с расчетом заново. Формулы преобразования известных решений сетей при изменении структуры получены двух видов:

- Расчет матриц решения для новой структуры по матрице решения для старой структуры. Требуется больше вычислений (много перемножений матриц), но позволяет быстро получить решение для каждого нового вектора.
- Расчет компонент заданного вектора (представляющего процессы в сети, сетевой модели системы) при изменении структуры. Требуется меньше вычислений (умножения матрицы на матрицу заменяются умножением матрицы на вектор), позволяет получить решение для каждого нового вектора воздействия, для каждой новой структуры соединений, но не дает матрицу решения.

Алгоритмы расчета сетевых моделей при разделении на произвольные подсистемы, или при отключении, подключении отдельных компонент и подсистем, могут применяться при анализе и прогнозе аварийных ситуаций в пожароопасных системах (например, в нефтепереработке), в электроэнергетике, транспортных системах, экономике.

6. Представлена найденная автором закономерность постоянства суммарной рассеиваемой мощности в двойственных электрических цепях при изменении их структуры. Данная закономерность представлена в главе 2 в виде инварианта, который выражается постоянством абсолютной величины заданного вектора при изменении структуры двойственных сетей. Показано, что инвариант двойственных сетей обеспечивает расчет сетей при всех видах изменения структуры, включая расчет по частям, без итераций.

Более подробно закон сохранения потока энергии, который в простейшем виде проявляется как постоянство суммарной рассеиваемой мощности в двойственных электрических цепях при изменении их структуры, рассмотрен в следующей главе.

#### 4. ПОСТОЯНСТВО ПОТОКА ЭНЕРГИИ (МОЩНОСТИ) В ДВОЙСТВЕННЫХ ЦЕПЯХ

Задача данной главы – исследование закономерности изменения рассеиваемой мощности в электрической цепи при изменении соединения ветвей. Например, при связывании свободных ветвей в соединенную сеть. Математические особенности этой закономерности были рассмотрены на примере абстрактных сетей.

Рассматривается, каким образом постоянство квадрата величины вектора при изменении структуры *абстрактных объектов*, т.е. двойственных сетей, проявляется в известной *физической системе* – электрической цепи. Квадрату величины вектора в сети соответствует рассеиваемая мощность в электрической цепи. Закономерность состоит в том, что сумма рассеиваемых мощностей в цепи и двойственной цепи остается постоянной при изменении структуры соединения ветвей. Эта сумма равна мощности заданных источников (источников тока или напряжения).

В главе 1 представлена методология тензорного метода в теории систем, т.е. единый подход к исследованию процессов и структуры сложных систем разных предметных областей в интересах расчета, анализа, проектирования, управления и прогнозирования.

В главе 2 сети рассмотрено пространство-структура, координатами которого являются пути, и преобразования путей. Дихотомия путей на замкнутые и разомкнутые, вместе с их ориентацией, обеспечивает представление замкнутых и открытых систем. В основе преобразования путей лежит инвариант структуры двойственных сетей.

В главе 3 представлены методы и алгоритмы расчета сетей при изменении структуры. Показано, что инвариант двойственности связывает изменения структуры сети для трех «уровней обобщения»:

- сети ветвей, не имеющих весов;
- сети с метрикой, когда ветвям приписаны веса (числа или функции), которые могут представлять материальные характеристики элементов систем, их субстанцию, но без возбуждения векторами-потоками;
- сети, на которые наложены векторы, представляющие потоки энергии.

Полученные алгоритмы повышают эффективность расчетов, а двойственность с инвариантом связывает воедино разные виды изменения структуры сетей.

Двойственность электрических цепей основана на свойствах абстрактных сетей. Инвариант двойственных сетей – это постоянство суммы метрических тензоров или постоянство квадрата величины вектора при изменении структуры. В таком физическом объекте, как электрическая цепь, этот инвариант проявляется в постоянстве суммы рассеиваемой мощности в данной цепи и в двойственной цепи при изменениях структуры

соединения ветвей. При условии, что изменения структуры сохраняют двойственность, а мощности заданных источников тока и источников напряжения не меняются.

Постоянство мощности само указывает на *необходимость существования* цепи с двойственной структурой для всякой электрической цепи. Таким образом, найденная *математическая* закономерность задает (или открывает) новые свойства *физической* системы, физического пространства. Двойственность пространства не следует из уже известных законов сохранения, таких как законы сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии. *Постоянство мощности*, которая численно характеризует поток энергии, *при изменении структуры двойственных цепей указывает на существование нового, ранее не известного закона сохранения – закона сохранения потока энергии.*

Отличие закона сохранения потока энергии от известных законов сохранения состоит в том, что *его важной составной частью является структура*, а не только свойство субстанции самой материи, представленной через измеримые величины на разных уровнях – от микромира до космических масштабов. Структуру связей материи элементов в системе нельзя измерить приборами в принятом понимании, т.е. приборами, которые, по сути, всегда измеряют только длину (протяженность) или время (длительность).

#### **4.1. Инварианты двойственных сетей**

##### **4.1.1. Постулат Крона об инварианте мощности и инварианты двойственных сетей**

Наиболее принципиальным вопросом научных дискуссий по работе Крона «Тензорный анализ сетей» был постулат об инвариантности мощности при тензорных преобразованиях структуры цепей и электрических машин. Эти дискуссии носили острый характер, порой выходя за рамки научной терминологии (*Петров*, 1985). Крон утверждал, что поскольку при соединении отдельных ветвей простейшей сети в связанную сеть не меняется мощность источников (напряжения или тока), расположенных в электрической цепи, то не меняется и мощность, рассеиваемая на ветвях цепи. Этот постулат необходим в тензорном анализе сетей для вывода формулы преобразования тензора импеданса (комплексного сопротивления), а также формулы преобразования двойственного к нему тензора адмиттанса (комплексной проводимости). В реальности мощность не всегда остается постоянной при изменении соединений в цепи. Этот факт был основой критики тензорного анализа сетей.

Можно отметить, что Крон был прав в том, что изменение структуры соединений элементов действительно не меняет мощность источников воздействия. Однако мощность, рассеиваемая в цепи (в системе) от этих источников, делится, «расщепляется» между данной и двойственной структурами, при изменении размерности базисов замкнутых и разомкнутых путей. По отдельности в каждой из двух двойственных цепей мощность не остается



постоянной при изменении соединений, в том числе, при соединении ветвей в цепь. Поэтому постулат об инвариантности мощности, как сформулировал его Крон, не выполняется.

Мощность количественно характеризует поток энергии, поэтому ее определение играет важную роль. Вместе с тем мощность, как правило, в физике, не связывают напрямую с потоком энергии. В Физическом энциклопедическом словаре (ФЭС) мощность определяют так. «Мощность, физическая величина, измеряемая отношением работы к промежутку времени, в течение которого она произведена. Если работа производится равномерно, то мощность определяется формулой  $N = A/t$ , где  $A$  – работа, произведенная за время  $t$ , а в общем случае  $N = dA/dt$ ,  $dA$  – элементарная работа за элементарный промежуток времени  $dt$ . Мощность измеряется в ваттах». (ФЭС, 1984, с. 440). Энергия определяется там же как «общая количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи».

Понятие структуры в определении материи, возможно, не входит. В ФЭС, например, статья под названием «Структура» отсутствует, есть только структурная вязкость. Статья под названием «Материя», впрочем, там тоже отсутствует. Вместе с тем понятие «работа» по определению связано с перемещением, а, следовательно, и с потоком, если работа выполняется непрерывно. «Работа силы, мера действия силы, зависящая от численной величины и направления силы и от перемещения точки ее приложения». (ФЭС, 1984, с. 600).

Таким образом, необходимо рассмотреть, как связаны между собой понятия мощности, структуры и потока энергии. Найденная автором закономерность постоянства мощности при изменении структуры двойственных сетей (и электрических цепей) носит количественный характер. Ее можно проверять расчетами и экспериментами. Необходимо связать эту закономерность с терминологией и понятиями в физике и электротехнике, чтобы исследовать физико-структурный характер закона сохранения потока энергии. Этот закон соединяет физику движения энергии и структуру материи, где это движение происходит.

Заметим, что разделение состава системы на материю элементов и потоки энергии, проходящие через эту материю, отчасти условно. Энергию и инерционные свойства материи, представленные массой, связывает соотношение  $E = m c^2$ . Возможно, что в некоторых предметных областях понятия материи и потока энергии могут меняться местами. Во всяком случае, в тех областях, в которых указанное соотношение играет значимую роль.

Мощность, рассеиваемая в цепи, определяется как сумма (по всем ветвям цепи) произведений откликов-токов, умноженных на падение напряжения (разность потенциалов) для каждой ветви. Это для источников напряжения. Или мощность, рассеиваемая в цепи, определяется как сумма по всем ветвям цепи произведений (для каждой отдельной ветви) откликов-напряжений (разностей потенциалов), умноженных на ток, протекающий под их действием в той же ветви. Это для источников тока.

В более широком смысле – рассеиваемая в цепи мощность представляет собой количественную, измеримую характеристику потока энергии, проходящего в цепи. Рассеивание энергии состоит в ее преобразовании в другие виды энергии, например, в тепловую энергию при нагревании проводника с током.

Понятие сети с необходимостью возникает при расчете, анализе изменения процессов в сложной системе при преобразовании ее структуры. Речь идет о системах, в которых процессы протекают в виде потоков-откликов, которые вызваны приложенными воздействиями. Это широкий класс систем физики, техники, экономики, биологии. Важность совместного анализа процессов и структуры возрастает с ростом сложности систем, т.е. количества элементов и связей между ними.

Сети, структура сетей, преобразования структуры сетей обладают свойством двойственности. Двойственные сети имеют объективно существующий инвариант, который связывает их структуру. Этот инвариант выражает свойства взаимного дополнения двойственных сетей, которые только вместе составляют единое целое. Он выражается на трех уровнях обобщения, выражающих по своей сути одну закономерность.

Мы рассматриваем сети, структуру которых представляют одномерные отрезки-ветви, соединенные своими границами (точками или узлами). Выбор столь простого случая позволяет нагляднее рассмотреть данное явление. Для многомерных сетей также существуют инварианты двойственности. Понятие сети необходимо, когда при изменении соединений меняется количество границ (узлов) между элементами, что приводит к изменению размерности симплициального комплекса. При этом меняется количество вершин графа, представляющего структуру сети. Таким образом, меняется сам граф, поскольку его определяют два инварианта: ребра (ветви) и вершины (границы, или узлы).

Коротко повторим рассмотренные в главе 2 свойства путей в сети, и их двойственность. Наборы последовательно соединенных ветвей образуют пути. Ориентация пути выбирается в зависимости от порядка прохождения составляющих его ветвей. Путь может состоять из одной ветви. Пути могут выражаться друг через друга, играя роль координат. Базисы путей в сети разделены на два подпространства в зависимости от характера путей. Замкнутые пути образуют свой базис, определяемый числом линейно независимых циклов-контуров в графе, а разомкнутые пути – базис, определяемый числом линейно независимых разомкнутых путей (которым в графе соответствует множество разрезов). Коэффициенты выражения одного базиса путей через другой составляют матрицу преобразования.

При изменении структуры, когда меняется число узлов, то меняется число замкнутых и разомкнутых путей. В новой сети замкнутых путей становится меньше, а разомкнутых

больше (или наоборот). При этом меняется размерность базисов, меняется размерность их подпространств, а матрицы преобразования путей становятся прямоугольными. Для прямоугольных матриц преобразования не существует обратных матриц, поэтому совокупность таких объектов не образует группу и в этом отличие преобразования путей в сети от преобразования координат в геометрии. Это затрудняет расчет результатов преобразования структуры, изменения процессов в сетях (сетевых моделях сложных технических, экономических систем) при изменении их структуры. Инвариант двойственных сетей объединяет взаимодействие процессов и структуры. Данный инвариант связывает преобразования структуры при изменении границ. Таким образом, инвариант, который связывает матрицы преобразования путей двойственных сетей, заменяет группу преобразования координат в геометрии.

**Первый уровень обобщения инварианта двойственных сетей.** Три уровня обобщения инварианта двойственных сетей, выражают одну закономерность. В простейшем виде инвариант связывает преобразования структуры двойственных сетей, элементы которых – это отрезки линий, которые не обладают свойствами метрики (длина, «вес»), также нет потоков и т.д. Это показывает, что двойственная закономерность присуща уже самой природе структуры, в данном случае одномерных сетей. Подобные закономерности существуют и для многомерных сетей.

На первом уровне обобщения этот инвариант представляет соотношение между матрицами преобразования двойственных сетей. Например, при отсутствии метрики (веса ветвей представлены единичной матрицей), инвариант представлен в соотношении (2.76) и может быть записан как четыре соотношения. Индексы для простоты опущены.

Для замкнутых и разомкнутых путей в заданной сети:

$${}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} {}^m C + {}^j A_t ({}^j A {}^j A_t)^{-1} {}^j A = I. \quad (4.1)$$

Для замкнутых и разомкнутых путей в двойственной сети:

$${}^m \underline{C}_t ({}^m \underline{C} {}^m \underline{C}_t)^{-1} {}^m \underline{C} + {}^j \underline{A}_t ({}^j \underline{A} {}^j \underline{A}_t)^{-1} {}^j \underline{A} = I. \quad (4.2)$$

Для замкнутых путей двух двойственных сетей:

$${}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} {}^m C + {}^m \underline{C}_t ({}^m \underline{C} {}^m \underline{C}_t)^{-1} {}^m \underline{C} = I. \quad (4.3)$$

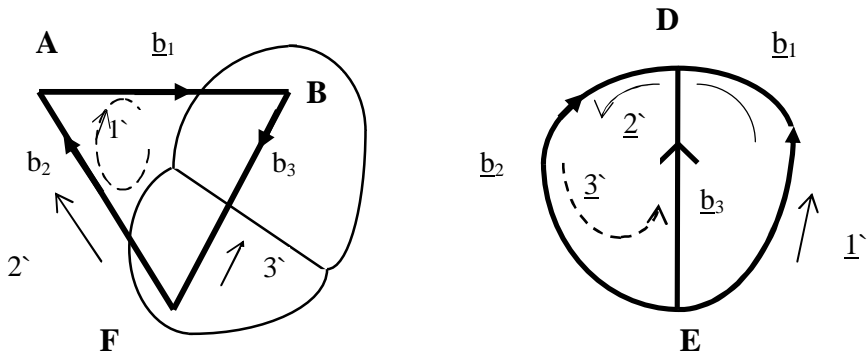
Для разомкнутых путей двух двойственных сетей:

$${}^j A_t ({}^j A {}^j A_t)^{-1} {}^j A + {}^j \underline{A}_t ({}^j \underline{A} {}^j \underline{A}_t)^{-1} {}^j \underline{A} = I. \quad (4.4)$$

Следует учитывать, что  ${}^m C = {}^j \underline{A}$ , а  ${}^j A = {}^m \underline{C}$ . Эти соотношения выражают такие отношения в двойственных сетях, которые, как будет показано, соответствуют разным секторам на диаграмме постоянства мощности (потока энергии) при изменении структуры.

В качестве примера формирования матриц двойственных сетей рассмотрим рис. 4.1, частично воспроизводящий рис. 2.15, где были представлены пути, изменения ориентации

путей, и матриц преобразования. Здесь слева дана исходная сеть, а справа – двойственная к ней. Путь  $3'$  проходит по ветви  $b_3$ . Замкнутому пути  $1'$  в данной сети соответствует разомкнутый путь  $1'$  в двойственной сети; разомкнутым путям  $2'$  и  $3'$  – контуры  $2'$  и  $3'$  в двойственной сети.



а) заданная и двойственная сети

б) двойственная сеть

Рис. 4.1. Ориентация ветвей и ориентация путей в двойственных сетях

Матрицы преобразования путей прямого и взаимного базисов заданной сети имеют вид:

$$C_a^0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} m \\ j \\ j \end{matrix} \quad A_{0't}^a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ j \\ j \end{matrix} = \underline{C}_{a't}^0 = (C_a^0)^{-1}$$

а для двойственной сети, соответственно:

$$\underline{C}_a^0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{1}' \\ \underline{2}' \\ \underline{3}' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} i \\ m \\ m \end{matrix} \quad \underline{A}_{0't}^a = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underline{1}' & \underline{2}' & \underline{3}' \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ i \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ m \\ m \end{matrix} = C_{a't}^0$$

Как отмечалось, матрица преобразования прямого базиса в одной сети равна матрице преобразования взаимного базиса в двойственной сети.

В теории систем закономерности, связывающие изменение процессов и изменение структуры не рассматриваются. Дело в том, что процессы и структура рассматриваются в разных областях науки. Физики, которые исследуют различные процессы в отдельных элементах, понятие структуры почти не используют. Только в рамках синергетики рассматриваются вопросы о роли структуры в физических системах.

В ФЭС законы Кирхгофа (в физике это первая попытка анализа *структуры*) названы «правила Кирхгофа», т.е. за фундаментальные законы их не считают. В теории графов, где структура связей исследуется в чистом виде, в долгу не остаются. В книге М. Свами и К. Тхуласирамана «Графы, сети, алгоритмы» говорят о соотношениях между токами и

напряжениями, а физический закон Ома (описывает *процесс* прохождения электрического тока) не упоминают. Вместе с тем процессы (физические, экономические, биологические) и структура (соединение элементов) – это две неразрывные составляющие любой реальной сложной системы, две стороны одной медали.

**Второй уровень обобщения инварианта двойственных сетей.** Если ветвям сети приписаны веса, то инвариантная закономерность обобщается. Например, ветвям приписаны некоторые веса, составляющие матрицы свободных (не соединенных) ветвей, которые для электрической цепи представляют матрицу импедансов (комплексных сопротивлений)  $Z$  и матрицу адмитансов (комплексных проводимостей)  $Y$ , ( $Z = Y^{-1}$ ). Веса ветвей (сопротивления и проводимости) теперь представлены матрицами, которые не являются единичными, могут иметь недиагональные элементы, но должны быть симметричными.

При наличии метрики инвариант из (2.75) может быть представлен как четыре соотношения. Эти соотношения можно получить из соотношений (3.16–3.19) которые дают выражения для матриц решения сетей – заданной и двойственной, для замкнутых путей и для разомкнутых путей. Матрицы решения сетей можно рассматривать как матрицы расчета электрических цепей. Индексы для простоты опущены. От соотношений первого уровня эти соотношения отличаются появлением метрических матриц в явном виде.

Для замкнутых и разомкнутых путей в заданной сети:

$$(Z)^{-1} = Y = {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C)^{-1} {}^m C + Y^j A_t ({}^j A Y^j A_t)^{-1} {}^j A Y. \quad (4.5)$$

Для замкнутых и разомкнутых путей в двойственной сети:

$$(Z)^{-1} = \underline{Y} = {}^m \underline{C}_t ({}^m \underline{C} \underline{Z} {}^m \underline{C}_t)^{-1} {}^m \underline{C} + \underline{Y}^j \underline{A}_t ({}^j \underline{A} \underline{Y}^j \underline{A}_t)^{-1} {}^j \underline{A} \underline{Y}. \quad (4.6)$$

Для замкнутых путей двух двойственных сетей:

$$\underline{Z} = Y = {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C + \underline{Z} {}^m \underline{C}_t ({}^m \underline{C} \underline{Z} {}^m \underline{C}_t)^{-1} {}^m \underline{C} \underline{Z}. \quad (4.7)$$

Для разомкнутых путей двух двойственных сетей:

$$Z = \underline{Y} = {}^j A_t ({}^j A Y^j A_t)^{-1} {}^j A + \underline{Y}^j \underline{A}_t ({}^j \underline{A} \underline{Y}^j \underline{A}_t)^{-1} {}^j \underline{A} \underline{Y}. \quad (4.8)$$

Здесь также следует учитывать, что  ${}^m C = {}^j \underline{A}$ , а  ${}^j A = {}^m \underline{C}$ ; кроме того,  $\underline{Z} = Y$ , а  $Z = \underline{Y}$ . Это отношения в двойственных сетях с метрикой, которые представлены соответствующими секторами на диаграмме постоянства мощности при изменении структуры.

Итак, второй уровень обобщения инварианта является следствием первого – это постоянство суммы метрических тензоров двойственных сетей при изменении структуры.

**Третий уровень обобщения инварианта двойственных сетей.** Пусть сеть рассматривается как пространство, и на него наложен вектор (воздействие), компоненты которого принимают определенные значения в базисе замкнутых (для внутреннего воздействия) или разомкнутых (для внешнего воздействия) путей. Тогда изменение значений этих компонент при изменении структуры подчиняется той же инвариантной

закономерности двойственных сетей, которая здесь проявляется как постоянство квадрата величины вектора. Суть состоит в том, что часть вектора оказывается в одной сети, а другая часть (оставшаяся) в двойственной сети. Эти части вектора могут быть различны, однако сумма квадратов величины этих частей остается постоянной и не зависит от того, как изменились соединения ветвей.

Напомним, что квадрат величины вектора равен сумме произведений его ковариантных и контравариантных компонент по каждому независимому измерению. Для сетей, например, по всем замкнутым базисным путям, или по всем разомкнутым базисным путям. Полный базис состоит из всех замкнутых базисных путей двух двойственных сетей. Или из всех разомкнутых базисных путей двух двойственных сетей. Компоненты вектора в базисах можно отобразить (преобразовать) в отдельные ветви, поскольку собственно измерения производятся в ветвях (элементах), а не в абстрактных путях, выбранных наблюдателем в качестве системы отсчета. Это, например, необходимо для проверки расчета.

**Ограничения применимости.** Системы существуют во многих областях: физике, химии, технике, экономике, биологии, социологии и т.д. Всем системам присуща структура связи элементов, если можно выделить элементы. В аморфных структурах можно ввести элементы. Структура образует сети, имеющие свойства двойственности. Однако не всегда можно сопоставить элементам веса, представляющие материальные характеристики. Это ограничивает применение инварианта двойственных сетей на втором уровне обобщения. Возможно, что не во всех предметных областях можно выделить потоки энергии с воздействиями и откликами, или что-то аналогичное этим понятиям. Это ограничивает применение инварианта двойственных сетей на третьем уровне обобщения.

Если сеть рассматривается как модель физической системы, например, электрической цепи, то веса элементов – это комплексные сопротивления, а воздействия и отклики – это токи и напряжения. Тогда при изменении структуры токи и напряжения подчиняются закономерности, которая здесь выражается как постоянство суммы рассеиваемых мощностей в цепях с двойственной структурой. Этот инвариант связывает изменения структуры и процессов, и является простым проявлением закона сохранения потока энергии. Выполнение данного инварианта обусловлено свойствами двойственности структуры пространства, изменений структуры систем, расположенных в этом пространстве.

Само понятие потока предполагает наличие некоторого «канала», структуры распространения физического процесса. Фарадей и Максвелл рассматривали силовые линии электромагнитного поля как некие локализованные (дискретные) трубки в пространстве. Закон сохранения потока энергии не может быть чисто физическим (или чисто

структурным), а должен соединять в себе взаимодействие физики процесса (материя элементов, потоки энергии) и свойства структуры систем и, вообще, пространства.

Если на сеть (пространство сети) наложен внешний вектор, то он представлен (измерен) ковариантными и контравариантными компонентами, как на ветвях, так и на различных комбинациях ветвей (путях), подобно компонентам вектора в геометрическом пространстве. Квадрат величины вектора представлен суммой произведений ковариантных и контравариантных компонент в путях, составляющих базис в сети. Инвариант двойственной структуры есть постоянство квадрата величины вектора при изменении структуры в совокупности двух двойственных сетей.

**Источники напряжения, замкнутые пути.** Если в электрической цепи заданы источники напряжения, то базисом являются контуры (замкнутые пути). Тогда сумма токов отклика в данной и двойственной цепи по каждой ветви есть величина постоянная. Сами источники являются общими для данной и двойственной цепи. Рассеиваемая ими мощность есть  ${}^m P_0 = {}^m e_a^0 \cdot {}^m i_0^a$ , или  ${}^m \underline{P}_0 = {}^m \underline{e}_a^0 \cdot {}^m \underline{i}_0^a$ . Соответственно, остается постоянной сумма двух рассеиваемых мощностей: в замкнутых путях (контурах) и ветвях заданной цепи:

$${}^m P^{\wedge} = {}^m e_a^{\wedge} \cdot {}^m i^{\wedge a} = {}^m P_c = {}^m e_a^c \cdot {}^m i_c^a \quad (4.9)$$

и в замкнутых путях (контурах) и ветвях двойственной цепи:

$${}^m \underline{P}^{\wedge} = {}^m \underline{e}_a^{\wedge} \cdot {}^m \underline{i}^{\wedge a} = {}^m \underline{P}_c = {}^m \underline{e}_a^c \cdot {}^m \underline{i}_c^a, \quad (4.10)$$

при любых соединениях ветвей, т.е.:

$${}^m P_0 = {}^m \underline{P}_0 = {}^m P^{\wedge} + {}^m \underline{P}^{\wedge} = {}^m P_c + {}^m \underline{P}_c. \quad (4.11)$$

Здесь по правилам тензорного анализа предполагается суммирование по всем замкнутым путям, т.е. по индексу  $a^{\wedge} = 1, \dots, m$ ; и по индексу  $a = 1, \dots, n$ , т.е. по всем ветвям.

Эту инвариантность мощности в электрической цепи назовем инвариантностью «по вертикали» диаграммы постоянства мощности, которая рассматривается в разделе 4.2, для источников напряжения.

**Источники тока, разомкнутые пути.** Если в электрической цепи заданы источники тока, то базисом являются пары узлов (разомкнутые пути). Тогда сумма напряжений отклика в данной и двойственной цепи по каждой ветви есть величина постоянная. Сами источники общие для данной и двойственной цепи. Мощность источников в данной цепи равна  ${}^j P_0 = {}^j E_a^0 \cdot {}^j I_0^a$ , а в двойственной цепи  ${}^j \underline{P}_0 = {}^j \underline{E}_a^0 \cdot {}^j \underline{I}_0^a$ . Соответственно, остается постоянной сумма двух рассеиваемых мощностей: в разомкнутых путях и ветвях заданной цепи:

$${}^j P^{\wedge} = {}^j E_a^{\wedge} \cdot {}^j I_c^{\wedge a} = {}^j P_c = {}^j E_a^c \cdot {}^j I_c^a \quad (4.12)$$

и в разомкнутых путях и ветвях двойственной цепи:

$${}^j \underline{P}^{\wedge} = {}^j \underline{E}_a^{\wedge} \cdot {}^j \underline{I}_c^{\wedge a} = {}^j \underline{P}_c = {}^j \underline{E}_a^c \cdot {}^j \underline{I}_c^a, \quad (4.13)$$

при любых соединениях ветвей, т.е.:

$${}^j P_0 = {}^j \underline{P}_0 = {}^j P^{\setminus} + {}^j \underline{P}^{\setminus} = {}^j P_c + {}^j \underline{P}_c. \quad (4.14)$$

Предполагается суммирование по одинаковым верхним и нижним индексам, т.е., как по разомкнутым базисным путям, т.е. по индексу  $a^{\setminus} = 1, \dots, j$ ; так и по индексу  $a = 1, \dots, n$ , т.е. по всем ветвям.

Эту инвариантность мощности в электрической цепи назовем инвариантностью «по вертикали» диаграммы постоянства мощности для *источников тока*.

**Источники тока и напряжения, заданная цепь.** Если источники тока и напряжения для каждой ветви, где они заданы, имеют равные мощности, то аналогичные равенства существуют отдельно для заданной цепи и для двойственной цепи. Тогда сумма мощности, рассеиваемой в заданной цепи от источников тока, и сумма мощности, рассеиваемой в заданной цепи от источников напряжения, равны половине суммы мощностей источников тока и источников напряжения. Для заданной цепи это соотношение имеет вид:

$${}^m P_0 + {}^j P_0 = 2 ({}^m P^{\setminus} + {}^j P^{\setminus}) = 2 ({}^m P_c + {}^j P_c). \quad (4.15)$$

Эту инвариантность мощности в *заданной* цепи назовем инвариантностью «по горизонтали» диаграммы постоянства мощности для источников тока и напряжения.

**Источники тока и напряжения, двойственная цепь.** Если источники тока и напряжения для каждой ветви, где они заданы, имеют равные мощности, то аналогичные равенства существуют для двойственной цепи. Для двойственной цепи они имеют вид:

$${}^m \underline{P}_0 + {}^j \underline{P}_0 = 2 ({}^m \underline{P}^{\setminus} + {}^j \underline{P}^{\setminus}) = 2 ({}^m \underline{P}_c + {}^j \underline{P}_c). \quad (4.16)$$

Эту инвариантность мощности в *двойственной* электрической цепи назовем инвариантностью «по горизонтали» диаграммы постоянства мощности для источников тока и напряжения.

Сумма мощностей, рассеиваемых в заданной цепи от источников тока и напряжения, и в двойственной цепи от источников тока и напряжения, по базисным путям, по всем ветвям равна суммарной мощности источников:

$${}^m P_0 + {}^j P_0 = {}^m \underline{P}_0 + {}^j \underline{P}_0 = ({}^m P^{\setminus} + {}^j P^{\setminus}) + ({}^m \underline{P}^{\setminus} + {}^j \underline{P}^{\setminus}) = ({}^m P_c + {}^j P_c) + ({}^m \underline{P}_c + {}^j \underline{P}_c). \quad (4.17)$$

Это и есть полная мощность в двух двойственных цепях, рассеиваемая от источников тока и (или) напряжения. Для заданных источников мощность постоянна при любой структуре, т.е. при любых соединениях ветвей или при изменении соединений ветвей.

Следствием рассмотренных соотношений является постоянство суммы откликов в каждой ветви заданной и двойственной цепи (сети) при изменении структуры соединения ветвей. Если заданы источники напряжения, то сумма токов в каждой ветви, которая входит в данную сеть и двойственную сеть, постоянна при любых соединениях. Эта сумма равна току в свободной замкнутой ветви, поскольку двойственная ветвь при этом разомкнута, и ток от источника напряжения в ней равен нулю. Если заданы источники тока, то сумма



напряжений в каждой ветви, которая входит в данную сеть и двойственную сеть, постоянна при любых соединениях. Эта сумма равна напряжению в свободной разомкнутой ветви, поскольку двойственная ветвь при этом замкнута, и напряжение (падение напряжения) от источника тока в ней равно нулю.

Третий инвариант двойственных сетей, который является следствием первых двух – это постоянство потока энергии (мощности) в двух двойственных электрических цепях при изменении соединения их ветвей произвольным образом. Данный инвариант показывает, что закон сохранения потока энергии проявляет себя при изменении структуры электрических цепей. Можно предположить, что этот новый закон сохранения имеет характер универсального физического закона, и должен выполняться не только в электрической цепи, но и в более сложных технических, экономических и биологических системах. Более того, постоянство потока энергии, выражаемое постоянством рассеиваемой мощности в сумме двух двойственных электрических цепях при изменении их структуры требует расширить представление об окружающем (наблюдаемом) физическом пространстве.

Для проверки этого теоретического результата необходимо проведение экспериментов по изучению закономерностей изменения потоков энергии при изменении структуры материальной среды, которая служит проводником данного потока.

Вместе с тем факт существования инварианта двойственных сетей, который в физике проявляется как закон сохранения потока энергии, дает математические и физические основы существования двойственных пространств, не наблюдаемых в настоящее время. Физико-структурный закон сохранения потока энергии, представленный здесь на примере инварианта структуры двойственных сетей, указывает на возможность существования двойственного пространства, которое дополняет наблюдаемое пространство до некоторой единой сущности. Это двойственное пространство должно взаимодействовать с нашим пространством в процессе преобразования потоков энергии.

Биологические системы, в частности, человеческий мозг, представляют собой электромагнитные системы, обладающие сложной структурой, для которых должны существовать двойственные структуры. Эти двойственные структуры могут располагаться в не наблюдаемом пространстве. Тогда при изучении проблем сознания и подсознания необходимо учитывать наличие части сознания вне наблюдаемой телесной материальной оболочки. Это позволяет рассматривать явления жизни как взаимно двойственную систему концентрации потоков свободной энергии, связанную с процессами в недоступной (в настоящее время) для наблюдения части Вселенной. Действие данной системы собирания потоков свободной энергии уравнивает тенденцию рассеивания свободной энергии в неживой части Вселенной.

#### 4.1.2. Двойственные сети и электрические цепи

Задачи электротехники фактически стали исходным материалом для развития теории сетей. До этого взаимодействие процессов и структуры в явном виде не рассматривалось и не возникало. В электрических цепях прохождение тока в проводнике в простейшем линейном случае описывается законом Ома, а простейшие структурные закономерности сохранения токов в узле и напряжений в контуре – законами Кирхгофа. Геометрия двойственных сетей развивает это направление. Естественным было бы именно с электрических цепей начать применение полученных в геометрии сетей результатов для моделирования и расчета сложных технических и экономических систем.

Наиболее простые виды расчета сети – это определение откликов на приложенные воздействия при соединении отдельных ветвей в сеть, которые известны в электротехнике как контурный метод и узловый метод расчета линейной цепи. Они, как известно, основаны на законах Кирхгофа, которые имеют структурный, а не физический характер, и утверждают:

- сумма токов, входящих в узел и выходящих из узла, равна нулю – ЗКТ;
- сумма всех напряжений в контуре равна нулю – ЗКН (раздел 3.2.5).

Задача расчета электрической цепи состоит в том, чтобы найти такие отклики на воздействия в ветвях сети, которые бы удовлетворяли законам Кирхгофа: решение найдено, если сумма токов отклика и воздействия в каждом узле равна нулю и сумма напряжений (откликов и воздействий) в контурах равна нулю.

В терминах тензорного метода двойственных сетей задачу расчета электрической цепи можно сформулировать следующим образом.

Если вектор  ${}^m\mathbf{d}$  (замкнутых путей), задан ковариантными компонентами  ${}^m d_a^0$  в свободных ветвях, имеющих метрические параметры  $Z_{ab}$ , то необходимо найти ковариантные  ${}^m d_a^c$  и контравариантные  ${}^m d_c^a$  компоненты в ветвях связанной сети по формуле (2.70).

Если вектор  ${}^j\mathbf{d}$  (разомкнутых путей), задан контравариантными компонентами  ${}^j d_0^a$  в свободных ветвях, имеющих метрические параметры  $Y^{ab} = (Z_{ab})^{-1}$ , то необходимо найти ковариантные  ${}^j d_a^c$  и контравариантные  ${}^j d_c^a$  компоненты в ветвях связанной сети по формуле (2.72). Правильность расчета компонент вектора в сетях обеспечивается аналитическим выводом уравнений, на основе принятых аксиом. Наиболее важно аксиомой тензорного метода является постоянство квадрата величины вектора при изменении структуры двойственных сетей.

В *электротехнике* компоненты  ${}^m d_a^0$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  – это источники напряжения, обозначаемые как  $e_a$ ; метрическая матрица  $Z_{ab}$  представляет собственные и взаимные сопротивления свободных ветвей сети. Решением связанной сети из таких ветвей являются:

- компоненты-отклики в координатах ветвей  ${}^m d_c^a$  – это токи (обозначаются как  $i_c^a$ ), и компоненты  ${}^m d_a^c$  – это напряжения (обозначаются как  $e_a^c$ ) в каждой ветви;
- а также  ${}^m d^a$  – токи (обозначаются как  $i^a$ ) и  ${}^m d_a$  – напряжения (обозначаются как  $e_a$ ) в базисных контурах сети (и вообще в каждом контуре).

Эти компоненты-решения должны подчиняться законам Кирхгофа, которые для источников напряжения (внутренний заданный вектор) принимают вид:

- сумма токов  $i_c^a$  всех ветвей, входящих в каждый узел сети и выходящих из него, должна быть равна нулю:  $S i_c^a = 0$ ;
- сумма напряжений (разностей потенциалов)  $e_a^c$  на ветвях, составляющих каждый контур сети, должна быть равна сумме источников напряжения  $e_a$ , (заданных компонент) на этих ветвях:  $S e_a^c = S e_a$ .

Аналогичные соотношения имеют место для вектора  ${}^j \mathbf{d}$ , где компоненты  ${}^j i_0^a$  – представляют источники тока, с двойственными заменами всех понятий, например, контуров на разомкнутые пути, и т.д. Решения для вектора  ${}^j \mathbf{d}$  также подчиняются законам Кирхгофа, которые для источников тока (внешний заданный вектор) принимают вид:

- сумма токов  ${}^j i_c^a$  ветвей, входящих в каждый узел сети и выходящих из него, должна быть равна сумме источников тока,  ${}^j i_0^a$ , (заданных компонент) на ветвях, входящих в данный узел:  $S {}^j i_c^a = S {}^j i_0^a$ ;
- сумма напряжений  $e_a^c$  на ветвях, составляющих каждый контур сети, должна быть равна нулю:  $S e_a^c = 0$ .

Баланс, равенство суммы компонент откликов сумме компонент воздействий в путях данного типа – это проявление внешнего характера векторов, «внедренных» в пространство сети (т.е. ковариантным компонентам  ${}^m d_a^0$  вектора  ${}^m \mathbf{d}$  – для замкнутых путей или контравариантным компонентам  ${}^j d_0^a$  вектора  ${}^j \mathbf{d}$  – для разомкнутых путей).

Квадрат величины вектора, равный сумме произведений ковариантных и контравариантных компонент по каждой ветви (а также замкнутому или разомкнутому пути) – это *рассеиваемая мощность*, или *полный поток энергии в единицу времени*, через сеть.

В таблице 2.1 были сопоставлены понятия (термины) и обозначения для графов и двойственных сетей. Теперь сравним понятия и обозначения двойственных сетей и электрических цепей. В таблице 4.1 сопоставлены понятия и применяемые в данной работе обозначения двойственных сетей и электрических цепей, даны аналогии между параметрами

описания *процессов* в электрических цепях, и параметрами описания *векторов*, наложенных на пространство сети.

Все величины, относящиеся к двойственным сетям, как и раньше, должны обозначаться подчеркиванием основной буквы, и/или индекса. Структурные понятия, существующие для двойственных сетей (замкнутые и разомкнутые пути, базисы независимых путей, матрицы преобразования путей и т.д.), точно таким же образом, без изменений используются для электрических цепей. Столбцы и строки матриц преобразования путей выражают запись законов Кирхгофа для соответствующих независимых элементов структуры, т.е. для замкнутого пути (контура) или для разомкнутого пути, а также для ветви и т.д.

Таблица 4.1

### Аналогии между понятиями двойственных сетей и электрических цепей

№	Двойственные сети		Электрические цепи	
	Содержание понятия	Обозначение	Содержание понятия	Обозначение
1.	Произвольный вектор, наложенный на сеть	$\underline{d}$	<u>Нет аналогии</u>	
2.	Квадрат величины вектора $\underline{d}$	$\underline{d}^2$	Мощность, поток энергии в единицу времени	$P$
3.	Ветвь	$b$	Проводник с током	$b$
4.	Метрический параметр замкнутого пути, контура	$Z$	Активное сопротивление, или комплексное сопротивление, импеданс	$R$ $Z$
5.	Обратный метрический параметр (разомкнутого пути)	$Y$	Проводимость или комплексная проводимость	$Y$
6.	Контравариантная проекция вектора $\underline{d}$ в прямом базисе (в контурах)	${}^m d^a$	Ток в контуре	$i^a$
	• в свободных ветвях	${}^m d^a_0$	• в свободных ветвях	$i^a_0$
	• в контурах связанной сети	${}^m d^a_{\cdot}$	• в контурах связанной сети	$i^a_{\cdot}$
	• в ветвях связанной сети	${}^m d^a_c$	• в ветвях связанной сети	$i^a_c$
7.	Ковариантная проекция $\underline{d}$ в прямом базисе (в контурах)	${}^m d_a$	Напряжение в контуре	$e_a$
	• в свободных ветвях	${}^m d_a^0$	• в свободных ветвях	$e_a^0$
	• в контурах связанной сети	${}^m d_a_{\cdot}$	• в контурах связанной сети	$e_a_{\cdot}$
	• в ветвях связанной сети	${}^m d_a^c$	• в ветвях связанной сети	$e_a^c$
8.	Контравариантная проекция $\underline{d}$ во взаимном базисе (в разомкнутых путях)	${}^j d^a$	Ток в разомкнутых путях	$i^a$
	• в свободных ветвях	${}^j d^a_0$	• в свободных ветвях	$i^a_0$
	• в j-путях связанной сети	${}^j d^a_{\cdot}$	• в j-путях связанной сети	$i^a_{\cdot}$
	• в ветвях связанной сети	${}^j d^a_c$	• в ветвях связанной сети	$i^a_c$
9.	Ковариантная проекция $\underline{d}$ во взаимном базисе (в разомкнутых путях)	${}^j d_a$	Напряжение в разомкнутых путях	$E_a$
	• в свободных ветвях	${}^j d_a^0$	• в свободных ветвях	$E_a^0$
	• в j-путях связанной сети	${}^j d_a_{\cdot}$	• в j-путях связанной сети	$E_a_{\cdot}$
	• в ветвях связанной сети	${}^j d_a^c$	• в ветвях связанной сети	$E_a^c$

Таблицу можно продолжить для понятий и обозначений в двойственной сети, с подчеркиванием основных букв. Интересно, что при таком сопоставлении отсутствует физическая аналогия для математического понятия *вектора, наложенного на пространство сети*. Дело в том количество энергии в единицу времени, или рассеиваемая мощность (мощность источников) соответствует *квадрату величины вектора, наложенного на сеть*, а не величине вектора. *Величина вектора* (потока энергии), как отмечалось в главе 1, имеет тогда *дробную* физическую размерность. Там показано, что собственно *вектор потока энергии* должен иметь размерность, равную корню квадратному из размерности мощности, т.е. получается, что физическая размерность этого вектора имеет дробные степени:

$$[d] = [L^{5/2} T^{-5/2}]. \quad (4.18)$$

Расщепление потока энергии между двумя взаимно двойственными структурами позволяет рассматривать такой вектор как произведение двух составляющих векторов, каждый из которых расположен в своей сети. А сети взаимодействуют в двойственных подпространствах. Тогда полный вектор (потока энергии), распространяется в полной структуре, охватывающей все виды двойственности, и получает размерность мощности. Это размерность квадрата величины вектора, которая имеет более привычный вид:

$$[d]^2 = [d] \cdot [d] = [L^{5/2} T^{-5/2}] \cdot [L^{5/2} T^{-5/2}] = [L^5 T^{-5}]. \quad (4.19)$$

Появление физической величины с дробной размерностью по отношению к пространству и времени указывает на то, что существующее понимание пространства и времени является необходимым, но не достаточным. Необходимо дополнить существующее представление структурой и двойственностью. Мощность (характеризует поток энергии) при заданных источниках энергии остается постоянной в двойственных сетях при изменении структуры. При этом одна сеть располагается в наблюдаемом пространстве, а другая – в двойственном, которое дополняет наблюдаемое пространство до целого, более общего пространства. Это полное пространство состоит из двух двойственных подпространств. Во всяком случае, таким оно должно быть для постоянства потока энергии.

Можно ожидать, что по мере увеличения знания о мире, как пространстве и времени, будут обнаружены другие инварианты, более высокого порядка, чем закон сохранения потока энергии, связанный с двойственными структурами. Эти инварианты позволят найти другие свойства пространства протяженности (длины) и пространства длительности (времени). Они дополнят отношения двойственных сетей другими, более гармоничными и многомерными отношениями. При этом процесс познания сложности пространства протяженности и длительности (а только их мы измеряем в наших наблюдениях) является бесконечным во всех направлениях. Здесь рассматривается только один из первых шагов

этого процесса, который дает математические основы для выхода за пределы наблюдаемых измерений физического пространства.

Компонентами вектора потока энергии в электрической цепи являются величины тока и напряжения, которые отличаются по способу измерения (измеряемые в одной точке – продольные, в двух – поперечные величины; см. главу 1), а также по типу структуры – напряжения, как источники воздействия, заданы для контуров, а токи – для разомкнутых путей. Эти компоненты суть «проекции» вектора в системы координат, заданные путями, структура которых не имеет размерности в смысле физики. Вместе с тем метрические параметры ветвей в цепи – это активные и реактивные сопротивления, поэтому полная физическая картина потока электрической энергии во взаимодействии процессов и структуры (как и потока любой другой энергии) достаточно сложна.

#### 4.1.3. Аддитивность мощности в двойственных сетях и цепях

Мощность в двойственных сетях обладает свойством *аддитивности*. Как известно, аддитивность – это свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно значению величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части (*МЭ*, т. 1, стб. 94). Аналогичный смысл имеют аддитивные функции. В данном случае, речь идет о том, что мощность совокупности двойственных источников воздействия (внешних и внутренних, источников тока и напряжения) равна сумме их мощностей по отдельности.

Казалось бы, этого не должно быть, поскольку мощность – квадратичная функция, представляющая собой квадрат величины вектора. Ее изменение при сложении аргументов не должно быть линейным, а аддитивность указывает на линейный характер. Нелинейность легко понять на простом примере. Если в какой-то ветви есть источник  $A$ , а отклик на него равен  $B$ , то рассеиваемая мощность равна  $P_1 = A B$ . Если же есть источник  $B$ , а отклик на него равен  $\Gamma$ , то рассеиваемая мощность  $P_2 = B \Gamma$ . Пусть теперь действуют два источника вместе,  $A + B$ , отклик на них, в силу независимости действия источников, равен  $B + \Gamma$ . Рассеиваемая мощность в ветви тогда равна:

$$P_3 = (A + B) (B + \Gamma) = A B + B \Gamma + A \Gamma + B B = P_1 + P_2 + A \Gamma + B B.$$

Таким образом, даже для одной ветви мощность при сложении источников оказывается больше, чем мощность источников, взятых по отдельности. То есть значение целого не соответствует сумме значений частей – на величину «перекрестных» членов. Следовательно, мощность здесь функция не аддитивная. Из этого возникает нелинейность теоретических и практических задач многих предметных областей, для исследования которых могут применяться сетевые модели. Это верно как для суммирования действия внешних источников (тока), так и для внутренних источников (напряжения).

Ясно, что такая же ситуация возникает не только для одной ветви, но также и для многих связанных между собой ветвей. Результатом расчета сети являются ковариантные и контравариантные компоненты вектора в каждой ветви. Именно в ветвях производятся измерения. Если расчет остановить после вычисления этих компонент для контуров (для внутренних источников) или для разомкнутых путей (для внешних источников), то это не позволит определить нагрузку на каждую ветвь, (реальный элемент системы). Через каждую ветвь может проходить несколько путей. Пути являются только координатами, выбранными с допустимой степенью произвола. Однако в самих ветвях отклики от внешних источников или от внутренних источников действуют, распространяются совместно. Суммируются токи отклика в ветвях от источников тока и источников напряжения. Суммируются разности потенциалов на ветвях от источников тока и источников напряжения. Разумеется, с учетом их направления, которое получилось по результатам расчета.

Тогда суммарная мощность, рассеиваемая в каждой ветви, и в сети в целом, может оказаться не равной сумме мощностей от внешних источников и внутренних источников по отдельности. Это указало бы на то, что внешние и внутренние источники не являются независимыми друг от друга. Однако двойственные источники не должны влиять друг на друга, поскольку расположены в ортогональных подпространствах. Независимость источников тока и напряжения, открытых и замкнутых источников, возможна только в том случае, если отмеченные выше «перекрестные» члены равны нулю. Покажем, что это действительно так, поскольку ортогональность матриц преобразования замкнутых и разомкнутых путей делает равными нулю произведения соответствующих подматриц.

Пусть в сети с метрикой свободных ветвей  $Z$  внутренние источники (ЭДС) заданы вектором  $e_a$ . Тогда токи отклика в связанных ветвях на эти источники представляет вектор:

$$i_c^a = {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C e_a = {}^m C_t {}^m Y {}^m C e_a = {}^m Y_c e_a$$

Разности потенциалов (напряжения) на связанных ветвях представляет вектор:

$$e_c^a = Z {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C e_a = Z {}^m C_t {}^m Y {}^m C e_a = Z {}^m Y_c e_a$$

Рассеиваемая в такой сети мощность равна:  ${}^m P_c = e_c^a i_c^a = Z {}^m Y_c e_a {}^m Y_c e_a$ .

Пусть теперь в сети с метрикой свободных ветвей  $Y = Z^{-1}$  внешние источники воздействия (источники тока) заданы вектором  ${}^j I$ .

Разности потенциалов (напряжения) на ветвях на эти источники представляет вектор:

$${}^j E_a^c = {}^j A_t ({}^j A Y {}^j A_t)^{-1} {}^j A {}^j I^a = {}^j A_t {}^j Z {}^j A {}^j I^a = {}^j Z_c {}^j I^a.$$

Токи отклика в ветвях на эти источники представляет вектор

$${}^j I_c^a = Y {}^j A_t ({}^j A Y {}^j A_t)^{-1} {}^j A {}^j I^a = Y {}^j A_t {}^j Z {}^j A {}^j I^a = Y {}^j Z_c {}^j I^a.$$

Рассеиваемая в такой сети мощность равна:  ${}^j P_c = {}^j I_c^a {}^j E_a^c = Y {}^j Z_c {}^j I^a {}^j Z_c {}^j I^a$ .

Если теперь одновременно заданы внутренние источники  $e_a$  и внешние источники  $I^a$ , то откликами на них в каждой ветви  $\alpha$  станет сумма разностей потенциалов  ${}^m e_\alpha^c + {}^j E_\alpha^c$  и сумма токов  ${}^m i_c^a + {}^j I_c^a$ . Следовательно, в каждой ветви будет рассеиваться мощность, равная:

$$P_c = ({}^m e_a^c + {}^j E_a^c) ({}^m i_c^a + {}^j I_c^a) = {}^m e_a^c {}^m i_c^a + {}^j E_a^c {}^j I_c^a + {}^m e_a^c {}^j I_c^a + {}^j E_a^c {}^m i_c^a = \\ = ({}^j P_c + {}^m P_c) + ({}^m e_a^c {}^j I_c^a + {}^j E_a^c {}^m i_c^a).$$

То есть, оказывается, что к сумме мощностей от внутренних и внешних источников добавляются два «перекрестных» члена. В каждой ветви это произведение узлового тока на контурное напряжение плюс произведение контурного тока на узловое напряжение, которые могут увеличивать значение данного показателя, делая его изменение нелинейным. Такая же нелинейность могла бы возникать и для всей сети в целом. Однако оказывается, что в силу ортогональности матриц преобразования путей «перекрестные» члены равны нулю. Чтобы в этом убедиться, подставим вместо токов и напряжений их выражения через матрицы преобразования. Например, для первого «перекрестного» члена получим выражение, которое преобразуем, используя правила перестановки и транспонирования матриц  $(A B)_t = B_t A_t$ :

$${}^m e_a^c {}^j I_c^a = Z {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C e_a Y {}^j A_t ({}^j A Y {}^j A_t)^{-1} {}^j A I^a = \\ = ({}^m C_t {}^m Y {}^m C e_a)_t Z_t Y {}^j A_t {}^j Z {}^j A I^a = e_{at} ({}^m C_t ({}^m Y {}^m C))_t {}^j A_t {}^j Z {}^j A I^a = \\ = e_{at} ({}^m Y {}^m C)_t \underline{{}^m C {}^j A_t} {}^j Z {}^j A I^a = 0, \text{ поскольку } {}^m C {}^j A_t = 0.$$

Равенство  ${}^m C {}^j A_t = 0$  следует из соотношения (2.24), где представлены свойства произведения ортогональных матриц преобразования замкнутых и разомкнутых путей. Предполагается, что матрицы  $Z$  и  $Y$  для свободных и для связанных ветвей симметричны (как следствие закона сохранения энергии в системе). Их произведение равно единичному вектору. Аналогично преобразуется и второй «перекрестный» член. И он также равен нулю. Следовательно, совокупная мощность, рассеиваемая в ветвях связанной сети от внешних и внутренних источников, равна сумме мощностей, которые эти источники рассеивают в сети по отдельности, т.е. независимо друг от друга. Такая линейность для квадратичной, положительно определенной функции, которой является мощность, есть следствие двойственных закономерностей структуры. Из этого следует, что в любой ветви связанной сети измеримая величина, возникающая как отклик на внешний источник тока, «не замечает» тока, если он возникает в той же ветви как отклик на внутренний источник напряжения. Аналогично с контурным напряжением и узловым током.

Если ветвь одна, то она либо замкнутая, либо разомкнутая. По этой причине внешние и внутренние источники не могут оказывать воздействие одновременно, а их отклики не оказывают влияния друга на друга.

Таким образом, свойства двойственности открытых и замкнутых путей обеспечивают линейность преобразования мощности, которую рассеивают в сети внешние и внутренние



потоки энергии. Источники энергии (наложенные векторы) могут быть заданы как одновременно, так и по отдельности. Мощность, рассеиваемая от двойственных источников, обладает свойством суммирования, она аддитивна. Это можно рассматривать как равенство суммы квадратов квадрату суммы. Таким свойством сеть обладает благодаря независимости, ортогональности замкнутых и разомкнутых путей, которые характеризуют способность системы быть одновременно замкнутой и открытой.

Свойства линейности касаются также сетевых моделей предметных областей, что может помочь решить некоторые проблемы, связанные с нелинейностью. То есть либо привести нелинейные задачи к линейному виду, либо исключить возможность появления нелинейности, оставаясь в рамках линейных преобразований.

Свойство аддитивности рассеиваемой мощности играет определенную роль в сетевой модели межотраслевого баланса. Эта модель потоков продуктов и денежных средств рассматривается в следующей главе.

Для сетевого моделирования потоков продуктов токами электрической цепи используется свойство независимости источников тока и напряжения. Это позволило с помощью контурных токов дополнить значения узловых токов таким образом, чтобы они в совокупности соответствовали потокам продуктов. Такое двойственное взаимодействие позволило решить принципиальную проблему моделирования экономической системы с помощью технической модели. То есть моделирование системы, которая увеличивает доступную свободную энергию с помощью такой системы, которая уменьшает, рассеивает свободную энергию. Важно, что такая «накачка» узловых токов контурными токами не приводит к нелинейному увеличению суммарной мощности в системе. Это позволяет создать методы анализа и управления устойчивым развитием социальных и экономических систем с помощью измеримых величин в сетевой модели, соединяющей процессы и структуру.

## 4.2. Инвариантность потока в сети

В главе 2 получены соотношения, связывающие структуру и квадрат величины вектора в пространстве двойственных сетей. Рассмотрим подробнее не только геометрическую, но и физическую сторону постоянства квадрата величины вектора при изменении структуры.

### 4.2.1. Квадрат величины вектора и поток энергии в сети

Инвариантность потока в двойственных сетях автор сначала обнаружил как физическую закономерность. То есть, как постоянство рассеиваемой мощности (потока энергии) при изменении структуры электрической цепи. Как уже отмечалось, для построения тензорного анализа сетей Крон *использовал постулат об инвариантности мощности*, рассеиваемой источниками, при соединении ветвей в сеть. Отсюда он получал тензорную формулу преобразования напряжения как ковариантного вектора; формулу преобразования импеданса (метрической матрицы), другие формулы для расчета контурных и узловых сетей. О двойственных сетях речь тогда не шла.

Критики Крона указывали на то, что постулат не выполняется при изменении соединений в цепи. В самом деле, возьмем две отдельных ветви с их источниками (заданными компонентами) – например, две одинаковые батарейки с лампочками. Если батарейки включены отдельно друг от друга, то лампочки горят, сеть рассеивает мощность. Если соединить батарейки полюсами навстречу друг другу, то суммарное напряжение упадет до нуля, лампочки светить и нагреваться не будут, рассеиваемая сетью мощность упадет до нуля. Таким образом, мощность при изменении структуры сети меняется.

С этим связана также упоминавшаяся теорема Волавера о не усилении мощности в резистивных сетях (*Свами*, 1984, с. 241). Суть этого известного в теории цепей факта в том, что для заданной цепи, состоящей из резисторов и источников, величина напряжения на всех резисторах не выше суммы величин напряжения на источниках. Поскольку токи пропорциональны величине напряжений, то и суммарная мощность на резисторах (ветвях) в цепи не выше суммы мощностей на отдельных ветвях с источниками.

Очевидно, что компоненты вектора (и мощность, как квадрат его величины) останутся постоянными, если все источники в связанной сети сохраняют свои прежние пути, т.е. в чисто контурных или чисто узловых сетях. Это и показано в примерах раздела 3.2. Изменение мощности связано с изменением структуры – при соединении или разъединении меняется число узлов, а значит число базисных замкнутых и разомкнутых путей в сети.

С точки зрения геометрии решение задачи сети – это преобразование компонент вектора, заданного в системе координат свободных ветвей, к новой системе координат, образованной новым выбором путей в сети (или новым соединением ветвей) с помощью матриц преобразования путей базиса. Правильность такого расчета обеспечена

формальными построениями последовательности (оператора) преобразований, которая выполняет функции группы. Эти вопросы рассмотрены в главе 2.

С точки зрения электротехники, правильность найденного решения проверяет выполнение законов Кирхгофа, поскольку в теории цепей не рассматриваются двойственные сети и базисы, а также группы преобразований. То есть, *одновременно*:

- в каждом узле должна равняться нулю сумма токов (контравариантные компоненты);
- в каждом контуре должна равняться нулю сумма всех напряжений (ковариантные компоненты).

Сложилось противоречие: постулат не выполняется, но основанные на нем формулы дают правильные результаты, соответствующие законам Кирхгофа. Крон пытался найти выход из противоречия, введя понятие «ортогональные сети». Так называется глава 16, по сути, центральная в книге «Тензорный анализ сетей» (Крон, 1978). Возможно, Крон пытался вложить в это понятие представление о полноте базиса замкнутых или разомкнутых путей, но в одной сети. Крон не знал, что этими свойствами обладают две двойственные сети. Крон считал, что ортогональная сеть связанная, но в ней как бы присутствуют все замкнутые пути и все разомкнутые пути. Этому соответствуют квадратные матрицы преобразования  $S$  и  $A$ . Тогда, как он полагал, мощность инвариантна. Однако по сути это означает замыкание всех узлов, или размыкание всех контуров, т.е. ортогональная сеть фактически должна представлять собой чисто контурную сеть или чисто узловую сеть. Для таких сетей можно получить отклики на приложенные воздействия, т.е. токи и напряжения. Мощность по сравнению с сетью свободных ветвей (простейшая сеть, по терминологии Крона) не изменится, поскольку матрицы преобразования квадратные.

Однако в узлах и контурах *связанной цепи* токи и напряжения, полученные для *чисто контурных* или *чисто узловых* цепей (сетей), не удовлетворяют законам Кирхгофа. Как отмечалось, при переходе к связанной цепи изменится число узлов, а, следовательно, изменится число замкнутых и разомкнутых путей. Это отражается в том, что матрицы преобразования становятся прямоугольными. Следовательно, отклики чисто контурных или чисто узловых цепей, которыми по своей сути являются ортогональные сети Крона, не являются решениями задачи для связанной цепи.

Когда оказалось, что постулат Крона не выполняется, а основанный на нем тензорный метод расчета сетей (цепей) дает правильные решения, возникла другая задача. Поскольку при изменении структуры цепи происходит изменение рассеиваемой мощности, то надо понять, как она меняется. А именно, необходимо найти закономерность изменения мощности при изменении соединения ветвей, например, при соединении отдельных ветвей в связанную цепь. И вообще, найти закономерность изменения мощности при изменении структуры

связей. В результате проведенных исследований, инвариант мощности автор первоначально нашел в процессе поиске закономерности изменения мощности при изменении структуры соединения ветвей *в одной электрической цепи*.

Для этого исследовалось изменение мощности при изменении, шаг за шагом, связей между ветвями для цепей с различным числом ветвей и при разных видах источников – тока и напряжения. Результаты были представлены автором в ТМТС (Петров, 1985, гл. 2). Сначала рассматривался простой случай цепи из четырех ветвей, в которой при соединении ветвей оказывается два контура и две пары узлов (два разомкнутых пути). Этот пример удобен тем, что в контурной и узловой цепи возникает матрица сопротивлений (проводимостей) второго порядка. Это уже матрица, а не просто число, но она обращается легко, что ускоряет расчеты. При поиске неизвестной закономерности полезно проводить расчеты без ЭВМ, чтобы видеть все промежуточные результаты, которые могут содержать важную информацию, а также при необходимости менять алгоритм расчета, не прибегая к программированию. Кроме того, оказалось полезно вести расчеты в простых дробях, отношения между которыми указывают путь к неизвестной закономерности.

Рассмотрим еще раз процедуру изменения структуры при переходе от отдельных свободных ветвей простейшей сети к соединенным ветвям связанной сети. Для общности будем считать, что в каждой ветви может располагаться как источник тока, так и источник напряжения. В некоторых ветвях они могут отсутствовать, их значение равно нулю. Для простоты и симметрии положим, что в каждой ветви источник напряжения и источник тока имеют одинаковую мощность. Если ветвь замкнута, то работает источник напряжения, а источник тока не работает, поскольку нет разомкнутого пути. Если ветвь разомкнута, то работает источник тока, а источник напряжения не работает, поскольку нет замкнутого пути.

При соединении свободных ветвей происходит слияние и расслоение узлов. В результате некоторые контуры размыкаются, а некоторые открытые пути замыкаются. В зависимости от этого начинают включаться источники тока или источники напряжения.

Если в простейшей сети все ветви замкнуты, то источники тока не работают, работают только источники напряжения. При соединении ветвей контуры размыкаются и соединяются возникшими узлами с границами-узлами других ветвей. Контуров, в которых работают источники напряжения, становится меньше. Рассеиваемая источниками напряжения мощность уменьшается (не возрастает). Однако одновременно возникают разомкнутые пути и по ним начинают работать источники тока, до этого «спавшие». Рассеиваемая источниками тока мощность возрастает (не уменьшается). При этом в соответствии с инвариантом двойственных сетей рост «узловой» мощности в точности дополняет (компенсирует) уменьшение «контурной» мощности.

Если в простейшей сети все ветви разомкнуты, то источники напряжения не работают, работают только источники тока. При соединении ветвей границы-узлы замыкаются и соединяются с границами-узлами других ветвей, появляются контуры. Разомкнутых путей, в которых работают источники тока, становится меньше. Мощность, рассеиваемая источниками тока, уменьшается (не возрастает). Однако одновременно возникают контуры и по ним начинают работать источники напряжения, до этого «спавшие». Мощность, рассеиваемая источниками напряжения, возрастает (не уменьшается). При этом рост «контурной» мощности в точности дополняет (компенсирует) уменьшение «узловой» мощности. В сумме они постоянны при заданных условиях. *Это инвариантность мощности «по горизонтали»* в соответствии с круговой диаграммой, один из вариантов которой представлен на рис. 4.2. Дело не в величине источников, или местах их расположения, а в свойствах двойственности сети, а в более широком смысле – в свойствах двойственности пространства, которая проявляется при изменении структуры.

Сумма базисных замкнутых путей и разомкнутых путей постоянна при любых изменениях структуры связей в сети (цепи). Потенциально возможная суммарная мощность от источников тока и источников напряжения в сети вдвое больше, чем суммарная мощность, реально рассеиваемая в сети при любых изменениях структуры.

Однако все изменения структуры и мощности (потока энергии) в одной сети, одновременно и постоянно сопровождают обратные изменения структуры и мощности в двойственной сети. При этом рост «узловой» мощности в данной сети в точности дополняет (компенсирует) уменьшение «узловой» мощности в двойственной сети. В сумме они постоянны. Соответственно, рост «контурной» мощности в данной сети в точности дополняет (компенсирует) уменьшение «контурной» мощности в двойственной сети. В сумме они постоянны. *Это инвариантность мощности «по вертикали»* в соответствии с круговой диаграммой на рис. 4.2.

Изменения структуры (потока энергии) связаны с проявлением в электротехнике принципа наименьшего действия, универсального принципа движения материи в этом мире. Действие – это физическая величина, имеющая размерность произведения энергии на время, которая является существенной характеристикой движения системы (ФЭС, с. 146). Если рассматривать некоторую совокупность возможных движений механической системы между двумя ее положениями, то истинное (фактически происходящее) движение системы будет таким, что для него значение действия является наименьшим. Это позволяет найти уравнения движения механической системы и изучить это движение. Действие по Гамильтону и действие по Лагранжу приводят к двум формам принципа наименьшего действия. Это форма Гамильтона-Остроградского (более общая, может распространяться на неконсервативные

системы) и форма Мопертюи-Лагранжа (в этой форме принцип справедлив только для консервативных систем, и притом голономных систем).

В электротехнике данный принцип реализуется в том, что действие (поток энергии, проходящий через цепь за определенное время) минимален тогда, когда токи и напряжения, характеризующие поток энергии, удовлетворяют законам Кирхгофа. Если поток энергии постоянный, то действие можно характеризовать мощностью (энергия в единицу времени). Т.е. поток энергии через структуру распределяется по элементам так, что сумма рассеиваемой мощности минимальна. Таким образом, важнейший принцип движения материи в нашем мире связывает процессы и структуру. Минимальная величина действия определяет траекторию движения механической системы, она же определяет законы сохранения потока электрической энергии (законы Кирхгофа), т.е. отчасти траекторию движения электрической системы.

Законы Кирхгофа связаны с геометрической размерностью элементов сети. Первый закон Кирхгофа (сумма всех токов в узле равна нулю, или сумма входящих в узел токов равна сумме выходящих) сформулирован для границ ветвей. Ветви представляют собой одномерные отрезки. Второй закон Кирхгофа (сумма всех напряжений в контуре равна нулю) также вроде бы имеет отношение к ветвям. На самом деле он относится к двумерным сетям, поскольку напряжения есть разность потенциалов между двумя поверхностями с одинаковыми потенциалами (эквипотенциальными поверхностями). Это поверхности проходят по узлам контура, ортогонально ветвям. Сумма «потока» напряжения по этим поверхностям вдоль всего контура равна нулю. Таким образом, токи одномерны, напряжения двумерны, а их произведение (мощность, т.е. квадрат величины вектора потока энергии) характеризует трехмерный поток энергии. Поскольку мощность есть квадрат величины трехмерного вектора потока энергии, то она фактически характеризует шестимерную величину.

Итак, при поиске зависимости изменения мощности от изменения структуры, оказалось, что сумма мощностей в связанных контурной  ${}^m P^{\wedge}$  сети и узловой  ${}^j P^{\vee}$  сетях равна половине суммы мощностей в свободных ветвях. Для наглядности были выбраны единичные импедансы, единичные источники тока и напряжения в ветвях. При этом источники тока и напряжения оказываются равной мощности и фактически исследуются свойства структуры. В контурной цепи мощность в свободных ветвях обозначается  ${}^m P_0$ , а в узловой цепи мощность в свободных ветвях обозначается  ${}^j P_0$ . Тогда это выражается формулой:

$${}^m P_0 + {}^j P_0 = 2 ({}^m P^{\wedge} + {}^j P^{\vee}) = 2 ({}^m P_c + {}^j P_c). \quad (4.20)$$

Эта закономерность постоянства мощности выполняется как в отдельных ветвях, так и в базисных путях. Она также выполняется по отдельности для суммы рассеиваемых мощностей от заданных источников напряжения  ${}^m P_0$  или заданных источников тока  ${}^j P_0$  т.е.:

$${}^m P_0 = {}^m P^{\wedge} + {}^j P^{\vee} = {}^j P_0. \quad (4.21)$$

Казалось, что половина мощности при соединении свободных ветвей в цепь куда-то исчезает. В самом деле, есть мощность в свободных ветвях электрической цепи, когда в них

заданы источники напряжения. Есть мощность в свободных ветвях сети, когда в них заданы источники тока. Если источники напряжения и источники тока заданы одновременно, то полная мощность в такой цепи из отдельных ветвей равна сумме мощностей, рассеиваемых от источников тока и напряжения. Допустим, что в каждой ветви можно так подобрать источники тока и напряжения, что они рассеивают в ней одинаковую мощность. Тогда суммы мощностей источников тока и напряжения в совокупности всех свободных ветвей также равны друг другу. Можно было бы сказать, что рассеивается удвоенная мощность.

При соединении свободных ветвей в связанную цепь (при тех же источниках тока и напряжения) оказалось, что рассеиваемая мощность уменьшается. Однако сумма этих рассеиваемых мощностей равна половине суммы мощности источников тока и напряжения, которая рассеивалась в свободных ветвях. Таким образом, при связывании свободных элементов-ветвей половина мощности «исчезла». Автор так и назвал раздел в главе 2 книги ТМТС – «Куда исчезает мощность» (Петров, 1985).

Все это рассматривалось в одной сети, поскольку тогда двойственные сети автору не были известны. Хотя интуитивно уже тогда было ясно, что «исчезнувшая» часть мощности от источника каждого вида должна оказаться в какой-то другой сети, дополнительной к данной сети. С точки зрения геометрии сетей формула (4.21) есть баланс мощностей в одной цепи. Она соответствует формуле постоянства квадрата величины вектора:

$$|j\mathbf{d}_c|^2 + |m\mathbf{d}_c|^2 = |m\mathbf{d}_0|^2 = |j\mathbf{d}_0|^2, \quad (4.22)$$

и предполагает не только наличие в сети двух векторов – замкнутых и разомкнутых путей – одновременно, но и наличие зависимости между ними, которая в данном случае состоит в равенстве квадратов их величины. Если подставить сюда выражение квадратов величин векторов через произведение ковариантных и контравариантных компонент:

$$j d_a^c j d_c^a + m d_a^c m d_c^a = j d_a^0 j d_0^a = m d_a^0 m d_0^a, \quad (4.23)$$

или выражение рассеиваемых мощностей через произведение напряжений и токов на каждой ветви электрической цепи:

$$j E_a^c j I_c^a + m e_a^c m i_c^a = j E_a^0 j I_0^a = m e_a^0 m i_0^a, \quad (4.24)$$

то в силу независимости путей, в которых записаны эти величины, такие равенства фактически означают, что соответствующие компоненты в свободных ветвях должны быть равны друг другу:

$$j E_a^0 j I_0^a = m e_a^0 m i_0^a, \quad (4.25)$$

причем для каждой ветви  $\alpha$  в рассматриваемой сети. Это означает, что мощности источников тока и напряжения в каждой ветви должны равняться друг другу, что накладывает на такие равенства некоторые ограничения, зато позволяет связать компоненты векторов в ортогональных друг другу замкнутых и разомкнутых путях. Это отличает формулы (4.23) и

(4.24) от формул (2.60) и (2.61). Там было показано равенство суммы квадратов величин в данной и двойственной сети, но для вектора только одного из типов – или замкнутых путей  ${}^m\mathbf{d}$ , или разомкнутых путей  ${}^j\mathbf{d}$ . Зато там эти векторы могут иметь произвольные значения относительно друг друга.

Таким образом, рассеиваемая мощность (*квадрат величины наложенного вектора*) и *структура цепи (сети)* связаны соотношениями двух двойственных видов:

- в одной и той же сети при любой структуре мощность (квадрат величины вектора) в сумме замкнутых и разомкнутых путей равна мощности источников *либо* замкнутых путей (напряжения), *либо* разомкнутых путей (токов). Это происходит при условии, что в каждой свободной ветви мощности этих источников (векторы  ${}^m\mathbf{d}$  и  ${}^j\mathbf{d}$ ) попарно равны друг другу, что и выражается формулой типа (4.21) – инвариант «по горизонтали диаграммы»;
- каждый вектор  ${}^m\mathbf{d}$  или  ${}^j\mathbf{d}$  имеет постоянный квадрат величины, независимо от другого вектора, но *в совокупности двух двойственных сетей* при любой структуре в сумме замкнутых для  ${}^m\mathbf{d}$  или разомкнутых  ${}^j\mathbf{d}$  путей и это выражается формулой типа (2.60) или (2.61) – инвариант «по вертикали диаграммы». Соответствующие примеры расчета сетей рассмотрены в разделе 3.2.

Для выполнения формул типа (4.21) необходимо, чтобы в *простейшей* сети действовали источники только одного типа. Фактически так и происходит, – каждая свободная ветвь, представленная нам в наблюдениях, либо замкнута, либо разомкнута и при этом второй путь расположен в двойственной компоненте ветви, как было показано на рис. 2.2. Более естественным представляется как раз инвариант «по вертикали» – там нет ограничений по величине и типу источников. Если есть хотя бы один источник любого вида, обладающий собственной мощностью, то эта мощность равна сумме мощностей, рассеиваемых этим источником в данной цепи и двойственной цепи.

Диаграмма на рис. 4.2 показывает отношения между квадратами величины вектора в данной и двойственной сети, для векторов, заданных в замкнутых и разомкнутых путях. Квадрату величины вектора соответствует мощность, которая рассеивается в двойственных электрических цепях при задании источников напряжения, или источников тока. Постоянство мощности (с изменением ее составляющих) при изменении структуры было представлено (*Петров, 1985*) в виде круговой диаграммы, напоминающей детский мячик из двух разноцветных половин, погруженный наполовину в некую жидкость, поверхность которой представляет собой границу раздела двух «сред», двух двойственных сетей и рассмотрено на рис. 3.20 и 3.21.

*Площадь* темной (красной) половины такого мячика на рис. 4.2 соответствует мощности (или *квадрату* величины вектора) в замкнутых путях как данной, так и



двойственной сети, а *площадь* светлой (синей) половины – мощности в разомкнутых путях. При изменении структуры мощность в двойственных цепях меняется, что можно представить пропорциональным изменением площадей разных цветов при вращении двухцветного мячика, в «воде», где:

- «воздушная» среда представляет наблюдаемое пространство,
- «водная» среда представляет двойственное пространство.

Вращение «мячика», представляющего собой диаграмму изменения мощности, меняет доли красного и синего цвета над (и под) поверхностью раздела двух сред. Сумма площади красного цвета (мощность внутренних источников, т.е. напряжения) над и под поверхностью (в данной и двойственной цепи) постоянна. Сумма площади синего цвета (мощность внешних источников, т.е. тока) над и под поверхностью постоянна. Сумма площади красного и синего цвета над поверхностью, а также сумма площади красного и синего цвета под поверхностью, постоянны. При изменении структуры двойственных цепей, рассеиваемая мощность, численно равная площади соответствующих секторов «мячика», меняется, но меняется согласованно, таким образом, что остаются постоянными четыре суммы в базисах замкнутых путей и разомкнутых путей. Эти суммы можно разделить на инварианты в пределах одной цепи, т.е. инвариант «по горизонтали диаграммы» и на инварианты в двух двойственных цепях, т.е. инвариант «по вертикали диаграммы», а именно:

инварианты «по вертикали диаграммы»

- базис замкнутых путей – внутреннее (контурное) возбуждение, данная сеть и двойственная сеть (темная половина);
- базис разомкнутых путей – внешнее (узловое) возбуждение, данная сеть и двойственная сеть (светлая половина);

инварианты «по горизонтали диаграммы»

- данная сеть, контурное возбуждение и узловое возбуждение (верхняя половина круговой диаграммы);
- двойственная сеть, узловое возбуждение и контурное возбуждение (нижняя половина круговой диаграммы).

*Постоянство суммарной рассеиваемой мощности при изменении структуры двух двойственных цепей – это проявление закона сохранения потока энергии.* Полная диаграмма изменения мощности при изменении структуры данной и двойственной сетей, в которых заданы источники энергии двух типов, представлена на рис. 4.2.

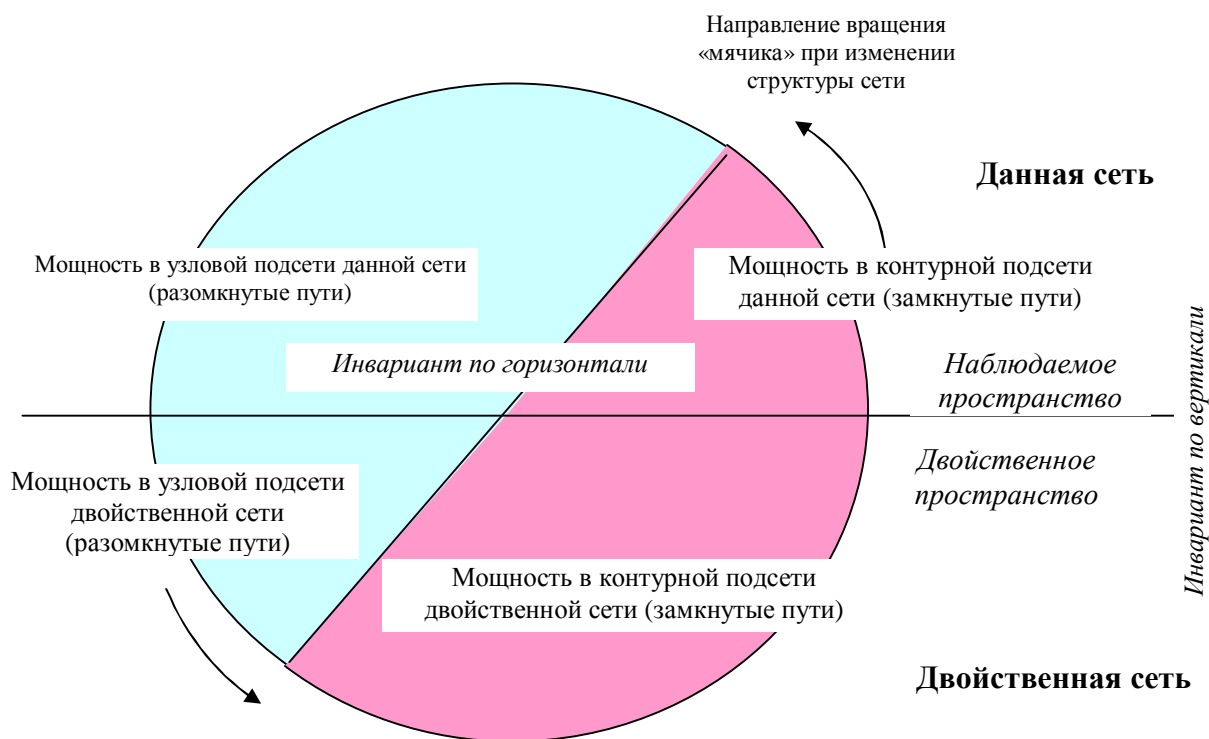


Рис. 4.2. Диаграмма изменения мощности в двойственных цепях при изменении структуры

Таким образом, диаграмма на рис. 4.2 показывает, что можно выделить два вида двойственности сетей и инварианта мощности. Для каждого из них инвариантом является на диаграмме площадь полукруга, представляющая соответствующие мощности. Один вид инварианта – «по вертикали», т.е. потоку энергии соответствует один вид путей, один вид источника, но две цепи (сети). Это постоянство мощности в двух двойственных сетях (цепях) при изменении структуры, отдельно для замкнутых путей и для разомкнутых путей. Соответственно, для внутренних источников (напряжения) замкнутых систем и для внешних источников (тока) открытых систем. Здесь играет роль двойственность структуры цепей (сетей).

Другой вид инварианта – «по горизонтали», т.е. потоку энергии соответствуют два вида путей, два вида источников, но одна сеть. Это постоянство рассеиваемой мощности в одной сети (цепи) в сумме от внутренних источников и внешних источников. Это при условии, что мощности источников в каждой ветви равны друг другу, либо равны нулю. Если источники тока и напряжения в ветви не равны друг другу, то рассеиваемые от них мощности все равно подчиняются инварианту двойственных сетей, хотя соответствующая диаграмма не будет столь наглядной. Здесь играет роль двойственность замкнутых и разомкнутых путей в структуре одной цепи.

Площадь всего круга представляет инвариант мощности (квадрата величины вектора потока энергии) при изменении структуры двух двойственных цепей (сетей) при возбуждении одновременно внешними и внутренними источниками (тока и напряжения), которые распространяются, соответственно, по разомкнутым и замкнутым путям. Круговая диаграмма изменения и сохранения мощности представляет наглядное выражение закона сохранения потока энергии, в данном случае – в двойственных электрических цепях.

#### 4.2.2. Изменение мощности в цепи при изменении структуры

Рассмотрим подробнее особенности изменения круговых диаграмм для закона сохранения потока энергии в двойственных электрических цепях при изменении структуры, изменении видов источников.

Итак, постоянство мощности в сети при изменении структуры было представлено автором (*Петров, 1985*) в виде круговой диаграммы, похожей на детский мячик двух цветов, погруженный наполовину в некую жидкость, поверхность которой представляет собой границу раздела двух сетей, двух пространств. *Площадь* светлой половины такого мячика на рис. 4.2 соответствует мощности в замкнутых путях данной и двойственной сети, а *площадь* темной половины – мощности в разомкнутых путях данной и двойственной сети.

На рис. 4.3 представлена схема изменения круговых диаграмм преобразования мощности при постепенном изменении структуры двойственных цепей. В заданной сети – от соединения свободных замкнутых ветвей слева в связанную сеть до их превращения в свободные разомкнутые ветви справа. В двойственной сети – наоборот, от соединения свободных разомкнутых ветвей слева в связанную сеть и до их превращения в свободные замкнутые ветви справа. Пунктир изображает линию раздела двойственных сетей. На левом круге площади представляют мощности, когда в данной подсети (верхний полукруг), все свободные ветви замкнуты, а в двойственной подсети (нижний полукруг) – все ветви разомкнуты. Справа – наоборот, в данной сети все ветви разомкнуты, а в двойственной сети – все замкнуты. Круг в центре – это промежуточное состояние, т.е. распределение мощностей в связанных двойственных сетях, когда в каждой из них часть путей замкнута, а часть – разомкнута. Стрелки и матрицы около них *над* пунктиром показывают преобразования от двух свободных *данных* сетей замкнутых (слева) и разомкнутых (справа) ветвей к связанной сети в центре в наблюдаемом пространстве. Стрелки *под* пунктиром показывают преобразования от двух свободных *двойственных* сетей замкнутых (справа) и разомкнутых (слева) ветвей к связанной сети в центре в двойственном пространстве.

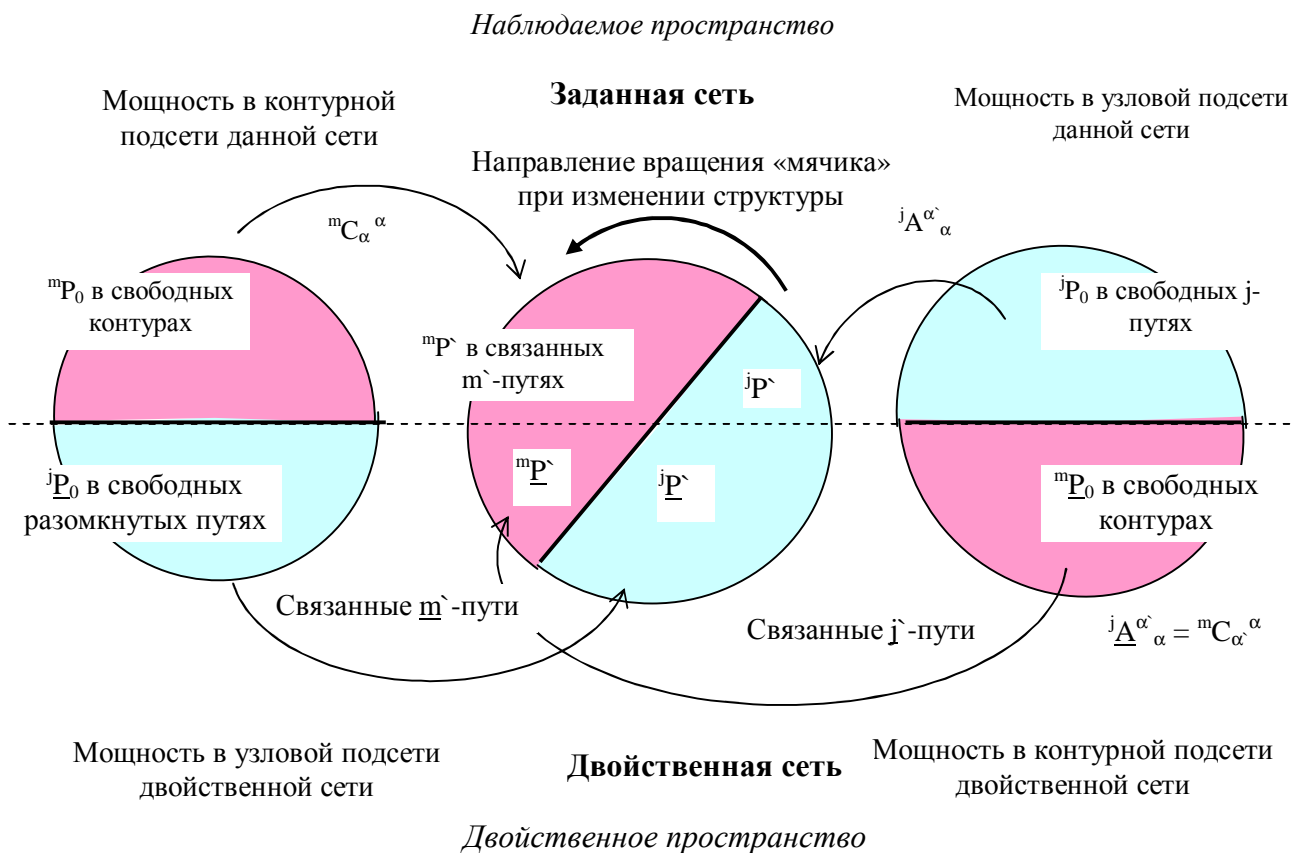


Рис. 4.3. Круговая диаграмма изменения мощности (квадрата величины вектора) при изменении структуры в двойственных цепях

Пока в заданной сети замкнутые ветви не связаны, как на рис. 2.3.ж (или на рис. 4.4.и), т.е. составляют чисто контурную сеть, вся мощность  ${}^m P_0$  (весь вектор  ${}^m \mathbf{d}$ ) расположена в этой сети и представлена верхней половиной левого круга. Двойственные части этих ветвей все разомкнуты, как на рис. 2.3а (или на рис. 4.4а), т.е. составляют чисто узловую сеть, так же, как на рис. 2.3.б, а вся мощность  ${}^j P_0$  (весь вектор  ${}^j \mathbf{d}$ ) расположена в этой сети и представлена нижней половиной левого круга. Если в заданной сети ветви все разомкнуты, то двойственные их части все замкнуты, и половинки круга меняются местами, как показано на правом круге.

При изменении структуры, когда ветви связаны, и число замкнутых и разомкнутых путей изменилось, мощность перераспределяется. Это представлено в центральном круге и, как отмечено в разделе 3.2.1, происходит двояко. Для внутренних источников (вектор  ${}^m \mathbf{d}$ ), поток энергии, измеряемый рассеиваемой мощностью, (как и квадрат величины вектора  $\mathbf{d}$ ) разделяется, «расщепляется» между двойственными сетями. При этом в данной и двойственной цепях возникают мощности, т.е.  ${}^m P_{a^{\sim}}$  и  ${}^m P_{a^{\cdot}}$ . При изменении структуры их сумма постоянна, по формуле (2.60):

$${}^m P_a^0 = {}^m P_{a^{\sim}} + {}^m P_{a^{\cdot}}. \tag{4.26}$$

Аналогично возникают мощности  ${}^jP_a$  и  ${}^j\underline{P}_a$  – для вектора  ${}^j\mathbf{d}$ , но их сумма также постоянна, – по формуле (2.61) в терминах мощностей, а не квадратов величины вектора:

$${}^jP_a^0 = {}^jP_a + {}^j\underline{P}_a \quad (4.27)$$

Если в эти формулы подставить выражения мощностей через матрицы преобразования и импеданса, то получим уже известные формулы  $mj$ -инвариантности при отсутствии метрики (единичная матрица импеданса, метрическая матрица), как в (2.77):

$${}^mC_t ({}^mC {}^mC_t)^{-1} {}^mC + {}^m\underline{C}_t ({}^m\underline{C} {}^m\underline{C}_t)^{-1} {}^m\underline{C} = I, \quad (4.28)$$

а при наличии метрики получим, например, как в (2.75), где  $Y = \underline{Z}$ :

$$(\underline{Z})^{-1} = Y = {}^mC_t ({}^mC \underline{Z} {}^mC)^{-1} {}^mC + Y {}^j\underline{C}_t ({}^j\underline{C} Y {}^j\underline{C}_t)^{-1} {}^j\underline{C} Y \quad (4.29)$$

Но мощность (как и  $|\mathbf{d}|^2$ ) разделяется между подпространствами замкнутых и разомкнутых путей в каждой из двойственных сетей (при равных мощностях источников в каждой ветви  $\mathbf{x}$ , или равных квадратах величины вектора  $|\mathbf{d}_x|^2 = |{}^j\mathbf{d}_x|^2$ ), при этом одна часть мощности рассеивается в замкнутых путях, а другая часть в разомкнутых путях. Пропорционально мощностям меняются площади на диаграмме. Это соответствует формулам (4.20) и (4.21). Если подставить выражения мощностей через матрицы преобразования и импеданса, то получим уже известные формулы инварианта двойственности. Например, при отсутствии метрики (единичная матрица импеданса) инвариант представлен в соотношении (2.76), которое еще раз запишем как:

$${}^mC_t ({}^mC {}^mC)^{-1} {}^mC + {}^jA_t ({}^jA {}^jA_t)^{-1} {}^jA = I \quad (4.30)$$

При изменении структуры связей изменение на диаграмме площадей, соответствующих мощностям, происходит так, как если бы такой «мячик» вращался в жидкости, и его половины над и под поверхностью меняли площади окраски в соответствии с изменениями мощности в каждой части сети при изменении ее структуры.

На круговой диаграмме наглядно видно, что полная площадь каждого полукруга, соответствующая квадрату величины вектора (для замкнутых путей и для разомкнутых путей), по сумме двух сетей остается постоянной при любых соединениях ветвей в сети, изменяется только распределение этих площадей между двойственными сетями. Таким образом, полный поток энергии через структуру двойственных сетей (или сетевой модели сложной системы), численно характеризуемый мощностью, остается постоянным при любых изменениях соединений ветвей.

Найденная закономерность постоянства потока энергии в совокупности двойственных сетей при изменениях структуры имеет физические аспекты, поскольку предполагает существование сети двойственной структуры в двойственном, «параллельном» пространстве. Такая двойственная структура к любой наблюдаемой сети, структуре, должна существовать, вообще говоря, не только для потоков электрической или электромагнитной, но и

механической, тепловой энергии. Каждый вид энергии может создавать в пространстве свои структуры – каналы распространения потоков энергии. Разные структуры, разной размерности для каждого вида потока энергии должны взаимодействовать друг с другом, образуя сложные топологические конструкции. Это и есть полиэдральные сети, о которых писал Крон.

Двойственные сети с инвариантом мощности представляют закон сохранения и преобразования потока энергии при изменении структуры. Это физико-структурный закон, поскольку понятие потока указывает на ограниченный в пространстве «канал» его движения, пути. Совокупность таких каналов образует структуру. Конструкции трубок в пространстве, силовых линий, использованы при получении уравнений электромагнитного поля в работах «О фарадеевых силовых линиях» и «О физических силовых линиях» (Максвелл, 1954).

В качестве примера рассмотрим сеть, представленную на рис. 4.4, которая меняет свою структуру от свободных разомкнутых путей до полностью связанной сети и далее до свободных контуров. При этом один за другим соединяются, связываются узлы и соответственно уменьшается число разомкнутых путей и увеличивается число контуров. В двойственной сети, которая представлена здесь на каждом этапе изменения структуры справа, происходят обратные преобразования, т.е. от свободных контуров через чисто контурную сеть происходят постепенные соединения, увеличивающие число узлов, при которых уменьшается число контуров и увеличивается число разомкнутых путей. Процесс совместных преобразований двух сетей был показан на рис. 2.4.

На рис. 4.4, в отличие от рис. 2.4, заданной сети, на каждом этапе соединения и разъединения сопоставлена двойственная сеть, а также показаны соответствующие этим сетям матрицы преобразования.

В данном примере 7 ветвей последовательно соединяются друг с другом. Для каждого соединения ветвей производится расчет мощности, рассеиваемой в контурной и узловой подсетях данной сети, и двойственной сети. Метрические матрицы выберем здесь единичными,  $Z = Y = I$ , т.е. все ветви обладают единичными весами (сопротивлениями), и не взаимодействуют друг с другом индукционно. Компоненты векторов воздействий, в замкнутых  ${}^m d^a$  и в разомкнутых путях  ${}^j d^a$ , в каждой ветви зададим одинаковые, а их значения, ковариантные и контравариантные компоненты векторов, выберем следующими:

$${}^m d^a = e_a = \quad {}^j d^a = I^a = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline & & & 10 & 1 & & 1 & 5 \\ \hline \end{array} \quad (4.31)$$

Пути в сетях на рис. 4.4 показаны частично, но их выбор представляет матрица преобразования от путей в отдельных ветвях к путям, проходящим по нескольким ветвям. Для наглядности расчетов выбор путей в сетях сделан так, чтобы при изменении структуры

связей на рис. 4.4, при возникновении новых контуров, не приходилось добавлять в матрицу преобразования новые элементы, а было бы достаточно передвигать границу между  ${}^m C$  и  ${}^j C$  и, соответственно,  ${}^m \underline{C}$  и  ${}^j \underline{C}$  в двойственной сети (для всех вариантов соединения ветвей). В соответствии с выбором путей, которые постепенно замыкаются на рис. 4.4, получена матрица преобразования путей *прямого* базиса заданной сети. Она же в двойственной сети играет роль матрицы преобразования путей *взаимного* базиса.

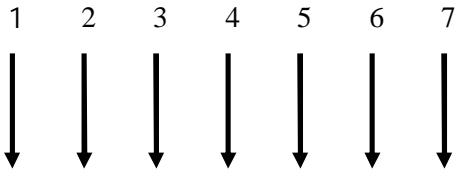
$$C_{a^a} = \underline{A}_{a^a} = \begin{array}{c} 1^{\setminus} \\ 2^{\setminus} \\ 3^{\setminus} \\ 4^{\setminus} \\ 5^{\setminus} \\ 6^{\setminus} \\ 7^{\setminus} \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 & & & & \\ \hline & & -1 & -1 & -1 & & \\ \hline & & & & 1 & -1 & -1 \\ \hline & -1 & & & & & \\ \hline 1 & -1 & & & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (4.32)$$

Соответствующая матрица преобразования путей *прямого* базиса двойственной сети (для всех вариантов соединения ветвей) является ортогональной к данной матрице. Она же в заданной сети играет роль матрицы преобразования путей *взаимного* базиса.

$$\underline{C}_{a^a} = \underline{A}_{a^a} = \begin{array}{c} 1^{\setminus} \\ 2^{\setminus} \\ 3^{\setminus} \\ 4^{\setminus} \\ 5^{\setminus} \\ 6^{\setminus} \\ 7^{\setminus} \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & -1 & & & \\ \hline & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & -1 & \\ \hline -1 & -1 & & & & & \\ \hline 1 & & -1 & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & 1 & 1 & \\ \hline & & & & & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (4.33)$$

На рис. 4.4.б свободные ветви соединены по одному узлу и составляют теперь одну подсеть. Однако замкнутые пути остались замкнутыми, а разомкнутые – разомкнутыми. По этой причине структурных изменений не произошло, матрицы преобразования заданной и двойственной сетей прежние. Эти матрицы представляют либо только разомкнутые пути (в заданной сети), либо только замкнутые пути (в двойственной сети). Выбор путей произволен, т.е. некоторые пути проходят по нескольким ветвям, хотя они и не соединены между собой. В этом суть возможности выбора систем координат (путей базиса) в тензорном анализе сетей. Слева показаны данные сети, справа – двойственные. Буквы справа от матриц преобразования указывают тип путей – замкнутые или разомкнутые.

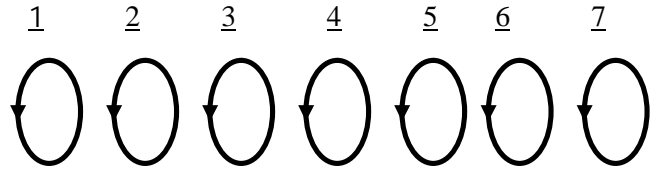
**Заданные сети**



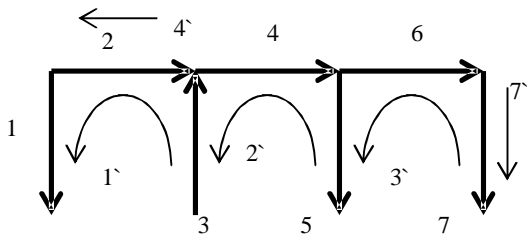
a)

	1	2	3	4	5	6	7	
1 <sup>∧</sup>	1	-1	1					<i>j</i>
2 <sup>∧</sup>			-1	-1	-1			<i>j</i>
3 <sup>∧</sup>					1	-1	-1	<i>j</i>
4 <sup>∧</sup>		-1						<i>i</i>
5 <sup>∧</sup>	1	-1						<i>j</i>
6 <sup>∧</sup>					1			<i>j</i>
7 <sup>∧</sup>							1	<i>j</i>

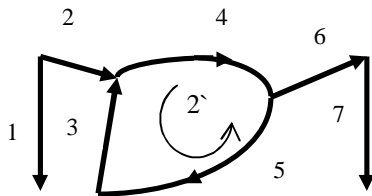
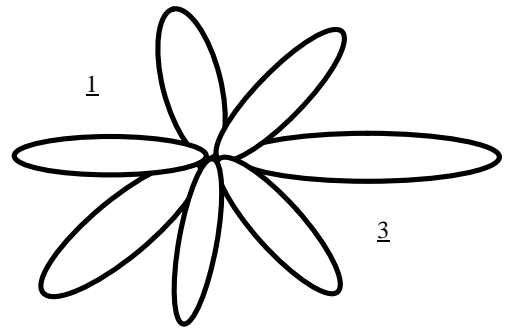
**Двойственные сети**



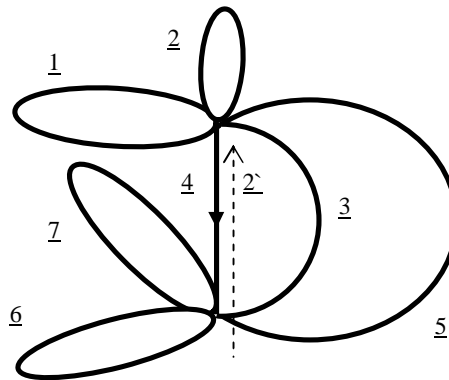
	1	2	3	4	5	6	7	
<i>m</i>			1	-1				<i>m</i>
<i>m</i>				-1				<i>m</i>
<i>m</i>						-1		<i>m</i>
<i>m</i>	-1	-1						<i>m</i>
<i>m</i>	1		-1	1				<i>m</i>
<i>m</i>				-1	1	1		<i>m</i>
<i>m</i>						-1	1	<i>m</i>



b)



b)

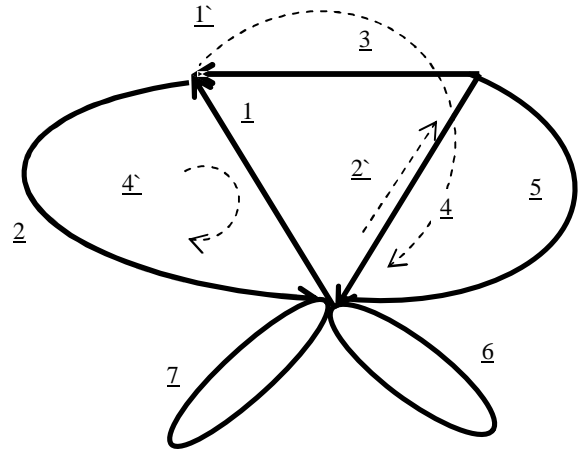
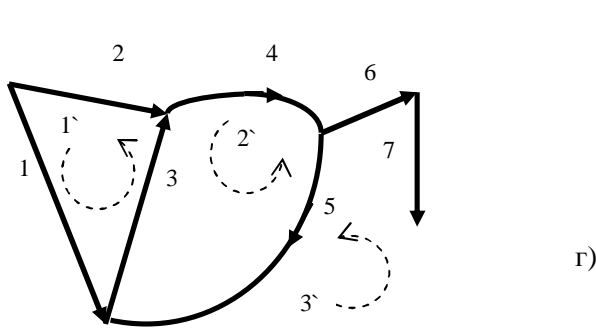


	1	2	3	4	5	6	7	
1 <sup>∧</sup>	1	-1	1					<i>j</i>
2 <sup>∧</sup>			-1	-1	-1			<i>m</i>
3 <sup>∧</sup>					1	-1	-1	<i>i</i>
4 <sup>∧</sup>		-1						<i>i</i>
5 <sup>∧</sup>	1	-1						<i>j</i>
6 <sup>∧</sup>					1			<i>j</i>
7 <sup>∧</sup>							1	<i>j</i>

	1	2	3	4	5	6	7	
<i>m</i>			1	-1				<i>m</i>
<i>i</i>				-1				<i>i</i>
<i>m</i>						-1		<i>m</i>
<i>m</i>	-1	-1						<i>m</i>
<i>m</i>	1		-1	1				<i>m</i>
<i>m</i>				-1	1	1		<i>m</i>
<i>m</i>						-1	1	<i>m</i>

Слева показан путь, который стал замкнутым, а справа показан путь, который стал разомкнутым при изменении соединений.

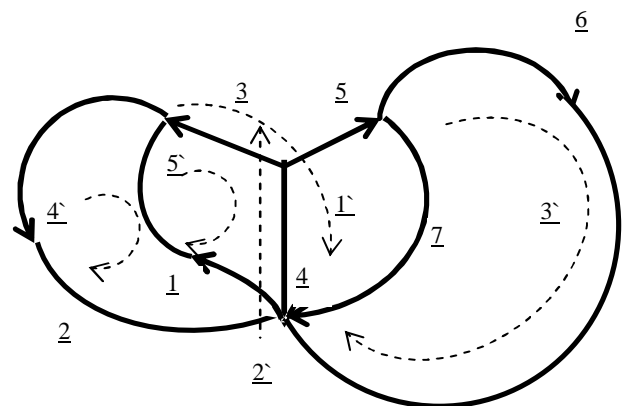
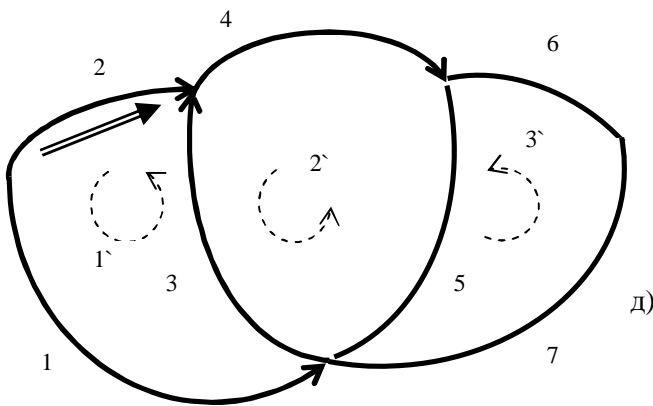




	1	2	3	4	5	6	7	
1'	1	-1	1					<i>m</i>
2'			-1	-1	-1			<i>m</i>
3'					1	-1	-1	<i>i</i>
4'		-1						<i>i</i>
5'	1	-1						<i>j</i>
6'					1			<i>j</i>
7'							1	<i>j</i>

	1	2	3	4	5	6	7	
1'			1	-1				<i>i</i>
2'				-1				<i>i</i>
3'						-1		<i>m</i>
4'	-1	-1						<i>m</i>
5'	1		-1	1				<i>m</i>
6'				-1	1	1		<i>m</i>
7'						-1	1	<i>m</i>

Слева показаны два пути, которые стали замкнутыми, а справа показаны два пути, которые стали разомкнутыми при изменении соединений.

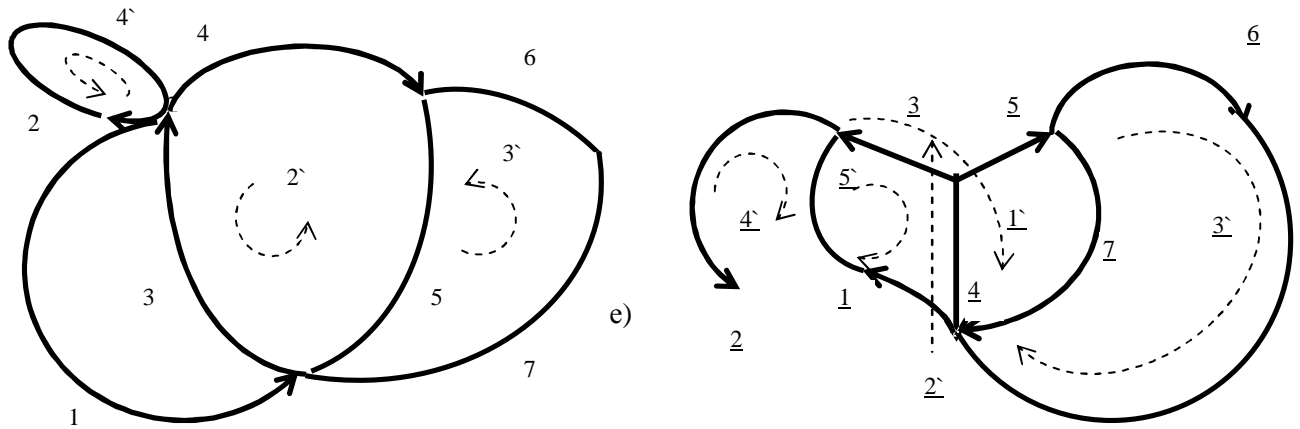


Двойная стрелка показывает направление следующего соединения узлов

	1	2	3	4	5	6	7	
1'	1	-1	1					<i>m</i>
2'			-1	-1	-1			<i>m</i>
3'					1	-1	-1	<i>m</i>
4'		-1						<i>i</i>
5'	1	-1						<i>j</i>
6'					1			<i>j</i>
7'							1	<i>j</i>

	1	2	3	4	5	6	7	
1'			1	-1				<i>i</i>
2'				-1				<i>i</i>
3'						-1		<i>i</i>
4'	-1	-1						<i>m</i>
5'	1		-1	1				<i>m</i>
6'				-1	1	1		<i>m</i>
7'						-1	1	<i>m</i>

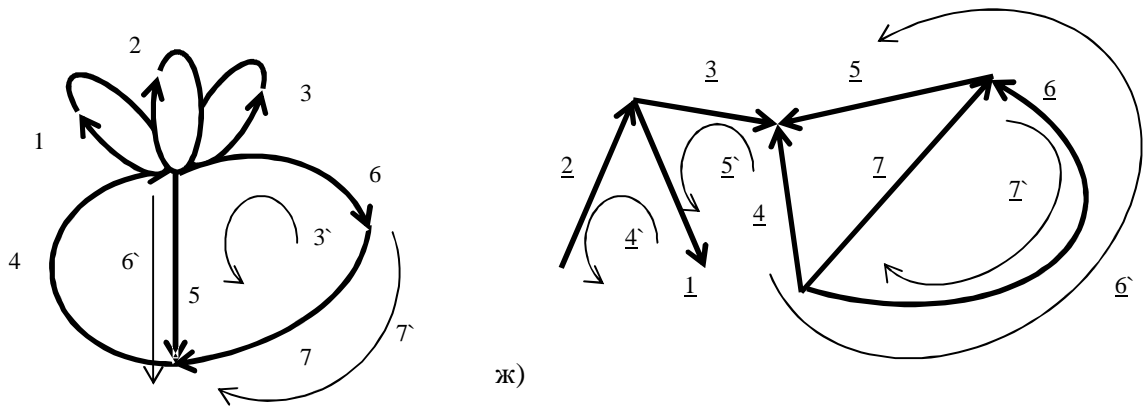
Слева показаны три пути, которые стали замкнутыми, а справа показаны три пути, которые стали разомкнутыми при изменении соединений, а также некоторые другие пути.



	1	2	3	4	5	6	7	
1 <sup>∧</sup>	1	-1	1					<i>m</i>
2 <sup>∧</sup>			-1	-1	-1			<i>m</i>
3 <sup>∧</sup>					1	-1	-1	<i>m</i>
4 <sup>∧</sup>		-1						<i>m</i>
5 <sup>∧</sup>	1	-1						<i>j</i>
6 <sup>∧</sup>					1			<i>j</i>
7 <sup>∧</sup>							1	<i>j</i>

	1	2	3	4	5	6	7	
			1	-1				<i>i</i>
				-1				<i>i</i>
						-1		<i>i</i>
	-1	-1						<i>i</i>
	1		-1	1				<i>m</i>
				-1	1	1		<i>m</i>
						-1	1	<i>m</i>

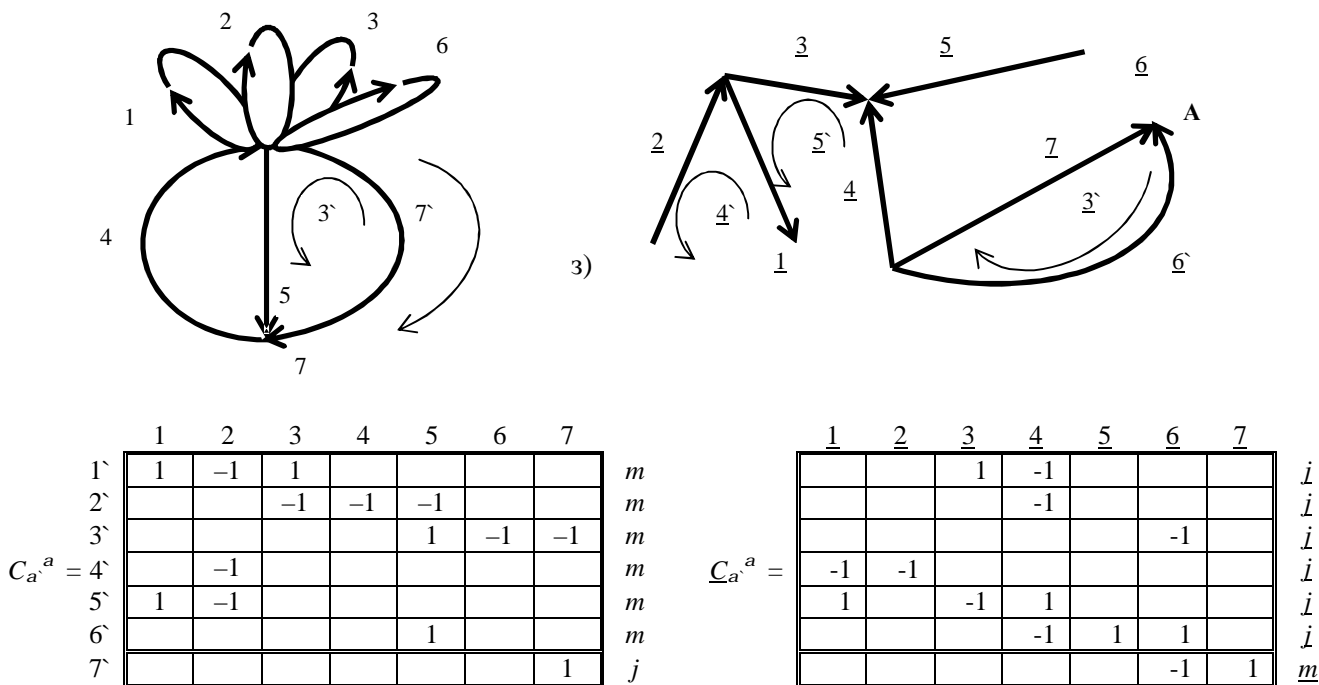
Слева показаны пути, которые стали замкнутыми, а справа показаны 4 пути, которые стали разомкнутыми при изменении соединений. В заданной сети путь 1 (контур ветвей 1-2-3) теперь проходит по кольцу ветвей 2, а затем по контуру ветвей 1 и 3, а сама ветвь 2 теперь выделилась в отдельный контур. В двойственной сети ветвь 2 разомкнула контур.



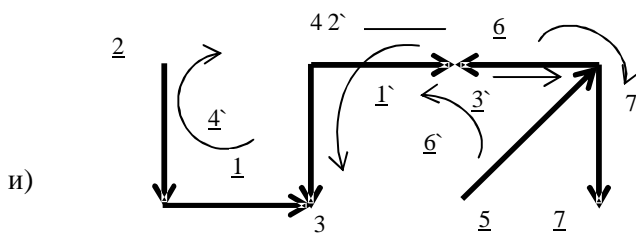
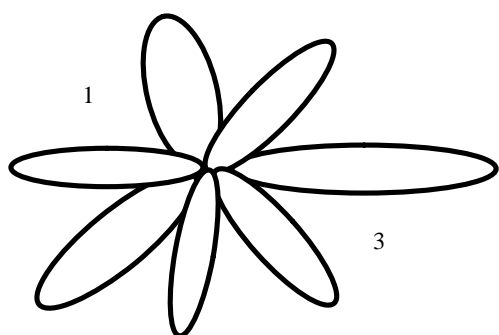
	1	2	3	4	5	6	7	
1 <sup>∧</sup>	1	-1	1					<i>m</i>
2 <sup>∧</sup>			-1	-1	-1			<i>m</i>
3 <sup>∧</sup>					1	-1	-1	<i>m</i>
4 <sup>∧</sup>		-1						<i>m</i>
5 <sup>∧</sup>	1	-1						<i>m</i>
6 <sup>∧</sup>					1			<i>j</i>
7 <sup>∧</sup>							1	<i>j</i>

	1	2	3	4	5	6	7	
			1	-1				<i>i</i>
				-1				<i>i</i>
						-1		<i>i</i>
	-1	-1						<i>i</i>
	1		-1	1				<i>i</i>
				-1	1	1		<i>m</i>
						-1	1	<i>m</i>

Слева показаны 2 пути, которые остались разомкнутыми, а справа показаны 4 пути, которые остались замкнутыми при изменении соединений.



Слева показан 1 путь, который остался разомкнутым, а справа показан 1 путь, который остался замкнутым при изменении соединений.



Если разомкнуть узел А на рис. 4.4.з, то полученная конфигурация также соответствует данному выбору путей

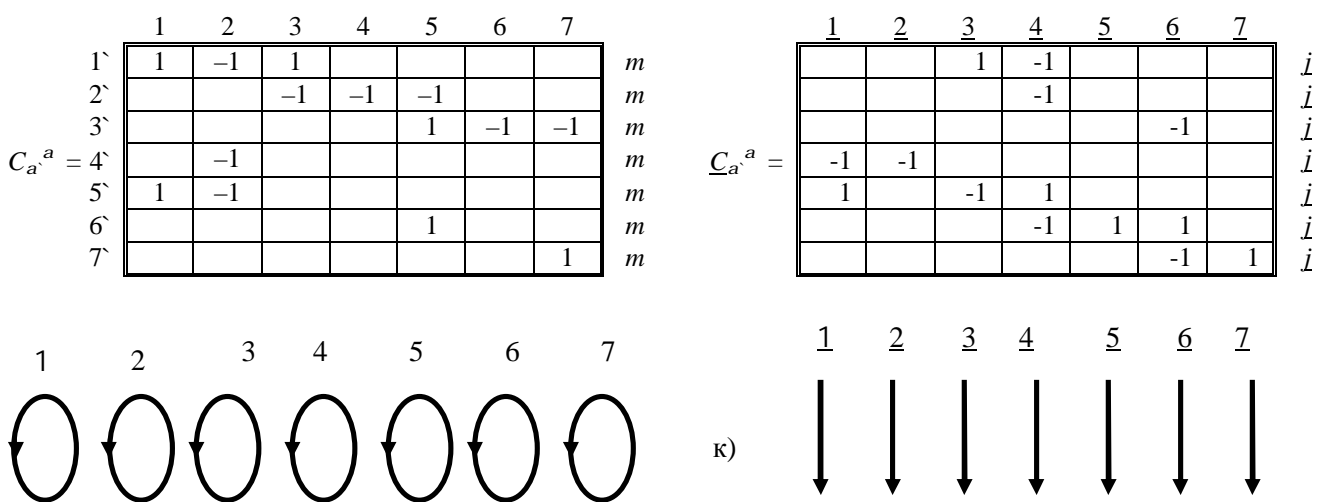


Рис. 4.4. Изменение структуры двойственных сетей.

Слева соединения узлов в заданной сети от чисто узловой сети а) – б), до чисто контурной сети и) – к). Справа разъединения узлов в двойственной сети от чисто контурной сети а) – б), до чисто узловой сети и) – к)

Можно проверить, в частности, что суммы степеней узлов и охватывающих их контуров в соответствующих двойственных сетях равны нулю (как и отмечалось в главе 2 в разделе по взаимной ориентации ветвей в двойственных сетях).

Проведем расчеты компонент вектора в ветвях и квадрата величины вектора для каждой из сетей на рис. 4.4, и для воздействующих векторов (источников) обоих типов. Затем для каждой сети проведем свой диаметр на круговой диаграмме изменения мощности, представляющей «детский мячик». Для каждой сети диаметр проводится под углом, соответствующим пропорциям распределения мощностей между двойственными сетями, между  $m$  и  $j$  подсетями. Получим полную диаграмму, в которой изменение угла наклона диаметра соответствует поворотам мячика по мере изменения числа узлов в сети.

Результаты расчетов, проведенные на ЭВМ для заданных компонент векторов, представлены в таблице 4.2, где даны основные параметры сети и вычисленный угол наклона мячика, а соответствующая им диаграмма – на рис. 4.5. Если задать вектор в путях только одного типа – замкнутых или разомкнутых, то получим вращение только половинки мячика, соответствующей такому вектору потока энергии.

Расчеты примеров сетей, представляющих электрические цепи при разном количестве ветвей, заданных компонент источников, метрических матриц (единичных, неединичных, диагональных, недиагональных) для численной проверки постоянства, инвариантности мощности в двойственных электрических цепях были представлены в работах автора (Петров, 1984, 1985). Всего был произведен расчет около ста примеров сетей с различным количеством ветвей, соединений ветвей и воздействий (источников тока и напряжения). Типичный пример, используемый в настоящей работе, приведен в книге (Петров, 1985).

Таблица 4.2

**Изменение мощности и угла наклона диаграммы «мячика» при изменении структуры связей ветвей заданной сети и двойственной сети**

Сеть на рис. 4.4	Число ветвей	Число контуров	Число $j$ -путей	Мощности в сетях (квадрат величины вектора)			Угол наклона «мячика», град
				${}^m P_0, {}^j P_0$	${}^m P^*, {}^j P^*$	${}^j P^*, {}^m P^*$	
а, б	7	0	7	127,0	0,0	127,0	0
в	7	1	6	127,0	33,33	93,67	47,24
г	7	2	5	127,0	55,38	71,62	78,49
д	7	3	4	127,0	85,38	41,62	121,0
е	7	4	3	127,0	91,54	35,46	129,7
ж	7	5	2	127,0	117,40	9,60	166,4
з	7	6	1	127,0	119,0	8,0	168,7
и, к	7	7	0	127,0	127,0	0,0	180,0

В таблице 4.2 указано число ветвей в цепи, число контуров при каждом способе соединения ветвей, полная мощность в сети из свободных ветвей (или сети чисто контурной

или чисто узловой) – квадрат величины вектора. Представлены результаты расчета мощности в данной связанной сети и двойственной связанной сети – при заданных источниках воздействия. Эти воздействия, соответствующие источникам напряжения или тока, для расчета были заданы компонентами, соответственно, вектора  ${}^m\mathbf{d}$  или  ${}^j\mathbf{d}$ . Или представлены результаты расчета мощности в контурной и узловой подсетях одной сети – при заданных своими компонентами двух векторах  ${}^m\mathbf{d}$  и  ${}^j\mathbf{d}$ . Также в таблице представлен угол наклона диаграммы мячика, пропорциональный мощности, рассеиваемой в каждом примере, для каждой структуры цепи.

В таблице показаны результаты, полученные при отсутствии метрики и равных величинах воздействующих векторов в замкнутых и разомкнутых путях в (4.12), то есть, источников тока и напряжения в каждой ветви. При этом оказалось, что для каждого способа соединения (структуры) совпадают значения мощности в связанных цепях: заданной контурной цепи  ${}^mP^*$  и двойственной узловой цепи  ${}^jP^*$ . Также совпадают значения рассеиваемой мощности в связанных цепях: мощность в заданной узловой цепи  ${}^jP^*$  и мощность в двойственной контурной цепи  ${}^mP^*$ . Для различных структур соединения ветвей в цепи рассеиваемые мощности меняются, но указанные соотношения равенства между ними сохраняются.

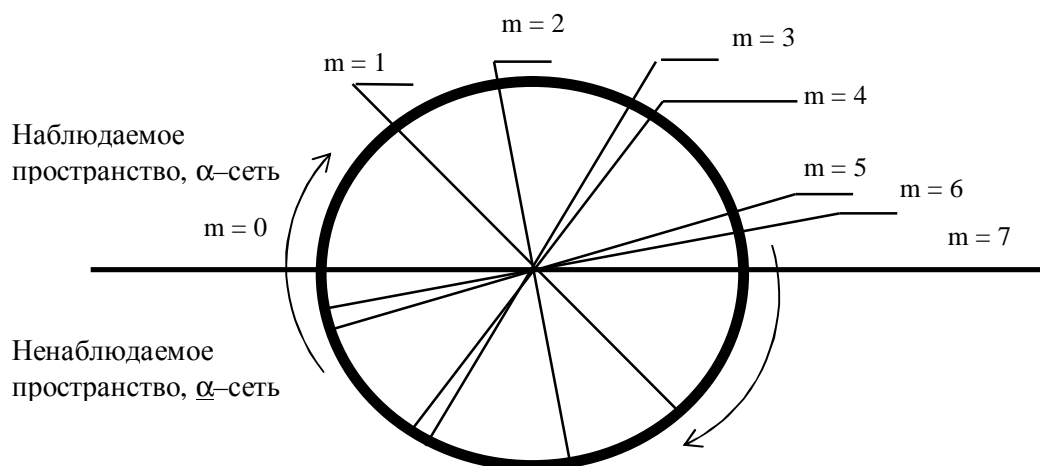


Рис. 4.5. Диаграмма изменения мощностей в двойственных сетях при последовательном изменении их структуры

Из диаграммы видно, что с увеличением числа контуров в сети, мячик вращается в направлении, указанном стрелками. При этом мощность в контурах данной сети растет с ростом числа независимых путей, степеней свободы, а в разомкнутых путях – уменьшается. Соответственно, в контурах двойственной сети мощность уменьшается с уменьшением числа независимых путей, степеней свободы, а в разомкнутых путях мощность растет.

Если задан вектор только в замкнутых путях,  ${}^m\mathbf{d}$ , то от мячика остается только половина, соответствующая темной части на рис. 4.2. Если вектор задан только в разомкнутых путях,  ${}^j\mathbf{d}$ , то от мячика остается только половина, соответствующая светлой части на рис. 4.2 (эта диаграмма рассмотрена также на рис. 3.19 и 3.20).

Если величины векторов  ${}^m\mathbf{d} = {}^m d_o^a \mathbf{p}_\alpha^0$  и  ${}^j\mathbf{d} = {}^j d_o^a \mathbf{p}_\alpha^0$  не равны друг другу, точнее, не удовлетворяют равенству квадратов величины по каждой ветви  $|{}^m\mathbf{d}|^2 \neq |{}^j\mathbf{d}|^2$ , то их полукруговые диаграммы будут разного размера, разной площади, а полная круговая диаграмма на рис. 4.5 также будет состоять из неравных полукругов. В целом диаграмма мячика наглядно показывает, что когда поток энергии проходит по структуре (в которой могут происходить изменения), то две двойственные сети представляют собой единое целое.

### 4.2.3. Диаграммы изменения мощности в двойственных цепях

Рассмотрим диаграммы изменения мощности в двойственных цепях при различных выборах структуры (замкнутые или разомкнутые пути, заданная или двойственная сеть) и разных видах возбуждения. То есть, узловое (внешнее) возбуждение, источники тока. Или контурное (внутреннее) возбуждение, источники напряжения.

При изменении структуры двойственных цепей, рассеиваемая мощность, которую наглядно представляют площади секторов «мячика», меняется согласованно, оставаясь постоянной в совокупности базисов замкнутых путей и разомкнутых путей.

Любое изменение структуры приводит к вращению такого «мячика», меняя доли красного и синего цвета над (и под) поверхностью раздела. При этом суммы площадей инвариантны. Сумма площади красного (темного) цвета над и под поверхностью постоянна. Сумма площади синего (светлого) цвета над и под поверхностью постоянна. Сумма площади красного и синего цвета над поверхностью, а также сумма площади красного и синего цвета под поверхностью, постоянны.

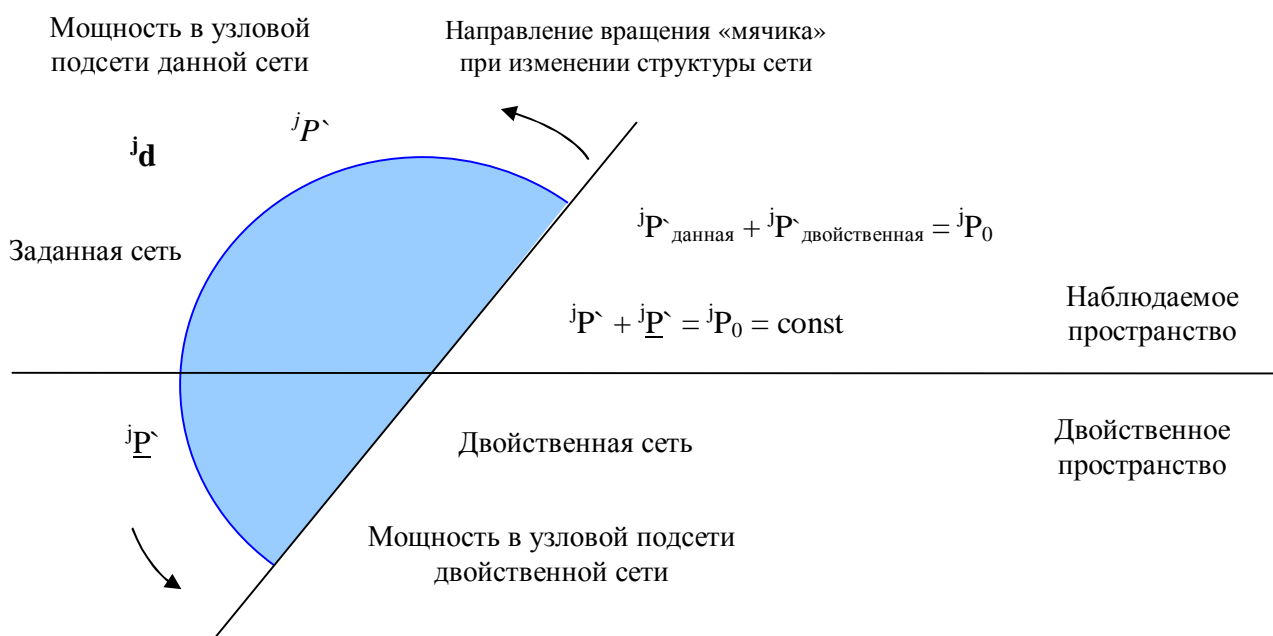
В этом и состоит инвариантность мощности. Рассмотрим по отдельности диаграммы каждого вида инвариантности мощности. Темным цветом у нас представлены, как и ранее, подсети замкнутых путей, а светлым цветом представлены подсети разомкнутых путей.

**Диаграмма изменения и сохранения мощности в двойственных цепях при внешнем возбуждении.** Узловое возбуждение (источники тока) оказывают воздействие на ветви заданной сети и двойственной сети. Базисными путями для потока энергии, вызванного внешним возбуждением, являются разомкнутые пути. Их конфигурация определяет распределение потока энергии в сети, который измеряется рассеиваемой мощностью. В каждой ветви, которая входит в один или несколько разомкнутых путей, рассеивается мощность, равная произведению суммарного тока, проходящего через ветвь и суммарного падения напряжения на ветви. Суммарные токи и суммарные напряжения

составлены из токов и напряжений в каждом разомкнутом пути, проходящем через ветвь. Однако сами пути являются лишь абстрактными системами координат, выбранными для расчетов. Их выбор произволен в тех пределах, которые допускает конфигурация, структура сети. Реальные измерения осуществляются в самих ветвях, т.е. тех составляющих сети, которые выделены в качестве отдельных элементов. Выбор элементов – это не совсем праздный вопрос, поскольку соединительные провода между, скажем, сопротивлениями в электрической цепи, иногда можно рассматривать как отдельные элементы, а в других случаях можно и пренебречь ими.

При изменении структуры двойственных цепей, рассеиваемая мощность, численно пропорциональная площади секторов «мячика» меняется согласованно, оставаясь постоянной в совокупности базисов разомкнутых путей двух сетей.

Задано узловое (внешнее) возбуждение. Это возбуждение вызывает отклики, представляющие потоки энергии только в базисах разомкнутых путей в данной сети и двойственной сети.



Заданная сеть расположена в наблюдаемом пространстве.

Дополняющая (двойственная сеть) расположена в двойственном пространстве

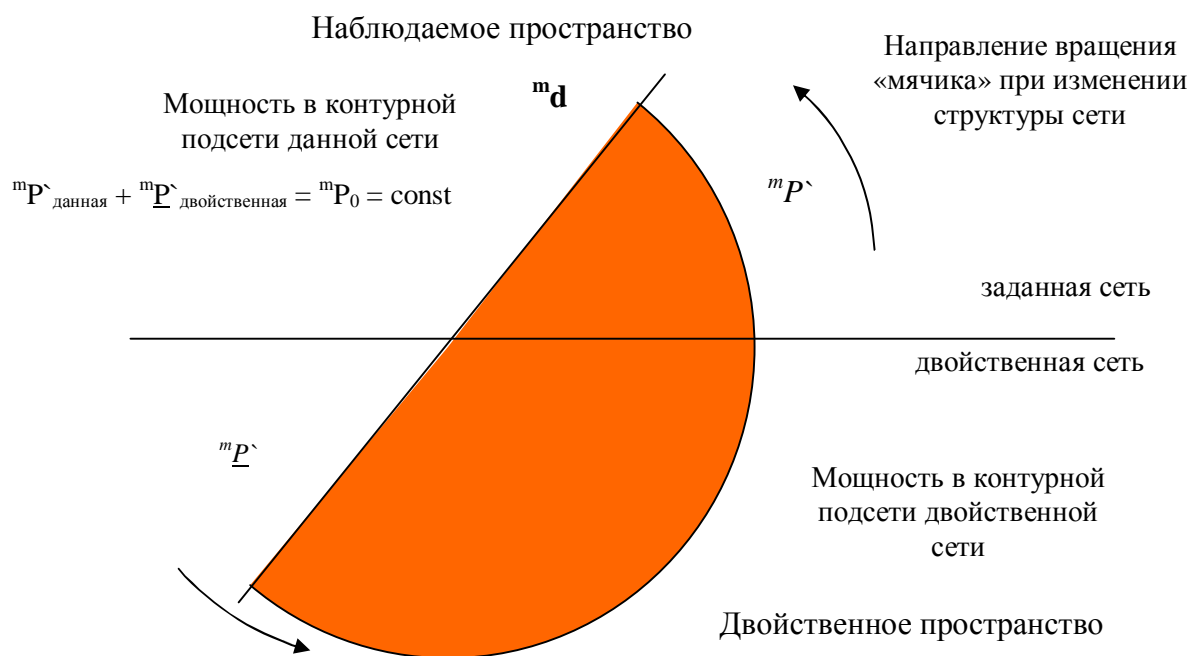
Рис. 4.6. Диаграмма изменения мощности при изменении структуры двойственных цепей. Заданы источники тока в ветвях (внешний вектор воздействия,  $j_d$ ), независимые переменные - разомкнутые пути

Вращение такого полукруга при изменении структуры заданной сети и двойственной сети меняет площади светлого (синего) цвета над и под поверхностью раздела двух сред, двух сетей, двух пространств. Сумма площади светлого цвета (пропорциональная рассеиваемой мощности в разомкнутых путях двух сетей) над и под поверхностью постоянна.

**Диаграмма изменения и сохранения мощности в двойственных цепях при внутреннем (контурном) возбуждении.** Контурное возбуждение (источники напряжения) воздействует на ветви заданной сети и двойственной сети. Базисными путями для потока энергии, вызванного внутренним возбуждением, являются замкнутые пути. Их конфигурация определяет распределение потока энергии в сети, который измеряется рассеиваемой мощностью. В каждой ветви, которая входит в один или несколько замкнутых путей, рассеивается мощность, равная произведению суммарного тока, проходящего через ветвь и суммарного падения напряжения на ветви. Суммарные токи и суммарные напряжения составлены из токов и напряжений в каждом замкнутом пути, проходящем через ветвь. Сами пути являются абстрактными системами координат, выбранными для расчетов. Их выбор произволен в тех пределах, которые допускает структура сети.

При изменении структуры двойственных цепей, рассеиваемая мощность, численно пропорциональная площади секторов «мячика» меняется согласованно, оставаясь постоянной в совокупности базисов замкнутых путей двух сетей.

Контурное (внутреннее) возбуждение вызывает отклики, представляющие потоки энергии только в базисах замкнутых путей в данной сети и двойственной сети.



Заданная сеть расположена в наблюдаемом пространстве.

Дополняющая (двойственная сеть) расположена в двойственном пространстве

Рис. 4.7. Диаграмма изменения мощности при изменении структуры двойственных цепей. Источники напряжения (внутренний вектор воздействия,  $m_d$ ), заданы в ветвях, независимые переменные - замкнутые пути, контуры

Вращение такого полукруга при изменении структуры заданной сети и двойственной сети меняет площади темного (красного) цвета над и под поверхностью раздела двух сред,



двух пространств. Сумма площади темного цвета (пропорциональная рассеиваемой мощности в контурах двух сетей) над и под поверхностью постоянна.

**Диаграмма изменения и сохранения мощности в заданной цепи при изменении структуры.** Контурное возбуждение (источники напряжения) и узловое возбуждение (источники тока) оказывают воздействие на ветви заданной сети. Источники напряжения, источники тока могут быть заданы (или не заданы) в любой ветви.

Базисными путями для внешнего возбуждения источниками тока являются разомкнутые пути, а для внутреннего возбуждения источниками напряжения – замкнутые пути. Каждая конфигурация, структура соединения ветвей, определяет свое распределение потоков энергии в сети, которое измеряется рассеиваемой мощностью. Каждая ветвь должна входить в замкнутые пути, может входить в разомкнутые пути. В каждой ветви, которая входит в один или несколько замкнутых путей, рассеивается мощность, вызванная совокупностью источников напряжения в заданной цепи. Она равна произведению суммарного тока, проходящего через ветвь и суммарного падения напряжения на ветви. В каждой ветви, которая может входить в один или несколько разомкнутых путей, рассеивается мощность, вызванная совокупностью источников тока в заданной цепи. Она равна произведению суммарного тока, проходящего через ветвь и суммарного падения напряжения на ветви. Суммарные токи и суммарные напряжения составлены из токов и напряжений в каждом пути, проходящем через ветвь.

Замкнутые и разомкнутые пути являются абстрактными системами координат, выбранными для расчета токов и напряжений, представляющих поток энергии в сети. Их выбор произволен в тех пределах, которые допускает конфигурация, структура сети. При изменении структуры суммарная рассеиваемая мощность от источников напряжения, и источников тока, численно пропорциональная площади секторов «мячика» меняется согласованно, оставаясь постоянной в совокупности базисов замкнутых путей и разомкнутых путей.

Постоянство суммарной мощности от источников напряжения, и источников тока, рассеиваемой на ветвях цепи, при изменении структуры есть проявление закона сохранения потока энергии. Наиболее наглядно это происходит при условии, что в каждой ветви мощность внешнего источника, который определяет потоки энергии в базисе разомкнутых путей, равна мощности внутреннего источника, который определяет потоки энергии в базисе замкнутых путей. Это позволяет получить более красивую диаграмму, но не является обязательным условием.

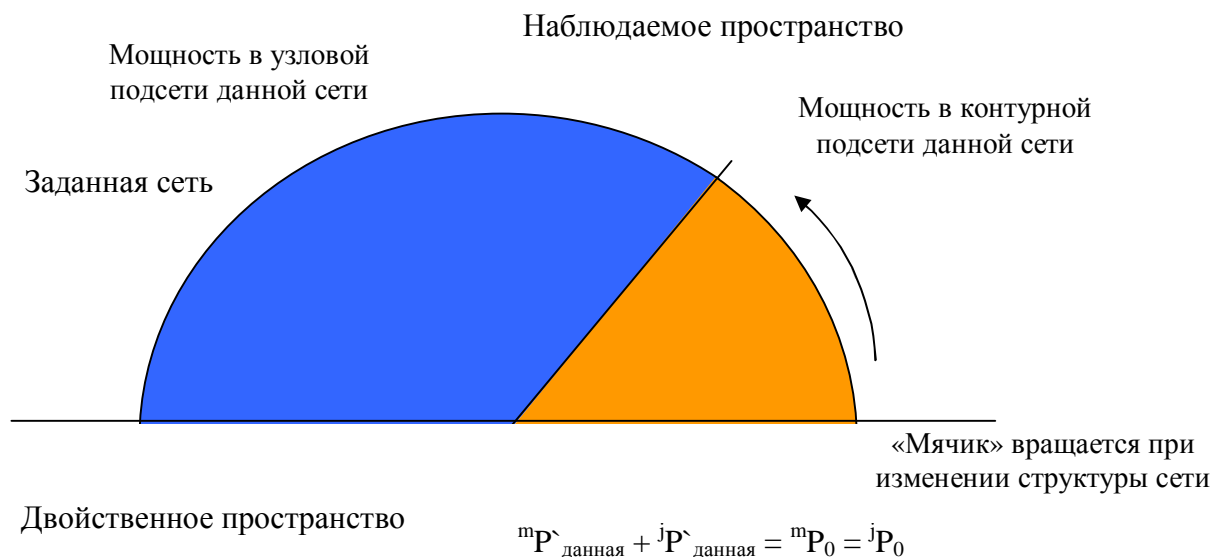


Рис. 4.8. Диаграмма изменения мощности в заданной цепи при изменении структуры  
Источники напряжения (внутреннее воздействие,  ${}^m d$ ), заданы в ветвях, независимые переменные - замкнутые пути, контуры.  
Источники тока (внешнее воздействие,  ${}^j d$ ), заданы в ветвях, независимые переменные - разомкнутые пути

**Диаграмма изменения и сохранения мощности в двойственной цепи при изменении структуры.** При изменении структуры двойственной цепи, рассеиваемая мощность, численно равная площади секторов «мячика» меняется согласованно, оставаясь постоянной в совокупности базисов замкнутых путей и разомкнутых путей.

Контурное возбуждение (источники напряжения) и узловое возбуждение (источники тока) оказывают воздействие на ветви двойственной цепи. Источники напряжения, источники тока могут быть заданы (или не заданы) в любой ветви.

Базисными путями для внешнего возбуждения источниками тока являются разомкнутые пути, а для внутреннего возбуждения источниками напряжения – замкнутые пути. Каждая конфигурация, структура соединения ветвей, определяет свое распределение потоков энергии в сети, которое измеряется рассеиваемой мощностью. В каждой ветви, которая входит в один или несколько замкнутых путей, рассеивается мощность, вызванная совокупностью источников напряжения. Она равна произведению суммарного тока, проходящего через ветвь и суммарного падения напряжения на ветви. В каждой ветви, которая может входить в один или несколько разомкнутых путей, рассеивается мощность, вызванная совокупностью источников тока. Она равна произведению суммарного тока через ветвь и суммарного напряжения на ветви. Суммарные токи и напряжения составлены из токов и напряжений в каждом пути, проходящем через ветвь.

Замкнутые и разомкнутые пути являются абстрактными системами координат, выбранными для расчета токов и напряжений, представляющих поток энергии в

двойственной цепи. Их выбор произволен в тех пределах, которые допускает конфигурация, структура сети. При изменении структуры двойственной цепи, суммарная рассеиваемая мощность от источников напряжения, и источников тока, численно пропорциональная площади секторов «мячика» меняется согласованно, оставаясь постоянной в совокупности базисов замкнутых путей и разомкнутых путей.

В двойственной сети источники тока (внешнее возбуждение) и источники напряжения (внутреннее возбуждение) вызывают отклики, представляющие потоки энергии в базисах разомкнутых путей и замкнутых путей.

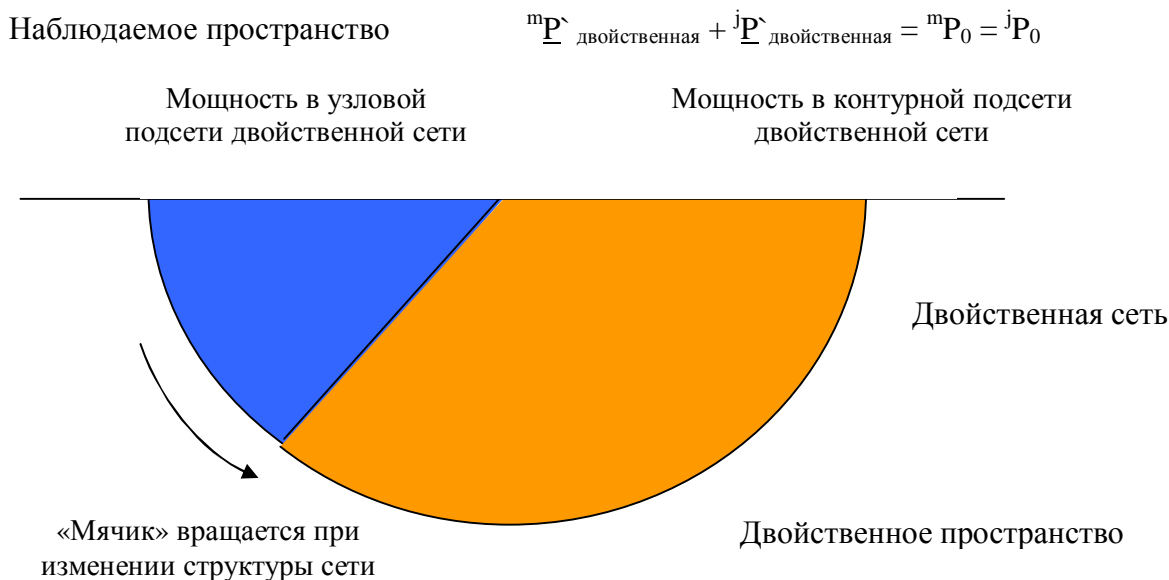


Рис. 4.9. Диаграмма изменения мощности в двойственной цепи при изменении структуры. Источники напряжения (внутреннее воздействие,  ${}^m d$ ), заданы в ветвях, независимые переменные - замкнутые пути, контуры. Источники тока (внешнее воздействие,  ${}^j d$ ), заданы в ветвях, независимые переменные - разомкнутые пути

Рассеиваемая на ветвях мощность представляет поток энергии в *двойственной цепи*, который поступает от внешних и внутренних источников энергии.

Мощность остается постоянной для любой структуры, т.е. способа соединения ветвей цепи, в совокупности базисов замкнутых и разомкнутых путей. Постоянство суммарной мощности от источников напряжения, и источников тока, рассеиваемой на ветвях цепи, при изменении структуры есть проявление закона сохранения потока энергии.

При изменении структуры двойственных цепей, рассеиваемая мощность, численно равная площади секторов «мячика» меняется согласованно, оставаясь постоянной в совокупности базисов замкнутых путей и разомкнутых путей.

Рассмотренные диаграммы наглядно показывают изменение потоков энергии в сетях, сетевых моделях, которые могут представлять технические, экономические системы. Они

иллюстрируют особенности закона постоянства потока энергии при изменениях структуры двойственных сетей.

Заметим, что постоянство суммы показателей двойственных цепей касается не только мощности, а также и составляющих ее токов и напряжений. Например, контравариантные компоненты вектора  ${}^m\mathbf{d}$  (токи в ветвях) в двойственных сетях:

$${}^m d_c^a + {}^m \underline{d}_c^a = (Y_c^{2+} + Y Z_c^{2+} Y) {}^m d_a^0 = Y_{c0} {}^m d_a^0 = {}^m d_0^a. \quad (4.34)$$

Т.е. при любой структуре соединения ветвей двойственных сетей их сумма постоянна. Этому соответствует, например, постоянство суммы токов и суммы напряжений в каждой ветви электрической цепи и двойственной к ней цепи.

Итак, постоянству квадрата величины вектора при изменении структуры двойственных сетей соответствует постоянство суммы рассеиваемой мощности от источников тока и/или напряжения в совокупности цепей с двойственной структурой. Таким образом, например, формула постоянства квадрата величины вектора для мощности  ${}^m P$  в электрической цепи и  ${}^m \underline{P}$  в двойственной цепи имеет вид:

$${}^m P + {}^m \underline{P} = {}^m P_0,$$

где  ${}^m P_0$  – мощность источников. При подстановке выражения  ${}^m \mathbf{d}^2$  через компоненты (ковариантным компонентам соответствуют напряжения  $e_a$ , а контравариантным компонентам – токи  $i^a$ ), эта формула примет вид:

$$e_a {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C e_a + e_a Y {}^m C_t ({}^m C Y {}^m C_t)^{-1} {}^m C Y e_a = e_a Z^{-1} e_a.$$

Данная формула представляет постоянство потока энергии (измеряемого мощностью) при изменении структуры двойственных цепей, выраженное через ковариантные и контравариантные компоненты.

### 4.3. Двойственные сети и непланарные графы

В структуре графов сетей, и двойственных сетей, существует одна особенность, которая имеет характер противоречия. Эта особенность показывает, что двойственные отношения сложнее, чем это может показаться. Дело в том, что в соответствии с определением двойственности графа (и сети), нельзя наглядно построить граф с двойственной структурой для непланарного графа. Для непланарного графа двойственный граф не существует. На эту особенность указал автору в 1984 г. В.А. Горбатов.

#### 4.3.1. Неplanарность графов и двойственность сетей

С одной стороны, существование непланарных графов вносит теоретические трудности в содержание инварианта двойственных сетей. А, следовательно, и в постоянство мощности при изменении структуры двойственных цепей, в закон сохранения потока энергии. Как только изменение структуры сети приводит к возникновению в ней непланарного графа, двойственная сеть как бы перестает существовать, во всяком случае, ее нельзя представить наглядно. Это должно создавать трудности при измерении результатов и т.д. Вместе с тем, как только в процессе дальнейших изменений структуры непланарность в сети исчезает, то снова возникает двойственная сеть. Все свойства двойственности должны «восстанавливаться». Это наводит на мысль, что никаких скачков с исчезновением двойственности и ее инвариантов при «переходе через неplanарность» не происходит, а существует какая-то дополнительная, еще не известная закономерность, с которой связаны такие эффекты.

С другой стороны, возникновение противоречия уже само по себе указывает на то, что исследование натолкнулось на что-то новое. Автор уже показал в главе 1, как противоречие между постулатом об инварианте мощности Крона и реальным изменением мощности в электрической цепи при изменении структуры привело к пониманию того, что существуют сети с двойственной структурой. Дополнение двойственной цепью, которая до этого не была известна и не использовалась, показало, что существует инвариант, связывающий структуру двух взаимно двойственных сетей и любые изменения их структуры. Именно для двух двойственных цепей выполняется инвариант мощности (и закон сохранения потока энергии), а не для одной цепи, как постулировал Крон. Такое дополнение, как бы выход в «другое» измерение, разрешило противоречие Крона в точном соответствии с принципами диалектики Гегеля. Нечто подобное должно произойти и при исследовании поведения двойственных инвариантов в условиях неplanарности. В частности, разрешение данного противоречия может открыть новые свойства двойственных сетей, касающиеся характера *границ* связывающих двойственные сети, и механизма взаимодействия этих сетей при изменении структуры, которые пока неизвестны.

Итак, теория графов утверждает, что двойственный граф можно построить только для планарного графа. То есть, для такого графа, который можно изобразить на плоскости без самопересечения ветвей (ребер). Непланарный граф не имеет двойственного графа (Свами, 1984). Невозможность построить двойственный граф к непланарному графу, связана с тем, что в области, где ветви пересекаются, нельзя однозначно указать, в каком именно контуре должен располагаться соответствующий узел двойственного графа (сети). То есть, иначе говоря, неоднозначность построения вызвана тем, что двум независимым контурам (циклам) в данном графе соответствует только один узел (вершина) в двойственном графе.

Для доказательства того, что непланарный граф не имеет двойственного графа, используются два известных непланарных графа Куратовского, а именно,  $K_{3,3}$  и  $K_5$  (Куратовский, 1966). Сначала доказывают, что для этих графов двойственные графы не существуют, а затем доказывают, что *любой непланарный граф содержит либо  $K_{3,3}$ , либо  $K_5$* . Соответствующая теорема Куратовского формулируется так: *граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу  $K_5$  или  $K_{3,3}$*  (Свами, 1984, с. 142). Если при изменении структуры сети, пусть даже очень большой, в ней, в какой-то ее части, возникает один из этих графов (или оба), то двойственная сеть перестает существовать. Однако если в процессе дальнейшего изменения структуры эти графы меняют свою конфигурацию на любую другую, то двойственная сеть восстанавливается.

Таким образом, именно эти два графа лежат в основе проблемы отношений между двойственной структурой сетей и непланарностью. Первый из них – это так называемый «двудольный» граф, в котором каждая из трех «верхних» вершин связана с каждой из трех «нижних» вершин. Всего такой граф содержит 9 ветвей-ребер. Второй представляет собой пятиконечную звезду, связанную по периметру, а точнее – это полный граф на пяти вершинах, т.е. каждая из вершин связана со всеми остальными вершинами ребрами (ветвями). Всего здесь 10 ветвей-ребер. Следовательно, пространство одной из таких непланарных сетей имеет 9 измерений, а другой – 10 измерений. Эти графы представлены, соответственно, на рис. 4.10 и рис. 4.12. Каждый из них изображен как в традиционном представлении, так и в представлении, показывающим его непланарность в явном виде.

Оказывается, что хотя двойственный граф к непланарному графу и не существует (в наглядном представлении), но можно построить для него матрицу преобразования, рассчитать матрицу решения, рассматривая граф как сеть. А, следовательно, использовать эту матрицу и соответствующий алгоритм для расчета компонент вектора потока энергии (воздействий и откликов) на ветвях сети с такой неизвестной, скрытой структурой. Можно также найти ту часть квадрата величины вектора (потока энергии), которая дополняет до полного инвариантного значения соответствующую величину вектора в сети, содержащей в

своей структуре непланарный граф. Таким образом, все двойственные закономерности и инварианты продолжают выполняться и при возникновении непланарности, хотя наглядно представить при этом структуру двойственной сети в явном виде считается невозможным.

Рассмотрим расчет непланарных графов как сетей. Построим матрицы преобразования, выполним расчет матриц решения, а также расчет ковариантных и контравариантных компонент для произвольно заданного вектора  $\mathbf{d}$ , при единичных значениях метрических параметров, т.е. при  $Z = Y = I$ . Для таких значений двойственные инварианты принимают наиболее простой вид, что позволяет выделить структурную сторону данной проблемы.

Сначала построим структуру двойственных сетей к непланарным графам, используя свойства ортогональности матриц преобразования путей. Для этого выберем базисные пути в сети со структурой, представляющей непланарный граф. Получим матрицу преобразования замкнутых и разомкнутых путей (прямой базис). Она же есть матрица преобразования путей двойственной сети (взаимный базис). Затем обратим и транспонируем эту матрицу, т.е. получим ортогональную к ней. Это матрица преобразования путей взаимного базиса, но одновременно это и матрица преобразования путей двойственной сети (прямой базис). Строки в этой матрице перечисляют ветви, входящие в независимые замкнутые и разомкнутые (базисные) пути двойственной сети. Следовательно, соединяя ветви в той последовательности и с той ориентацией, которая указана в строках ортогональной матрицы преобразования, можно попытаться построить структуру двойственной сети в явном виде.

Используя ортогональные матрицы преобразования  $A_a^a = (C_a^a)^{-1}$ , рассчитаем матрицы решения сетей непланарных графов и двойственных к ним сетей. Затем рассчитаем непланарные графы–сети с произвольно заданным вектором воздействия, и получим значения откликов-компонент вектора на ветвях связанной сети. Полученные решения проверим для каждого графа на выполнение законов Кирхгоффа. Полученные решения для двойственных сетей, вместе с матрицами преобразования  $\underline{C}_a^a = A_a^a$  двойственных сетей используем для того, чтобы понять, как устроена структура двойственного графа к непланарному графу, который не должен существовать. Получается, что два непланарных графа,  $K_{3,3}$  и  $K_5$ , по своей структуре двойственные друг к другу, но весьма необычным образом. Так, что одна ветвь принадлежит при двойственном переходе одновременно к двум графам.

#### 4.3.2. Расчет сети и двойственной сети графа $K_{3,3}$

На рис. 4.10 буквами обозначены узлы, а цифрами и стрелками показаны ветви и их направления, а также часть выбранных путей для графа  $K_{3,3}$ . Этот граф можно рассматривать как три отрасли, связанные поставками, т.е. он может входить в структуру экономических систем, имея важное практическое значение.

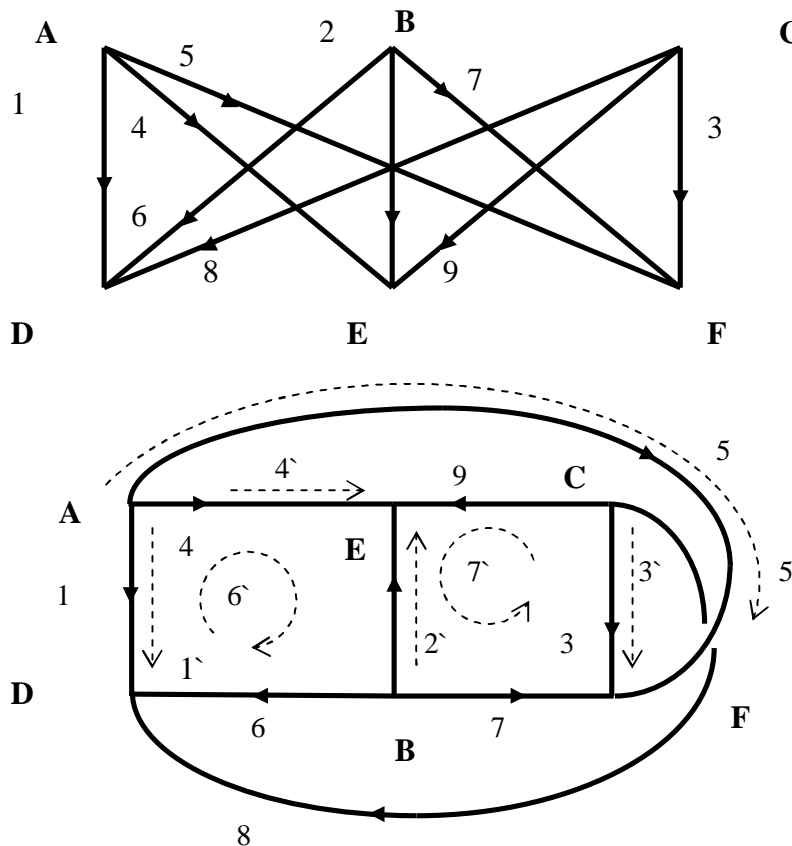


Рис. 4.10. Граф  $K_{3,3}$  в традиционном представлении, и в представлении, демонстрирующем его непланарность

Сеть, структура которой представляет собой непланарный граф  $K_{3,3}$ , имеет количество ветвей  $n = 9$ , узлов  $J = 6$ , число независимых подсетей  $s = 1$ , независимых разомкнутых путей  $J - s = 6 - 1 = j = 5$ , независимых замкнутых путей  $m = 5$ . Все выбранные пути, в том числе не показанные на схеме, легко определить по ненулевым элементам матрицы  $C_a^a$ .

$$K_{3,3}: C_a^a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6' \\ 7' \\ 8' \\ 9' \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \\ 5' \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & & & & -1 & -1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 & & -1 & -1 & & \\ & & 1 & & -1 & & -1 & & 1 \\ & & & 1 & & & -1 & -1 & 1 \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ j \\ j \\ j \\ j \\ j \end{matrix} \end{matrix} \quad (4.39)$$

Выделены блоки, относящиеся к замкнутым и разомкнутым путям. Путь  $8'$ , выделенный курсивом, состоит из ветвей, образующих непланарный контур, т.е. этот путь в данной структуре нельзя расположить в одной плоскости.



Пути в двойственной сети преобразуются матрицей  $A_a^{a^*} = (C_a^{a^*})_t^{-1}$ , которая, как было показано, связывает свободные ветви в сеть точно так же, как матрица  $C_a^{a^*}$  в данной сети. Для графа  $K_{3,3}$  матрицу преобразования двойственной сети получим как ортогональную, т.е. обратную и транспонированную к матрице  $C_a^{a^*}$  в соотношении (4.39). Обратная матрица имеет вид:

$$K_{3,3}: \quad (C_a^{a^*})_t^{-1} = C_a^{a^*} =$$

	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	
<u>6</u>	1				1	1		-1		<i>m</i>
<u>7</u>		1		-1		1		-1	1	<i>m</i>
<u>8</u>			1		1		1		-1	<i>m</i>
<u>9</u>				1			1	1	-1	<i>m</i>
<u>1</u>					1					<i>j</i>
<u>2</u>						1				<i>j</i>
<u>3</u>							1			<i>j</i>
<u>4</u>								1		<i>j</i>
<u>5</u>									1	<i>j</i>

Матрица преобразования путей двойственной сети транспонирована к обратной матрице путей заданной сети. Эта матрица преобразования путей в двойственном графе Куратовского  $K_{3,3}$  имеет следующий вид:

$$(C_a^{a^*})_t^{-1} = A_a^{a^*} = \underline{C}_a^{a^*} =$$

	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	
<u>6</u>	1									<i>j</i>
<u>7</u>		1								<i>j</i>
<u>8</u>			1							<i>j</i>
<u>9</u>				1						<i>j</i>
<u>1</u>	1		1		1					<i>m</i>
<u>2</u>	1	1				1				<i>m</i>
<u>3</u>			1	1			1			<i>m</i>
<u>4</u>	-1	-1		1				1		<i>m</i>
<u>5</u>		1	-1	-1					1	<i>m</i>

(4.40)

Для построения структуры сети используем строки 1–5, которые соответствуют контурам, замкнутым путям. Например, путь 1 показывает, что ветви 1, 6 и 8 должны образовать замкнутый треугольник, в котором они ориентированы одинаково, т.е. последовательно. Аналогично соединяются ветви по остальным путям, каждый из которых должен добавлять хотя бы одну новую ветвь к уже охваченным ветвям. Признаком базиса замкнутых путей является то, что каждая ветвь вошла хотя бы в один контур. Разомкнутые пути контролируют открытую часть сети, т.е. узлы, через которые происходит взаимодействие с внешним миром. Например, путь 6 начинается с того, что соединяет узлы **Е** и **Ф**. Каждый следующий разомкнутый путь добавляет хотя бы один узел. Признаком базиса здесь является то, что каждый узел вошел хотя бы в один разомкнутый путь.

Построенная по этой матрице соответствующая сеть представлена на рис. 4.11.

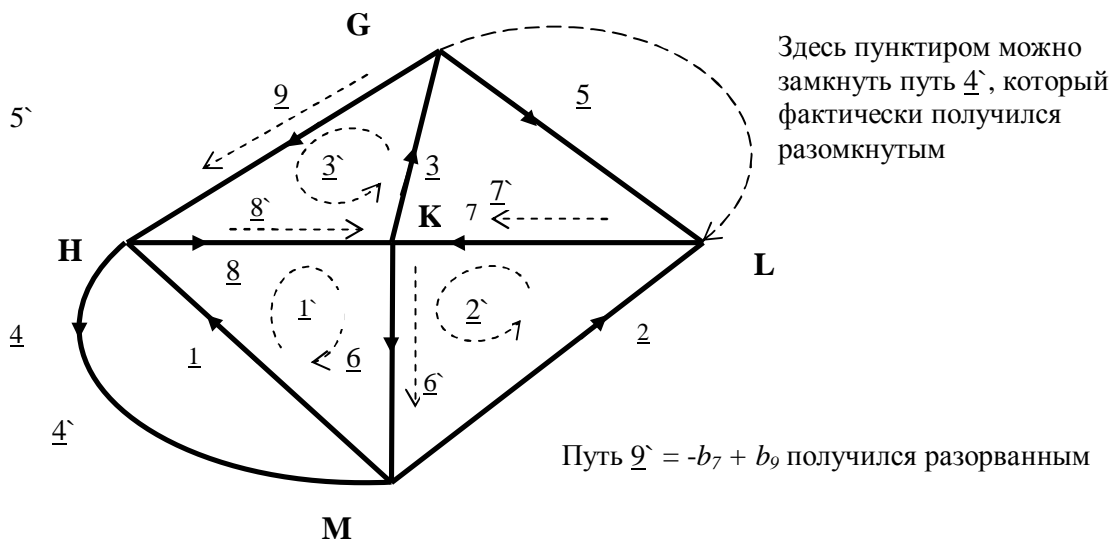


Рис. 4.11. Граф, который соответствует ортогональной матрице к матрице путей графа  $K_{3,3}$  похож на граф  $K_5$ , но ему не хватает одной ветви для замыкания пути  $\underline{4}'$

Можно заметить, что хотя для этой сети, граф (структура) которой не должна существовать, матрица преобразования существует и имеет вполне определенный вид. Сеть, которая показана на рис. 4.11, построена так, как указывает состав ветвей в путях этой матрицы. Граф этой сети, которая соответствует ортогональной матрице к матрице путей графа  $K_{3,3}$  похож на граф  $K_5$ , но ему не хватает одной ветви для замыкания пути  $\underline{4}'$ . Дело в том, что один замкнутый путь, в соответствии с ортогональной матрицей преобразования (а она, как известно, является единственной), оказался разомкнутым. Этот путь  $\underline{4}'$  состоит из ветвей  $\underline{6}$ ,  $\underline{7}$ ,  $\underline{9}$  и  $\underline{4}$ . Для того чтобы он стал замкнутым, нужна еще одна ветвь, которая бы замыкала узлы **F** и **B**. Если такую ветвь добавить, то, как нетрудно видеть, двойственная сеть к графу  $K_{3,3}$  превратится в сеть, которая соответствует графу  $K_5$ . Эта недостающая для замыкания пути  $\underline{4}'$  ветвь показана пунктиром в правой части рисунка.

Особенностью разомкнутых путей является то, что три пути полученного базиса проходят каждый по одной ветви, но один путь, а именно путь  $\underline{9}'$  оказывается разорванным. Принципиальная возможность выбора таких путей рассматривалась в главе 2. Путь  $\underline{9}'$  состоит из ветвей  $+\underline{9}$  и  $-\underline{7}$ , которые в этой конструкции, структуре, вообще не связаны друг с другом своими границами. С одной стороны, это допустимо по определению пути, но, с другой стороны, это указывает на то, что в двойственной сети к непланарной структуре происходит что-то необычное. Таким образом, при заданном выборе путей, в двойственной сети один замкнутый путь формально оказался разомкнутым, а один разомкнутый путь стал разорванным, т.е. состоит из ветвей, которые не соединены друг с другом.

Аналогичная картина происходит и с двойственной сетью к графу  $K_5$ , но с тем отличием, что здесь одна ветвь оказывается «лишней» в сети, построенной на основании ортогональной матрицы преобразования. Можно сказать, что эти непланарные графы двойственны друг другу, но несколько странным образом. Таким образом, что при этом одна ветвь оказывается как бы между этими графами. В одной из непланарных двойственных сетей эта ветвь избыточная, а в другой недостающая.

С точки зрения теории графов это кажется совершенно недопустимым. Дело в том, что в одном непланарном графе 9 ветвей, а в другом 10 ветвей. По определению они никак не могут быть двойственными друг другу. Двойственность определена в теории графов и топологии как соответствие областей и вершин (узлов). Границы области (ребра-ветви) составляют замкнутый путь. Ветви, связывающие две вершины, составляют разомкнутый путь. При соединении вершин, помещенных внутри каждой области, ребро заданного графа пересекается ребром двойственного графа. Таким образом, каждому ребру данного графа должно соответствовать ребро двойственного графа. Следовательно, количество ребер в двойственных графах (ветвей в двойственных сетях) должно быть одинаковым. Однако само понятие двойственности здесь связано не с ветвями, а с областями и узлами. С точки зрения геометрии – с двумерными участками плоскости и нульмерными точками-узлами. Крон писал, анализируя эту топологическую ситуацию, что двойственность есть между точками и плоскостями, а линии двойственны сами себе. Вместе с тем сети, по введенному определению, это набор линий, а количество узлов (точек) при изменении структуры для сети есть величина переменная. Возможно, что сети обладают типом двойственности, который выходит за рамки двойственности для графов.

**Расчет сетей для графа  $K_{3,3}$ .** Теперь проведем расчет матрицы решения для данной сети и двойственной сети непланарных графов. Сделав такой расчет для двух основных непланарных графов и двойственных к ним, можно найти связывающие их закономерности.

В данном случае, когда принято, что  $Z = Y = I$ , т.е. сопротивления свободных ветвей равны единицам, метрическая матрица получается перемножением контурной части матрицы преобразования (4.39) на транспонированную матрицу преобразования.

$$Z' = {}^m C {}^m C_t$$

	6	7	8	9	1	2	3	4	5	
6	1				-1	-1		1		m
7		1		1		-1	-1			m
8			1		-1		-1		1	m
9				1			-1	-1	1	m

	6	7	8	9	
6	1				
7		1			
8			1		
9				1	
1	-1		-1		
2	-1	-1			
3		-1	-1	-1	
4	1				-1
5				1	1

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 6^* & 7^* & 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6^* \\ 7^* \\ 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Обратная матрица имеет вид в десятичных и простых дробях:

$$(Z)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6^* & 7^* & 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6^* \\ 7^* \\ 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,444444 & -0,222222 & -0,222222 & 0,333333 \\ -0,222222 & 0,444444 & 0,111111 & -0,333333 \\ -0,222222 & 0,111111 & 0,444444 & -0,333333 \\ 0,333333 & -0,333333 & -0,333333 & 0,666667 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6^* & 7^* & 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6^* \\ 7^* \\ 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 36 & -18 & -18 & 27 \\ -18 & 36 & 9 & -27 \\ -18 & 9 & 36 & -27 \\ 27 & -27 & -27 & 54 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{81} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6^* & 7^* & 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6^* \\ 7^* \\ 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{9}$$

Матрицу решения получаем умножением обратной матрицы сопротивлений слева на транспонированную матрицу преобразования и справа на матрицу преобразования. В результате получим квадратную матрицу, умножение которой на любой вектор воздействия позволяет получить сразу отклики во всех ветвях сети непланарного графа.

$$Y_c = {}^m C_t (Z)^{-1} {}^m C = {}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} {}^m C = \tag{4.41}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 6^* & 7^* & 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6^* \\ 7^* \\ 8^* \\ 9^* \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & -1 & \\ -1 & -1 & & \\ & -1 & -1 & -1 \\ 1 & & & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 6^* & 7^* & 8^* & 9^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6^* \\ 7^* \\ 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{9} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6^* & 7^* & 8^* & 9^* & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6^* \\ 7^* \\ 8^* \\ 9^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & -1 & -1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 & & -1 & -1 & & \\ & & 1 & & -1 & & -1 & & 1 \\ & & & 1 & & & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 6^* & 7^* & 8^* & 9^* & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6^* \\ 7^* \\ 8^* \\ 9^* \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & -2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 4 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{9}$$

Матрицу решения двойственной сети можно получить вычитанием данной матрицы из единичной матрицы (метрики свободных ветвей). Это позволяет сделать инвариант двойственных сетей.

Пусть наложенный вектор  ${}^m d$  имеет заданную компоненту в одной из свободных ветвей, например,  ${}^m d_8^0 = 1$ :

$${}^m d_a^0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6^* & 7^* & 8^* & 9^* & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6^* \\ 7^* \\ 8^* \\ 9^* \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix} . \tag{4.42}$$

Проведем расчет компонент откликов этого вектора в связанной сети графа  $K_{3,3}$  для подматрицы преобразования  ${}^m C$ , при  $Z = I$  по формуле (3.11), выполняя все этапы, как в

примерах раздела 3.2. Или просто умножая полученную выше матрицу решения на вектор воздействия:  ${}^m d_c^a = Y_c {}^m d_a^0$ . Тогда получим совпадающие значения ковариантных и контравариантных компонент  ${}^m d_c^a = {}^m d_a^c$  вектора в ветвях связанной сети:

$${}^m d_c^a = {}^m d_a^c = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline -2 & 1 & 4 & -2 & -2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} 1/9 \quad (4.43)$$

Квадрат величины вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в заданной сети равен:

$$|{}^m \mathbf{d}|^2 = {}^m P = (4 + 1 + 16 + 4 + 4 + 1 + 4 + 1 + 1) / 81 = 36/81 = 4/9 = 0,4444.$$

Это мощность, рассеиваемая в сети со структурой, соответствующей непланарному графу, при задании единственного внутреннего источника, т.е. источника напряжения.

Проведем расчет матрицы решения двойственной сети, используя контурную часть полученной в (4.40) матрицы преобразования ее путей, которая состоит здесь из 5 независимых замкнутых путей.

$$K_{3,3}: {}^m \underline{C}_a^a = {}^j A_a^a = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \hline \underline{1} & 1 & & 1 & & 1 & & & & \\ \underline{2} & 1 & 1 & & & & 1 & & & \\ \underline{3} & & & 1 & 1 & & & 1 & & \\ \underline{4} & -1 & -1 & & 1 & & & & 1 & \\ \underline{5} & & 1 & -1 & -1 & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & & & & m \\ & & & & & & & & & m \\ & & & & & & & & & m \\ & & & & & & & & & m \\ & & & & & & & & & m \\ \hline \end{array} \quad (4.44)$$

Метрическая матрица (в электрической цепи это матрица сопротивлений, а в общем случае комплексных сопротивлений) получается перемножением матрицы преобразования двойственной сети на транспонированную матрицу преобразования двойственной сети, если сопротивления свободных ветвей равны единицам, как в данном примере.

$$\underline{Z} = {}^m \underline{C} {}^m \underline{C} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \hline \underline{1} & 1 & & 1 & & 1 & & & & \\ \underline{2} & 1 & 1 & & & & 1 & & & \\ \underline{3} & & & 1 & 1 & & & 1 & & \\ \underline{4} & -1 & -1 & & 1 & & & & 1 & \\ \underline{5} & & 1 & -1 & -1 & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & & & & m \\ & & & & & & & & & m \\ & & & & & & & & & m \\ & & & & & & & & & m \\ & & & & & & & & & m \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \hline \underline{6} & 1 & 1 & & -1 & \\ \underline{7} & & 1 & & -1 & 1 \\ \underline{8} & 1 & & 1 & & -1 \\ \underline{9} & & & 1 & 1 & -1 \\ \underline{1} & 1 & & & & \\ \underline{2} & & 1 & & & \\ \underline{3} & & & 1 & & \\ \underline{4} & & & & 1 & \\ \underline{5} & & & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \hline \underline{1} & 3 & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \underline{2} & 1 & 3 & & 0 & -2 & 1 \\ \underline{3} & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & \\ \underline{4} & -1 & -2 & 1 & 4 & -2 & \\ \underline{5} & -1 & 1 & -2 & -2 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

Обратная метрическая матрица двойственной сети в десятичных и простых дробях принимает следующие значения:

$$(\underline{Z}')^{-1} = \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \underline{1} & \begin{matrix} 0,5556 & -0,1111 & -0,1111 & 0,2222 & 0,2222 \end{matrix} \\ \underline{2} & \begin{matrix} -0,1111 & 0,5556 & -0,1111 & 0,2222 & -0,1111 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} -0,1111 & -0,1111 & 0,5556 & -0,1111 & 0,2222 \end{matrix} \\ \underline{4} & \begin{matrix} 0,2222 & 0,2222 & -0,1111 & 0,5556 & 0,2222 \end{matrix} \\ \underline{5} & \begin{matrix} 0,2222 & -0,1111 & 0,2222 & 0,2222 & 0,5556 \end{matrix} \end{matrix} \quad 1/81 = \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \underline{1} & \begin{matrix} 5 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \underline{2} & \begin{matrix} -1 & 5 & -1 & 2 & -1 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} -1 & -1 & 5 & -1 & 2 \end{matrix} \\ \underline{4} & \begin{matrix} 2 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{matrix} \\ \underline{5} & \begin{matrix} 2 & -1 & 2 & 2 & 5 \end{matrix} \end{matrix} \quad 1/9 \quad (4.45)$$

Матрицу решения двойственной сети получаем умножением обратной метрической матрицы слева на матрицу преобразования и справа на транспонированную матрицу преобразования. В результате получим квадратную матрицу, порядок которой равен числу ветвей в сети. Умножение этой матрицы на любой вектор воздействия, заданный в свободных ветвях, позволяет получить сразу отклики во всех ветвях непланарного графа.

$$\underline{Y}_c = {}^m \underline{C}_t (\underline{Z}')^{-1} {}^m \underline{C} = {}^m \underline{C}_t ({}^m \underline{C} {}^m \underline{C}_t)^{-1} {}^m \underline{C} = \quad (4.46)$$

$$\begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \underline{6} & \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \\ \underline{7} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{matrix} \\ \underline{8} & \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} \\ \underline{9} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{matrix} \\ \underline{1} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \underline{2} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \underline{4} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \underline{5} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \underline{1} & \begin{matrix} 5 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \underline{2} & \begin{matrix} -1 & 5 & -1 & 2 & -1 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} -1 & -1 & 5 & -1 & 2 \end{matrix} \\ \underline{4} & \begin{matrix} 2 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{matrix} \\ \underline{5} & \begin{matrix} 2 & -1 & 2 & 2 & 5 \end{matrix} \end{matrix} \quad 1/9 = \begin{matrix} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \underline{1} & \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \underline{2} & \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \underline{4} & \begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \underline{5} & \begin{matrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \underline{6} & \begin{matrix} 5 & 2 & 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{matrix} \\ \underline{7} & \begin{matrix} 2 & 5 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{matrix} \\ \underline{8} & \begin{matrix} 2 & -1 & 5 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{matrix} \\ \underline{9} & \begin{matrix} -1 & -1 & 2 & 5 & -1 & 2 & 2 & 2 & -1 \end{matrix} \\ \underline{1} & \begin{matrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 5 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \underline{2} & \begin{matrix} 2 & 2 & -1 & 2 & -1 & 5 & -1 & 2 & -1 \end{matrix} \\ \underline{3} & \begin{matrix} -1 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 5 & -1 & 2 \end{matrix} \\ \underline{4} & \begin{matrix} -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{matrix} \\ \underline{5} & \begin{matrix} -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 2 & 5 \end{matrix} \end{matrix} \quad 1/9 = \underline{Y}_c$$

Матрицу решения двойственной сети можно было получить и простым вычитанием ранее полученной матрицы решения заданной сети из единичной матрицы (метрики свободных ветвей). Это возможно благодаря инварианту двойственных сетей. Иначе говоря, сумма матриц решения двух двойственных сетей в данном случае дает единичную матрицу.

Пусть наложенный вектор  ${}^m \underline{d}$  такой же, как в (4.41), т.е. имеет заданную компоненту в одной из свободных ветвей, а именно,  ${}^m d_8^0 = 1$ :

$${}^m d_a^0 = {}^m \underline{d}_a^0 = \begin{matrix} \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ & & 1 & & & & & & \end{matrix}$$

**Двойственная сеть.** Проведем расчет компонент откликов этого вектора в связанной двойственной сети графа  $K_{3,3}$  для подматрицы преобразования  ${}^m \underline{C}$ , при  $Z = I$  по формуле (3.11), выполняя все этапы так, как это показано в примерах раздела 3.2. Или, умножая

полученную матрицу решения на этот вектор. Получим ковариантные и контравариантные компоненты (напряжения и токи),  ${}^m d_c^a = {}^m d_a^c$  в ветвях связанной сети:

$${}^m \underline{d}_c^a = {}^m \underline{d}_a^c = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \\ \hline 2 & -1 & 5 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} 1/9 \quad (4.47)$$

Квадрат величины вектора  ${}^m \underline{d}$  в двойственной сети непланарного графа  $K_{3,3}$  равен:

$$|{}^m \underline{d}|^2 = {}^m P = (4 + 1 + 25 + 4 + 4 + 1 + 4 + 1 + 1) / 81 = 45/81 = 5/9 = 0,5556.$$

Здесь выполняется условие инвариантности квадрата величины вектора в двойственных сетях (2.60), а именно:

$$|{}^m \mathbf{d}^0|^2 = |{}^m \mathbf{d}|^2 + |{}^m \underline{d}|^2 = 0,4444 + 0,5556 = 1,0000.$$

Более того, по каждой ветви в двойственных сетях сумма компонент равна источнику воздействия в данной ветви, например, в ветви  $b_8$ :  ${}^m d_c^8 + {}^m \underline{d}_c^8 = 0,44 + 0,56 = 1 = {}^m d_8^0$ . Таким образом, выполняется условие постоянства компонент по каждой ветви при любых соединениях в двойственных сетях, в том числе и в случае данного непланарного графа.

Следует заметить, что полученные отклики в двойственных сетях, которые представлены в (4.43) и (4.47) демонстрируют одно из свойств инварианта двойственных сетей. Оно состоит в том, что сумма откликов в каждой ветви двух двойственных сетей равна величине источника воздействия в этой ветви. В данном случае это вызвано тем, что все метрические коэффициенты (сопротивления или проводимости) ветвей равны единицам. При этом ковариантные и контравариантные компоненты вектора равны друг другу. В замкнутых путях сети, контурах (замкнутая система), это означает, что:  ${}^m d_c^a = {}^m d_a^c$ . В разомкнутых путях сети (открытая система), это означает, что:  ${}^j d_c^a = {}^j d_a^c$ .

Вместе с тем проверка результатов расчета на соответствие законам Кирхгофа, подобная той, которая проводилась в разделе 3.2, показывает, что в построенной двойственной сети есть проблемы. Результаты расчета сети непланарного графа и двойственной к нему сети представлены на рис. 4.12 (значения показателей не поделены на 9, чтобы не загромождать рисунок).

Сумма токов в узлах равна нулю. Токи, входящие в узел, со знаком плюс, выходящие – со знаком минус. Для сети непланарного графа на рис. 4.12.а имеем, что  $S^m d_c^a = 0$ :

- узел А:  $-{}^m d_c^1 - {}^m d_c^4 - {}^m d_c^5 = (+2 - 1 - 1)/9 = 0$ ;
- узел В:  $+{}^m d_c^2 + {}^m d_c^4 + {}^m d_c^9 = (+1 + 1 - 2)/9 = 0$ ;
- узел С:  $-{}^m d_c^3 - {}^m d_c^8 - {}^m d_c^9 = (+2 - 4 + 2)/9 = 0$ ;
- узел D:  $+{}^m d_c^1 + {}^m d_c^6 + {}^m d_c^8 = (-2 - 2 + 4)/9 = 0$ ;
- узел Е:  $-{}^m d_c^2 - {}^m d_c^6 - {}^m d_c^7 = (-1 + 2 - 1)/9 = 0$ ;
- узел F:  $+{}^m d_c^3 + {}^m d_c^5 + {}^m d_c^7 = (-2 + 1 + 1)/9 = 0$ .

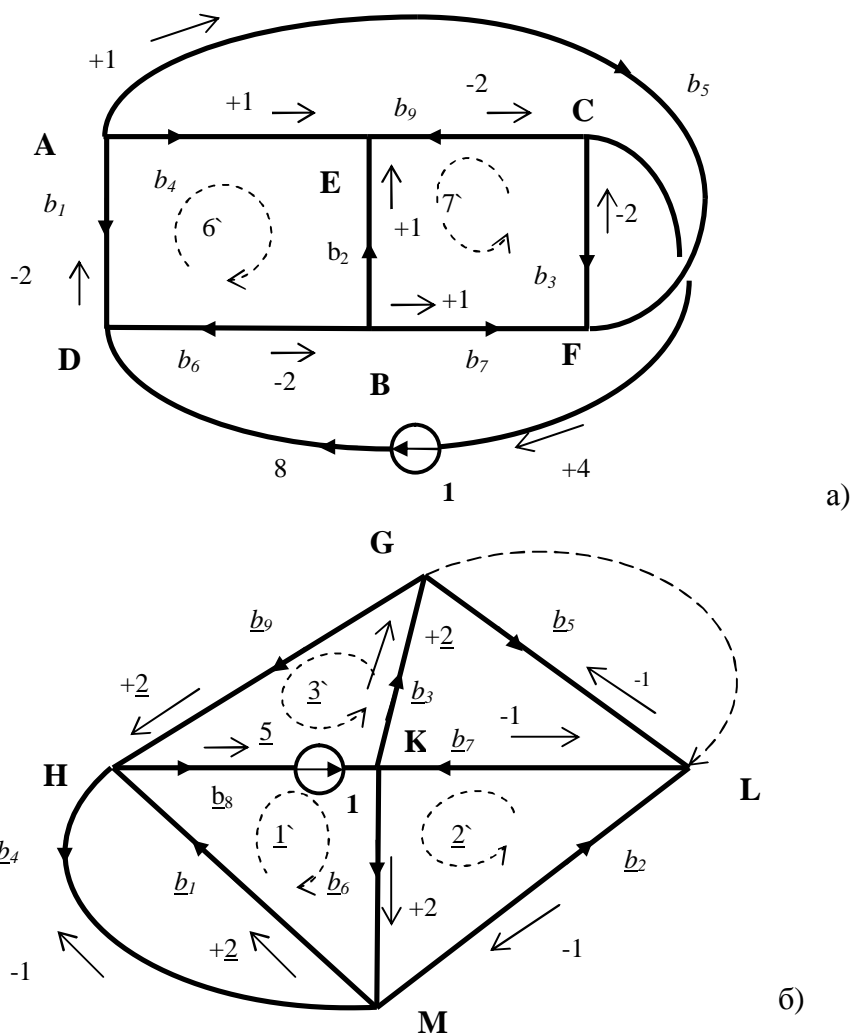


Рис. 4.12. Результаты расчета сети графа  $K_{3,3}$  и двойственной к нему сети

Сумма напряжений в ветвях,  ${}^m d_a^c$ , равна сумме воздействий (источников напряжения)  ${}^m d_a^0$  в каждом контуре, знаки которых определяются их ориентацией относительно направления контура. Для сети на рис. 4.12.а это равенство имеет вид:  $S^m d_a^c = S^m d_a^0$ :

- контур 6:  $-{}^m d_1^c - {}^m d_2^c + {}^m d_4^c + {}^m d_6^c = (+2 + 1 - 1 - 2)/9 = 0$ ;
- контур 7:  $-{}^m d_2^c - {}^m d_3^c + {}^m d_7^c + {}^m d_9^c = (-1 + 2 + 1 - 2)/9 = 0$ ;
- контур 8:  $-{}^m d_1^c - {}^m d_3^c + {}^m d_5^c + {}^m d_8^c = (+2 + 2 + 1 + 4)/9 = 1 = +{}^m d_8^0 = +1$ ;
- контур 9:  $-{}^m d_3^c - {}^m d_4^c + {}^m d_5^c + {}^m d_9^c = (+2 - 1 + 1 - 2)/9 = 0$ ;

В двойственной сети на рис. 4.12.б для  ${}^m d_c^a$  имеем, что  $S^m d_c^a = 0$ :

- узел H:  $+{}^m d_c^1 - {}^m d_c^4 - {}^m d_c^8 + {}^m d_c^9 = (+2 + 1 + 2 - 5)/9 = 0$ ;
- узел K:  $-{}^m d_c^3 - {}^m d_c^6 + {}^m d_c^7 + {}^m d_c^8 = (-2 - 2 - 1 + 5)/9 = 0$ ;
- узел M:  $-{}^m d_c^1 - {}^m d_c^2 + {}^m d_c^4 + {}^m d_c^6 = (-2 + 1 - 1 + 2)/9 = 0$ ;
- узел G:  $+{}^m d_c^3 - {}^m d_c^5 - {}^m d_c^9 = (+2 + 1 - 2)/9 = 1/9$ ;
- узел L:  $+{}^m d_c^2 + {}^m d_c^5 - {}^m d_c^7 = (-1 - 1 + 1)/9 = -1/9$ .



Таким образом, для сети непланарного графа ЗКТ полностью выполняется, а для двойственной сети в узлах G и L – не выполняется.

Для двойственной сети  ${}^m d_a^c = {}^m d_c^a$ , заданные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  прежние, поэтому имеем, что ковариантные компоненты (разность потенциалов, или падение напряжения на ветвях цепи)  $S {}^m d_a^c = S {}^m d_a^0$ :

- контур 1̣:  $+ {}^m d_1^c + {}^m d_6^c + {}^m d_8^c = (+ 5 + 2 + 2)/9 = + 1 = + {}^m d_8^0 = + 1$ ;
- контур 2̣:  $+ {}^m d_2^c + {}^m d_6^c + {}^m d_7^c = (- 1 + 2 - 1)/9 = 0$ ;
- контур 3̣:  $+ {}^m d_3^c + {}^m d_8^c + {}^m d_9^c = (+ 2 + 5 + 2)/9 = 1 = + {}^m d_8^0 = + 1$ ;
- контур 4̣:  ${}^m d_4^c - {}^m d_6^c - {}^m d_7^c + {}^m d_9^c = (- 1 - 2 + 1 + 2)/9 = 0$ ;
- контур 5̣:  $+ {}^m d_5^c + {}^m d_7^c - {}^m d_8^c - {}^m d_9^c = (- 1 - 1 - 5 - 2)/9 = - 1 = - {}^m d_8^0 = - 1$ .

Таким образом, для обеих сетей ЗКН полностью выполняется, т.е. есть баланс воздействий и откликов по каждому контуру, заданных компонент  ${}^m d_a^0$  и найденных ковариантных компонент откликов в ветвях  ${}^m d_a^c$  и  ${}^m d_c^a$ . Вместе с тем в контуре 4̣ хотя формально и выполнено условие закона Кирхгофа, в соответствии с результатами расчета, однако на схеме двойственной сети он не замкнут, т.е. не является контуром.

### 4.3.3. Расчет сети и двойственной сети графа $K_5$

На рис. 4.13 представлен непланарный граф  $K_5$  как пятиконечная звезда (или полный граф на 5 узлах, т.е. каждый узел соединен с каждым другим). Он же развернут на плоскости так, чтобы показать, где может быть расположено его единственное самопересечение. Этот граф построен на пяти узлах, имеет ветвей  $n = 10$ , узлов  $J = 5$ , независимых разомкнутых путей  $j = 4$ , независимых замкнутых путей (контуров)  $m = 6$ .

Обозначения и направления ветвей в сети данного графа выберем максимально совпадающими с обозначениями и направлениями ветвей в двойственной сети графа  $K_{3,3}$  на рис. 4.12. Для этого можно переключить ветвь  $b_4$  с узла **М** на узел **Л**, и добавить ветвь  $b_{10}$ .

Матрица преобразования путей сети, соответствующей этому графу, имеет вид:

$$K_5: C_a^a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6̣ \\ 7̣ \\ 8̣ \\ 9̣ \\ 1̣ \\ 2̣ \\ 3̣ \\ 4̣ \\ 5̣ \\ 10̣ \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & & & & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 1 & & & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & 1 & & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & 1 & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & 1 & & 1 & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & & & & 1 & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & 1 & 1 & & & 1 & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 1 & -1 & & & & & 1 & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & 1 & -1 & -1 & & & & & 1 & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & 1 & 1 & & & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} j \\ j \\ j \\ j \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix} \quad (4.48)$$

В этой матрице выделены блоки, относящиеся к замкнутым и разомкнутым путям. В сети на рис. 4.13 показана часть выбранных путей. Остальные пути можно найти в сети по ненулевым элементам матрицы  $C_{\alpha}^{\alpha}$ . Ветви и пути также перенумерованы здесь для того, чтобы получить возможность максимально сопоставить сети и двойственные сети, соответствующие непланарным графам.

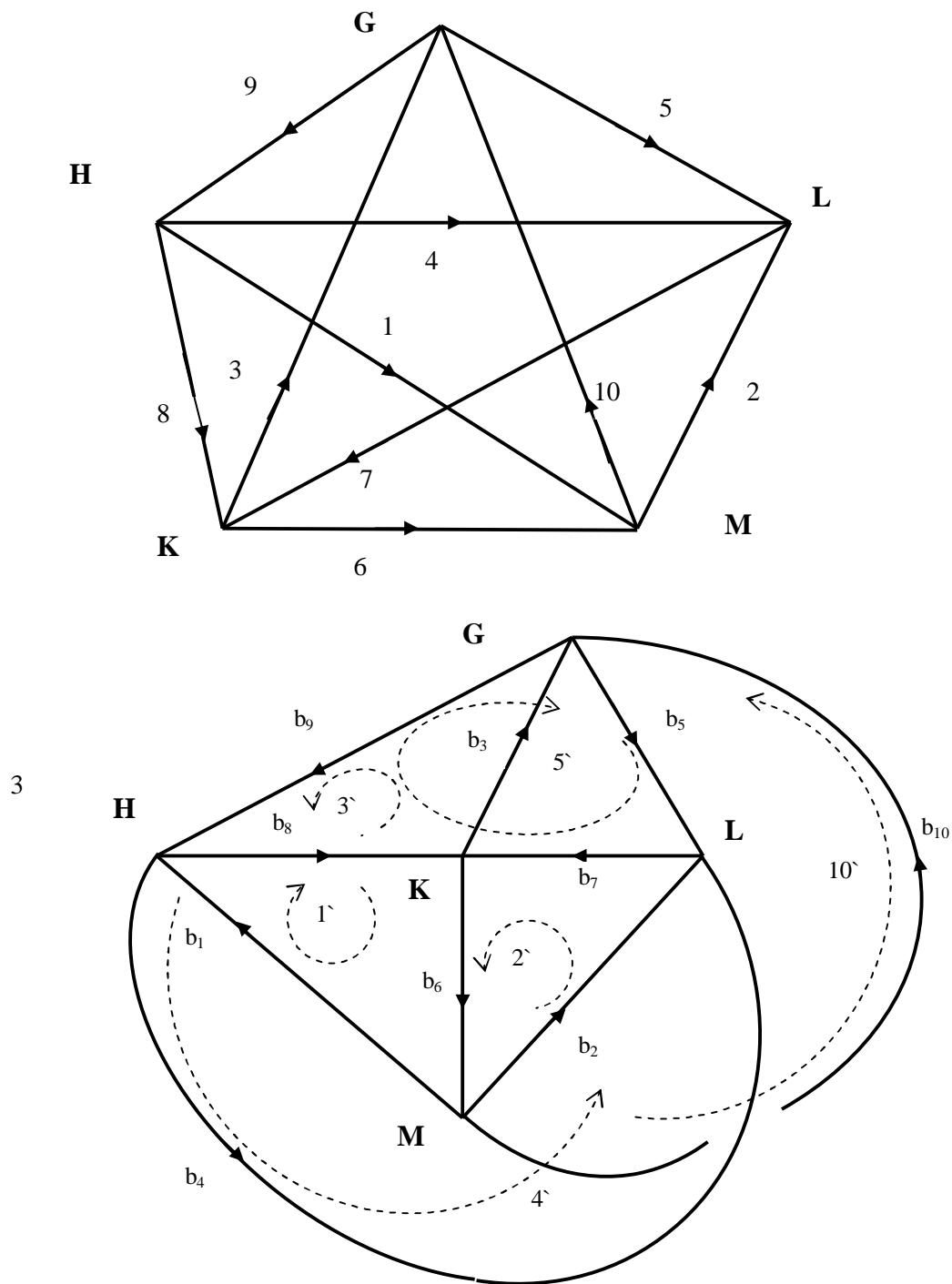


Рис. 4.13. Граф  $K_5$  в представлении традиционном, и представлении, демонстрирующем его непланарность

Путь 4` приходится выбрать другим, поскольку в прототипе этой матрицы (для двойственной сети графа  $K_{3,3}$ ) он оказался в сети структуре разомкнутым. Несложно показать, что если начинать строить двойственную сеть для графа  $K_{3,3}$  с ветвей, составляющих любые другие пути, то все равно один из путей, которые согласно матрице преобразования должны быть замкнутыми, на схеме такой сети должен стать разомкнутым.

Для построения несуществующей двойственной сети к сети непланарного графа можно использовать пути из ее матрицы преобразования. Для этого необходимо получить матрицу преобразования путей двойственной сети. Эта матрица является ортогональной, т.е. обратной и транспонированной к матрице сети непланарного графа. Может быть, матрица преобразования путей непланарной сети является вырожденной? Нет, оказывается, что она существует. Обратная матрица к матрице преобразования путей непланарной сети для графа  $K_5$  имеет вид:

$$K_5: \quad (C_a^a)^{-1} = \begin{array}{c|cccc|cccccc} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{10} \\ \hline \underline{6} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{7} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{8} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{9} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \underline{1} & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{2} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{3} & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{4} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \underline{5} & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \underline{10} & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Здесь также выделены блоки, относящиеся к замкнутым и разомкнутым путям. Транспонированная матрица дает матрицу преобразования путей взаимного базиса, которая является и матрицей преобразования путей в двойственной сети  $\underline{C}_a^a = A^a_a = (C_a^a)^{-1}$ , в (4.48), строки-пути которой показывают, как связаны свободные ветви в двойственную сеть. Таким образом, матрица преобразования двойственной сети для графа  $K_5$  имеет вид:

$$(C_a^a)^{-1} = A^a_a = \underline{C}_a^a = \begin{array}{c|cccc|cccccc|c} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{10} & \\ \hline \underline{6} & 1 & & & & -1 & -1 & & & & -1 & m \\ \underline{7} & & 1 & & & & -1 & & -1 & -1 & & m \\ \underline{8} & & & 1 & & -1 & & -1 & 1 & 1 & -1 & m \\ \underline{9} & & & & 1 & & & -1 & & 1 & -1 & m \\ \hline \underline{1} & & & & & 1 & & & & & & i \\ \underline{2} & & & & & & 1 & & & & & i \\ \underline{3} & & & & & & & 1 & & & & i \\ \underline{4} & & & & & & & & 1 & & & i \\ \underline{5} & & & & & & & & & 1 & & i \\ \underline{10} & & & & & & & & & & 1 & i \end{array} \quad (4.49)$$

Эту матрицу будем использовать для построения структуры двойственной сети по отношению к непланарному графу. Такая структура оказывается несколько неожиданной. Из



Можно попытаться допустить, что данная ветвь отделена фактически от сети, составляя отдельную подсеть. Для такого варианта ветвь  $b_3$  показана на рисунке пунктиром справа. Дело в том, что в данном варианте структуры оказалось 6 узлов, т.е. 5 разомкнутых путей и 5 замкнутых путей базиса. А построена она по матрице, в которой только 4 пути-контур. Если ветвь  $b_3$  отделена от сети (но каким-то образом с ней взаимодействует), и при этом разомкнута, то узлов 8, подсетей – 2, разомкнутых путей – 6, а замкнутых путей – 4. Если эта ветвь-подсеть не привязана явным образом к узлам первой подсети, то тогда все равно, какая у нее ориентация, поскольку при включении в состав путей ее можно проходить в любом направлении. Помимо восстановления топологической справедливости, это позволяет понять, как два непланарных графа с разным числом ветвей могут быть связаны друг с другом двойственными отношениями.

В данной сети оказалось 6 узлов, а должно быть 7, если сеть состоит из одной подсети. Но если здесь две подсети, то появится седьмой узел. Однако это произойдет в том случае, когда ветвь  $b_7$  будет рассматриваться как отдельная подсеть. Но тогда замкнутый путь  ${}^m p_7$  должен состоять из *двух отдельных контуров*, один из которых – независимая подсеть, состоящая из замкнутой ветви  $b_7$ . Таким образом, полученная по ортогональной матрице сеть обладает некоторыми странными свойствами. Какими могут оказаться результаты расчета такой сети, если на нее оказано воздействие, например, источником напряжения?

**Расчет сетей для графа  $K_5$ .** Проведем расчет матрицы решения для данной сети и двойственной сети непланарного графа. Сеть рассматриваем как контурную, ее базис содержит не пять замкнутых путей, как в предыдущем случае, а шесть.

Здесь, когда принято, что  $Z = Y = I$ , т.е. сопротивления свободных ветвей равны единицам, метрическая матрица получается перемножением контурной части матрицы преобразования (4.39) на транспонированную матрицу преобразования.

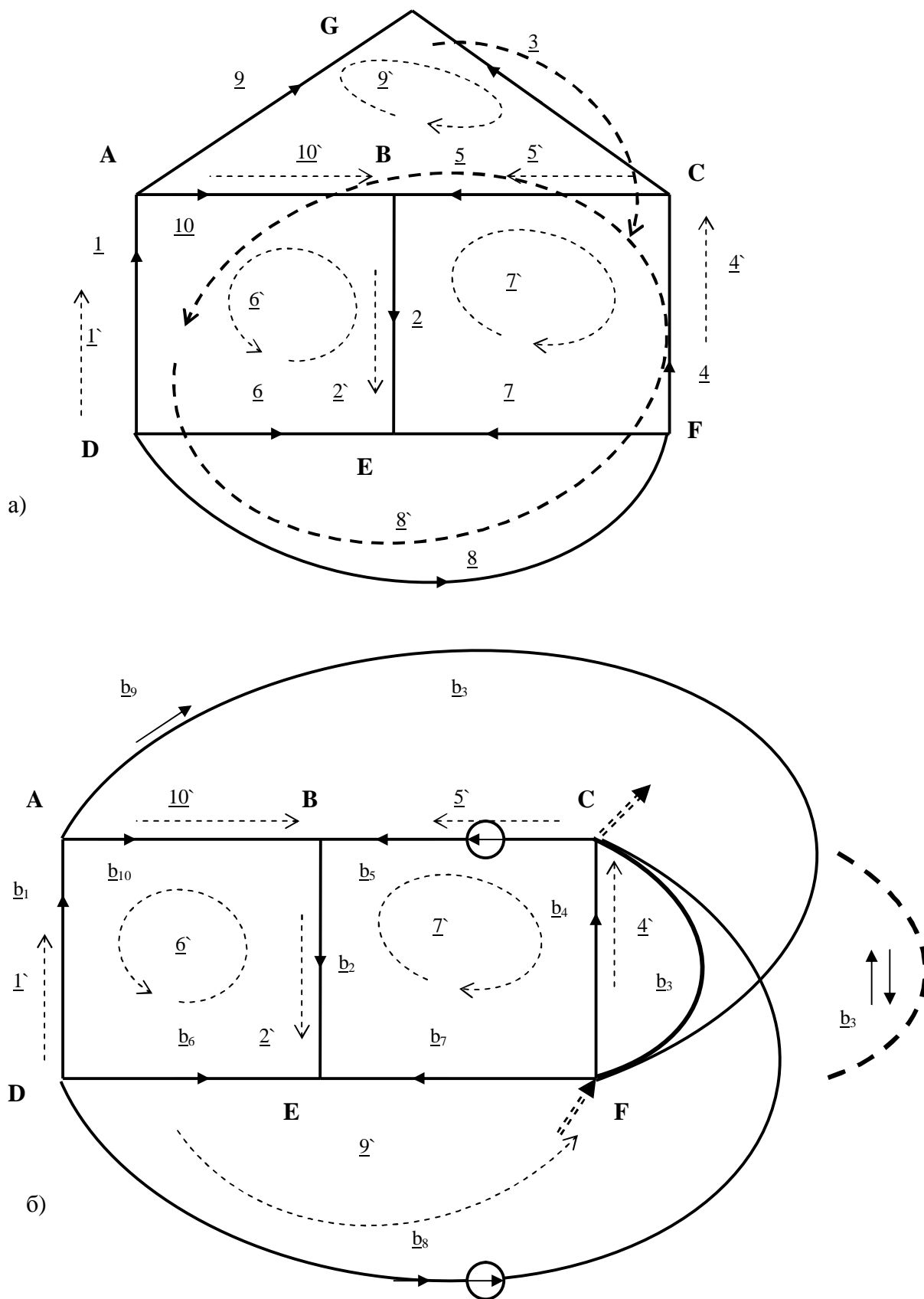


Рис. 4.14. Варианты структуры сети, двойственной к непланарному графу  $K_5$

Произведем указанное перемножение матриц преобразования:

$$Z' = {}^m C {}^m C_t$$

	6	7	8	9	1	2	3	4	5	10	
1'	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	m
2'	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	m
3'	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	m
4'	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	m
5'	0	1	-1	-1	0	0	0	0	1	0	m
10'	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	m

	1'	2'	3'	4'	5'	10'	
6	1	1	0	0	0	1	
7	0	1	0	1	1	0	
8	1	0	1	-1	-1	1	
9	0	0	1	0	-1	1	
1	1	0	0	0	0	0	
2	0	1	0	0	0	0	
3	0	0	1	0	0	0	
4	0	0	0	1	0	0	
5	0	0	0	0	1	0	
10	0	0	0	0	0	1	

(4.50)

$$=$$

	1'	2'	3'	4'	5'	10'	
1'		3	1	1	-1	-1	2
2'		1	3	0	1	1	1
3'		1	0	3	-1	-2	2
4'		-1	1	-1	3	2	-1
5'		-1	1	-2	2	4	-2
10'		2	1	2	-1	-2	4

Получили метрическую матрицу соединенной сети для случая, когда метрические коэффициенты свободных ветвей имеют единичные значения. Обратная матрица к метрической матрице в десятичных и простых дробях имеет вид:

$$(Z')^{-1} =$$

	1'	2'	3'	4'	5'	10'	
1'	0,600	-0,200	0,000	0,200	0,000	-0,200	
2'	-0,200	0,600	0,000	-0,200	-0,200	-0,200	
3'	0,000	0,000	0,600	0,000	0,200	-0,200	
4'	0,200	-0,200	0,000	0,600	-0,200	0,000	
5'	0,000	-0,200	0,200	-0,200	0,600	0,200	
10'	-0,200	-0,200	-0,200	0,000	0,200	0,600	

$$=$$

	1'	2'	3'	4'	5'	10'	
1'	3	-1	0	1	0	-1	
2'	-1	3	0	-1	-1	-1	
3'	0	0	3	0	1	-1	
4'	1	-1	0	3	-1	0	
5'	0	-1	1	-1	3	1	
10'	-1	-1	-1	0	1	3	

(4.51)

Матрицу решения получаем умножением обратной матрицы сопротивлений слева на транспонированную матрицу преобразования и справа на матрицу преобразования. В результате получим квадратную матрицу, умножение которой на любой вектор воздействия позволяет получить сразу отклики во всех ветвях сети непланарного графа.

$$Y_c = {}^m C_t (Z')^{-1} {}^m C = {}^m C_t ({}^m C {}^m C_t)^{-1} {}^m C = \tag{4.52}$$

	1'	2'	3'	4'	5'	10'	
6	1	1	0	0	0	1	
7	0	1	0	1	1	0	
8	1	0	1	-1	-1	1	
9	0	0	1	0	-1	1	
1	1	0	0	0	0	0	
2	0	1	0	0	0	0	
3	0	0	1	0	0	0	
4	0	0	0	1	0	0	
5	0	0	0	0	1	0	
10	0	0	0	0	0	1	

	1'	2'	3'	4'	5'	10'	
1'	3	-1	0	1	0	-1	
2'	-1	3	0	-1	-1	-1	
3'	0	0	3	0	1	-1	
4'	1	-1	0	3	-1	0	
5'	0	-1	1	-1	3	1	
10'	-1	-1	-1	0	1	3	

	6	7	8	9	1	2	3	4	5	10	
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	
0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	
0	1	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	

(4.52)

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 1/5$$

Матрицу решения двойственной сети можно получить вычитанием данной матрицы из единичной матрицы (метрики свободных ветвей). Пусть наложенный вектор  ${}^m\mathbf{d}$  имеет заданную компоненту в той же свободной ветви, что и в предыдущем примере,  ${}^m d_8^0 = 1$ :

$${}^m d_a^0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} & & 1 & & & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.53)$$

Проведем расчет компонент откликов этого вектора в связанной сети графа  $K_5$  для подматрицы преобразования  ${}^m C$ , при  $Z = I$ , умножая полученную выше матрицу решения на вектор воздействия:  ${}^m d_c^a = Y_c {}^m d_a^0$ . Получим равные друг другу значения ковариантных и контравариантных компонент  ${}^m d_c^a = {}^m d_a^c$  вектора в ветвях связанной сети:

$${}^m d_c^a = {}^m d_a^c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & & 1 & -1 & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 1/5 \quad (4.54)$$

Квадрат величины вектора  ${}^m\mathbf{d}$  в заданной сети равен:

$$|{}^m\mathbf{d}|^2 = {}^m P = (1 + 1 + 9 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0) / 25 = 15/25 = 3/5 = 0,6.$$

Это мощность, рассеиваемая в сети со структурой, соответствующей непланарному графу, при задании единственного внутреннего источника, т.е. источника напряжения.

Зададим значения источников иначе, чтобы в ветвях не было нулей-откликов. Для этого добавим значение в ветви 5 равным двум и снова умножим на это матрицу решения.

$${}^m d_a^0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} & & 1 & & & & & & 2 & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.55)$$

Расчет откликов этого вектора в связанной сети получим, умножая полученную выше матрицу решения на вектор воздействия. Тогда совпадающие значения ковариантных и контравариантных компонент  ${}^m d_c^a = {}^m d_a^c$  вектора в ветвях связанной сети равны:

$${}^m d_c^a = {}^m d_a^c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -2 & 3 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 1/5 \quad (4.56)$$

Квадрат величины вектора  ${}^m\mathbf{d}$  в заданной сети (численно равный мощности, рассеиваемой в соответствующей цепи) в этом случае равен:

$$|{}^m\mathbf{d}|^2 = {}^m P = (1 + 1 + 9 + 1 + 1 + 4 + 9 + 9 + 36 + 4) / 25 = 75/25 = 3.$$

**Двойственная сеть.** Проведем расчет матрицы решения двойственной сети, используя контурную часть полученной в (4.49) матрицы преобразования ее путей, которая состоит здесь из 4 независимых замкнутых путей.



$$K_5: \quad {}^m C_a^a = {}^j A_a^a = \begin{matrix} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{10} \\ \underline{6} & 1 & & & & -1 & -1 & & & & -1 \\ \underline{7} & & 1 & & & & -1 & & -1 & -1 & \\ \underline{8} & & & 1 & & -1 & & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \underline{9} & & & & 1 & & & -1 & & 1 & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \end{matrix} \quad (4.57)$$

Метрическая матрица (в электрической цепи это матрица сопротивлений, а в общем случае комплексных сопротивлений) получается перемножением матрицы преобразования двойственной сети на транспонированную матрицу преобразования двойственной сети, если сопротивления свободных ветвей равны единицам, как в данном примере, т.е.

$$\underline{Z} = {}^m C {}^m C_I =$$

$$= \begin{matrix} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{10} \\ \underline{6} & 1 & & & & -1 & -1 & & & & -1 \\ \underline{7} & & 1 & & & & -1 & & -1 & -1 & \\ \underline{8} & & & 1 & & -1 & & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \underline{9} & & & & 1 & & & -1 & & 1 & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \end{matrix} \quad \begin{matrix} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} \\ \underline{6} & 1 & & & \\ \underline{7} & & 1 & & \\ \underline{8} & & & 1 & \\ \underline{9} & & & & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{10} \\ \underline{1} & -1 & & -1 & & \\ \underline{2} & -1 & -1 & & & \\ \underline{3} & & & -1 & -1 & \\ \underline{4} & & -1 & 1 & & \\ \underline{5} & & -1 & 1 & 1 & \\ \underline{10} & -1 & & -1 & -1 & \end{matrix} \quad \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix} \quad (4.58)$$

$$= \begin{matrix} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} \\ \underline{6} & 4 & 1 & 2 & 1 \\ \underline{7} & 1 & 4 & -2 & -1 \\ \underline{8} & 2 & -2 & 6 & 3 \\ \underline{9} & 1 & -1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Обратная метрическая матрица двойственной сети в десятичных и простых дробях принимает следующие значения:

$$(\underline{Z})^{-1} = \begin{matrix} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} \\ \underline{6} & 0,4 & -0,2 & -0,2 & 0 \\ \underline{7} & -0,2 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ \underline{8} & -0,2 & 0,2 & 0,4 & -0,2 \\ \underline{9} & 0 & 0 & -0,2 & 0,4 \end{matrix} = \begin{matrix} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} \\ \underline{6} & 2 & -1 & -1 & 0 \\ \underline{7} & -1 & 2 & 1 & 0 \\ \underline{8} & -1 & 1 & 2 & -1 \\ \underline{9} & 0 & 0 & -1 & 2 \end{matrix} \quad \frac{1}{5} \quad (4.59)$$

Матрицу решения двойственной сети получаем умножением обратной метрической матрицы слева на матрицу преобразования и справа на транспонированную матрицу преобразования. В результате получим квадратную матрицу, порядок которой равен числу ветвей в сети.

Умножение полученной таким образом матрицы решения на любой вектор воздействия, заданный в свободных ветвях, позволяет получить сразу отклики во всех ветвях связанной цепи, структура которой соответствует непланарному графу.

$$\underline{Y}_c = {}^m C_I (\underline{Z})^{-1} {}^m C = {}^m C_I ({}^m C {}^m C_I)^{-1} {}^m C = \quad (4.60)$$

	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>
<u>6</u>	1			
<u>7</u>		1		
<u>8</u>			1	
<u>9</u>				1
<u>1</u>	-1		-1	
<u>2</u>	-1	-1		
<u>3</u>			-1	-1
<u>4</u>		-1	1	
<u>5</u>		-1	1	1
<u>10</u>	-1		-1	-1

	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>
<u>6</u>	2	-1	-1	0
<u>7</u>	-1	2	1	0
<u>8</u>	-1	1	2	-1
<u>9</u>	0	0	-1	2

 $\cdot \frac{1}{5}$ 

	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>10</u>
<u>6</u>	1				-1	-1				-1
<u>7</u>		1				-1		-1	-1	
<u>8</u>			1		-1		-1	1	1	-1
<u>9</u>				1			-1		1	-1

 $=$

$$= \frac{1}{5} \begin{matrix} \begin{matrix} \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{10} \\ \underline{6} & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \underline{7} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ \underline{8} & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \underline{9} & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ \underline{1} & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \underline{2} & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \underline{3} & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ \underline{4} & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \underline{5} & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ \underline{10} & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{matrix} \end{matrix} \quad \frac{1}{5} = \underline{Y}_c$$

Матрицу решения двойственной сети можно получить, вычитая из единичной матрицы (свободные ветви) матрицу решения заданной сети. Это обеспечивает инвариант двойственных сетей, сумма их матриц решения здесь дает единичную матрицу.

Пусть наложенный вектор  ${}^m d$  имеет заданную компоненту в той же свободной ветви, что и в предыдущем примере, и в заданной сети, т.е.  ${}^m d_8 = 1$ :

$${}^m d_a = \begin{matrix} \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{10} \\ \hline & & 1 & & & & & & & & \end{matrix} \quad (4.53)$$

Проведем расчет компонент откликов этого вектора в связанной двойственной сети графа  $K_5$  для подматрицы преобразования  ${}^m C$ , при  $\underline{Z} = \underline{I}$ , умножая полученную выше матрицу решения на вектор воздействия:  ${}^m d_c^\alpha = \underline{Y}_c \cdot {}^m d_a^\alpha$ . Получим равные друг другу значения ковариантных и контравариантных компонент  ${}^m d_c^\alpha = {}^m d_a^\alpha$  вектора в ветвях связанной сети:

$${}^m d_c^a = \quad {}^m d_a^c = \begin{matrix} \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{10} \\ \hline -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \cdot \frac{1}{5} \quad (4.61)$$

Квадрат величины вектора  ${}^m d$  в заданной сети равен:

$$|{}^m d|^2 = {}^m P = (1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0) / 25 = 10/25 = 3/5 = 0,4.$$

Это мощность, рассеиваемая в сети со структурой, соответствующей непланарному графу, при задании единственного внутреннего источника, т.е. источника напряжения. Здесь выполняется инвариант двойственных сетей, или закон сохранения мощности в двойственных цепях для данных сетей, одна из которых представляет собой непланарный

граф на 10 ветвях. Таким образом, выполняется условие инвариантности квадрата величины вектора (рассеиваемой мощности) в двойственных сетях (2.60), а именно:

$$|\mathbf{m}\mathbf{d}^0|^2 = |\mathbf{m}\mathbf{d}|^2 + |\mathbf{m}\mathbf{d}_\perp|^2 = 0,6 + 0,4 = 1,0.$$

Зададим значения источников иначе, чтобы в ветвях не было нулей-откликов. Для этого добавим значение в ветви 5 равным двум и снова умножим на это матрицу решения.

$$\mathbf{m}\mathbf{d}_a^0 = \begin{array}{cccccccccc} & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ \hline & & & 1 & & & & & & 2 & \end{array} \quad (4.55)$$

Проведем расчет компонент откликов этого вектора в связанной двойственной сети. Получим значения ковариантных и контравариантных компонент вектора (напряжения и токи)  $\mathbf{m}\mathbf{d}_c^a = \mathbf{m}\mathbf{d}_c^a$  в ветвях связанной сети:

$$\mathbf{m}\mathbf{d}_c^a = \mathbf{m}\mathbf{d}_c^a = \begin{array}{cccccccccc} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & 10 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 3 & 4 & -2 \end{array} 1/5 \quad (4.62)$$

Квадрат величины вектора  $\mathbf{m}\mathbf{d}$  в двойственной сети непланарного графа  $K_5$  равен:

$$|\mathbf{m}\mathbf{d}_\perp|^2 = \mathbf{m}\mathbf{p}_c = (1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9 + 9 + 16 + 4) / 25 = 50 / 25 = 2.$$

Мощность в сумме двух двойственных сетей (квадрат величины вектора) в данном примере равна сумме мощностей, рассеиваемых в свободных замкнутых ветвях (не имеет значения, принадлежат ли они данной сети или двойственной сети), а именно:

$$\mathbf{m}\mathbf{P}_0 = |\mathbf{m}\mathbf{d}^0|^2 = \mathbf{m}\mathbf{d}_a^0 \mathbf{m}\mathbf{d}_0^a = \mathbf{m}\mathbf{d}_8 \mathbf{m}\mathbf{d}_8^8 + \mathbf{m}\mathbf{d}_5 \mathbf{m}\mathbf{d}_5^5 = 1 + 4 = 5.$$

Как и в предыдущих примерах, выполняется условие инвариантности квадрата величины вектора (мощности) в двойственных сетях (2.60), а именно:

$$\mathbf{m}\mathbf{P}_0 = \mathbf{m}\mathbf{P}_c + \mathbf{m}\mathbf{P}_c = |\mathbf{m}\mathbf{d}|^2 + |\mathbf{m}\mathbf{d}_\perp|^2 = 3 + 2 = 5 = |\mathbf{m}\mathbf{d}^0|^2.$$

Следует заметить, что полученные отклики в двойственных сетях демонстрируют одно из свойств инварианта двойственных сетей. Оно состоит в том, что сумма откликов в каждой ветви двух двойственных сетей равна – величине источника воздействия в этой ветви. В данном случае это вызвано тем, что все метрические коэффициенты (сопротивления или проводимости) ветвей равны единицам. При этом ковариантные и контравариантные компоненты вектора равны друг другу. В замкнутых путях сети, контурах (замкнутая система), это означает, что:  $\mathbf{m}\mathbf{d}_c^a = \mathbf{m}\mathbf{d}_c^a$ . В разомкнутых путях сети (открытая система), это означает, что:  $\mathbf{j}\mathbf{d}_c^a = \mathbf{j}\mathbf{d}_c^a$ .

Например, по ветви  $b_8$  сумма равна единице  $\mathbf{m}\mathbf{d}_c^8 + \mathbf{m}\mathbf{d}_c^8 = 3/5 + 2/5 = 1 = \mathbf{m}\mathbf{d}_8^0$ . По ветви  $b_5$ :  $\mathbf{m}\mathbf{d}_c^5 + \mathbf{m}\mathbf{d}_c^5 = 6/5 + 4/5 = 2 = \mathbf{m}\mathbf{d}_5^0$ . По ветви  $b_7$  равна нулю:  $\mathbf{m}\mathbf{d}_c^7 + \mathbf{m}\mathbf{d}_c^7 = 1 - 1 = 0 = \mathbf{m}\mathbf{d}_7^0$ . Таким образом, выполняется условие постоянства компонент по каждой ветви при любых соединениях в двойственных сетях, в том числе и в случае данного непланарного графа

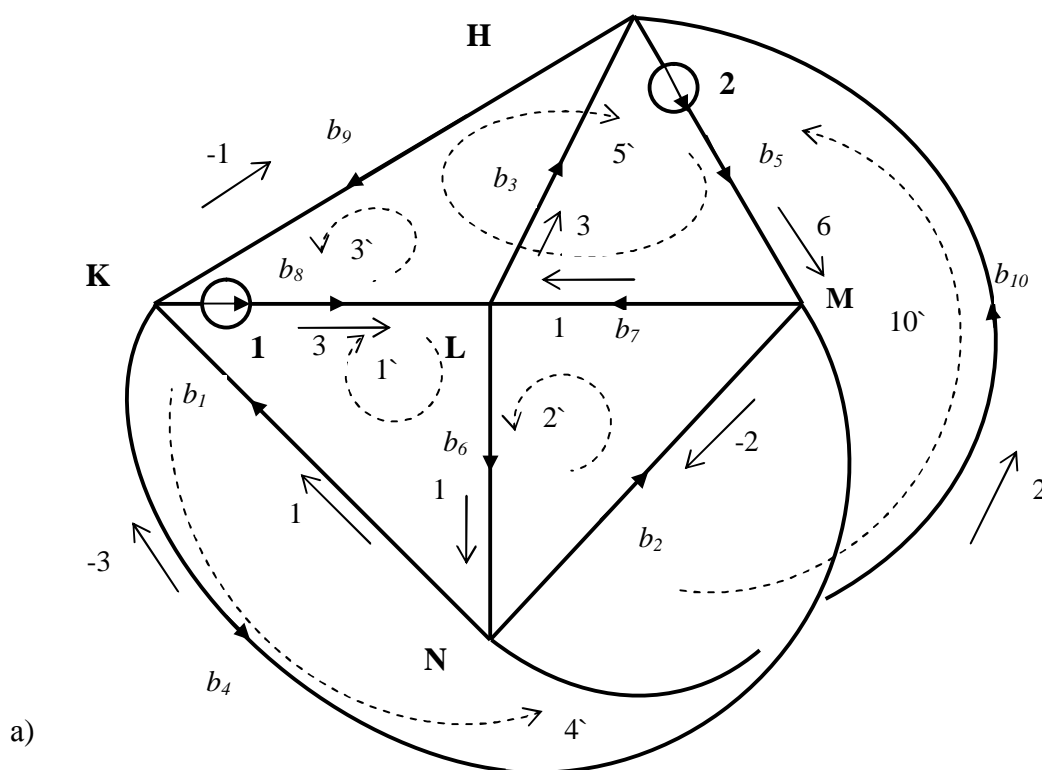
Проверка результатов расчета на соответствие законам Кирхгофа показывает, что в построенной двойственной сети есть проблемы. Результаты расчета сети непланарного графа

и двойственной к нему сети представлены на рис. 4.15 (значения показателей не поделены на 5, чтобы не загромождать рисунок). Пути обозначены штрихом. Направления потоков (компонент вектора) показаны стрелками рядом с ветвями, а источники воздействия – в соответствующих ветвях стрелками в кружках.

Сумма токов в узлах равна нулю. Токи, входящие в узел, со знаком плюс, выходящие – со знаком минус. Для сети непланарного графа на рис. 4.15.а, в которой пять узлов, имеем, что  $S^m d_c^a = 0$ :

- узел  $H$ :  $+^m d_c^3 - ^m d_c^5 - ^m d_c^9 + ^m d_c^{10} = (+3 - 6 + 1 + 2)/5 = 0$ ;
- узел  $K$ :  $+^m d_c^1 + ^m d_c^4 - ^m d_c^8 + ^m d_c^9 = (+1 + 3 - 3 - 1)/5 = 0$ ;
- узел  $L$ :  $-^m d_c^3 - ^m d_c^6 + ^m d_c^7 + ^m d_c^8 = (-3 - 1 + 1 + 3)/5 = 0$ ;
- узел  $M$ :  $-^m d_c^2 - ^m d_c^4 + ^m d_c^5 - ^m d_c^7 = (-2 - 3 + 6 - 1)/5 = 0$ ;
- узел  $N$ :  $-^m d_c^1 + ^m d_c^2 + ^m d_c^6 - ^m d_c^{10} = (-1 + 2 + 1 - 2)/5 = 0$ ;

В этой сети ЗКТ выполняется по всем узлам.



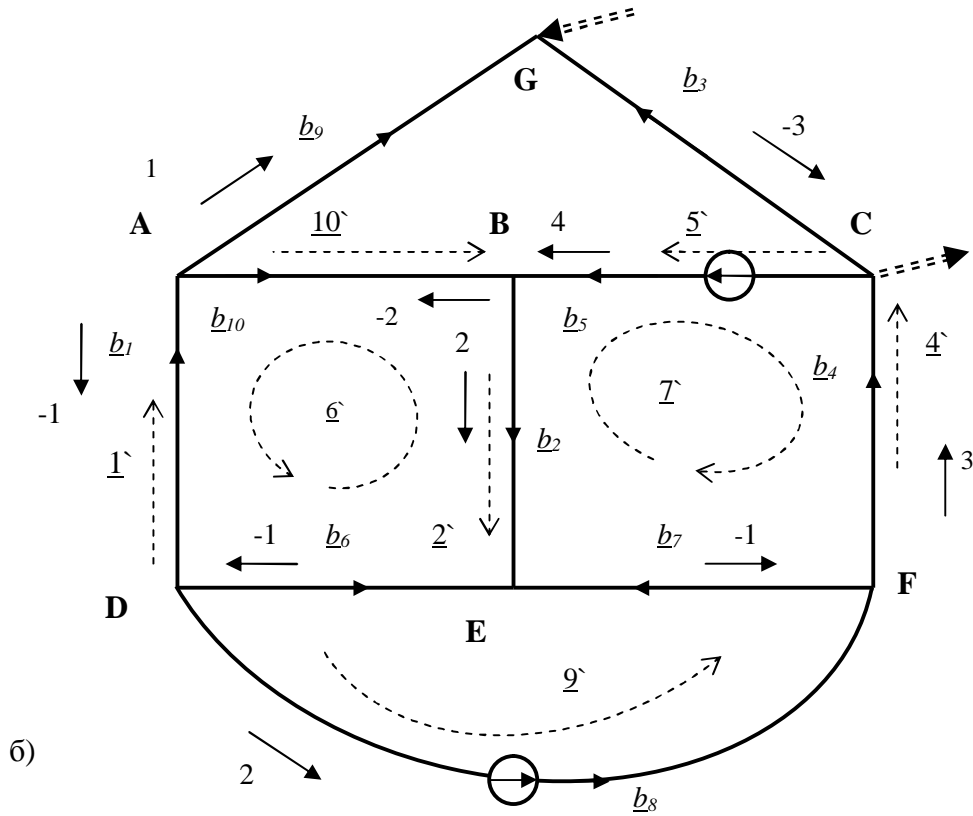


Рис. 4.15. Проверка результатов расчета сети непланарного графа  $K_5$ , и двойственной к этому графу сети

Сумма напряжений в ветвях,  ${}^m d_a^c$ , равна сумме воздействий (источников напряжения)  ${}^m d_a^0$  в каждом контуре, знаки которых определяются их ориентацией относительно направления контура. Для сети на рис. 4.15.а, в которой есть шесть независимых контуров, эти равенства по контурам имеют вид:  $S {}^m d_a^c = S {}^m d_a^0$ :

- контур 1':  $+ {}^m d_1^c + {}^m d_6^c + {}^m d_8^c = (+3 + 1 + 1)/5 = 1 = + {}^m d_8^0 = + 1$ ;
- контур 2':  $+ {}^m d_2^c + {}^m d_6^c + {}^m d_7^c = (-2 + 1 + 1)/5 = 0$ ;
- контур 3':  $+ {}^m d_3^c + {}^m d_8^c + {}^m d_9^c = (+3 + 3 - 1)/5 = 1 = + {}^m d_8^0 = + 1$ ;
- контур 4':  $+ {}^m d_4^c + {}^m d_7^c - {}^m d_8^c = (-3 + 1 - 3)/5 = -1 = - {}^m d_8^0 = - 1$ ;
- контур 5':  $+ {}^m d_5^c + {}^m d_7^c - {}^m d_8^c - {}^m d_9^c = (+6 + 1 - 3 + 1)/5 = 1 = + {}^m d_5^0 - {}^m d_8^0 = 2 - 1 = + 1$ ;
- контур 10':  $- {}^m d_6^c - {}^m d_8^c - {}^m d_9^c + {}^m d_{10}^c = (+1 + 3 - 1 + 2)/5 = 1 = + {}^m d_8^0 = + 1$ .

В двойственной сети на рис. 4.15.б есть 7 узлов. Токи, входящие в узел, имеют знак «плюс». Токи, выходящие из узла, имеют знак «минус». Сумма токов в каждом узле равна нулю, или для контравариантных компонент вектора, т.е. для  ${}^m \underline{d}_c^a$ , имеем, что  $S {}^m \underline{d}_c^a = 0$ :

- узел А:  $- {}^m d_c^1 - {}^m d_c^9 - {}^m d_c^{10} = (-1 - 1 + 2)/5 = 0$ ;
- узел В:  $- {}^m d_c^2 + {}^m d_c^5 + {}^m d_c^{10} = (-2 + 4 - 2)/5 = 0$ ;
- узел С:  $- {}^m d_c^3 + {}^m d_c^4 - {}^m d_c^5 = (+3 + 3 - 4)/5 = + 2/5$ ;

- узел D:  $- {}^m d_c^1 - {}^m d_c^6 - {}^m d_c^8 = (+1 + 1 - 2)/5 = 0$ ;
- узел E:  $+ {}^m d_c^2 + {}^m d_c^6 + {}^m d_c^7 = (+2 - 1 - 1)/5 = 0$ ;
- узел F:  $- {}^m d_c^4 - {}^m d_c^7 + {}^m d_c^8 = (-3 + 2 + 1)/5 = 0$ ;
- узел G:  $+ {}^m d_c^3 + {}^m d_c^9 = (+1 - 3)/5 = -2/5$ .

Таким образом, для сети непланарного графа ЗКТ полностью выполняется, а для двойственной к ней сети, построенной по ортогональной матрице преобразования путей, в двух узлах C и G – не выполняется.

Для двойственной сети  ${}^m \underline{d}_a^c = {}^m \underline{d}_a^a$ , заданные компоненты вектора  ${}^m \mathbf{d}$  прежние, поэтому имеем, что ковариантные компоненты (разность потенциалов, или падение напряжения на ветвях цепи)  $S {}^m \underline{d}_a^c = S {}^m d_a^0$ :

- контур  $\underline{6}$ :  $- {}^m \underline{d}_1^c - {}^m \underline{d}_2^c + {}^m \underline{d}_6^c - {}^m \underline{d}_{10}^c = (+1 - 2 - 1 + 2)/5 = 0$ ;
- контур  $\underline{7}$ :  $- {}^m \underline{d}_2^c - {}^m \underline{d}_4^c - {}^m \underline{d}_5^c + {}^m \underline{d}_7^c = (-2 - 3 - 4 - 1)/5 = -2 = - {}^m d_5^0 = -2$ ;
- контур  $\underline{9}$ :  $- {}^m \underline{d}_3^c + {}^m \underline{d}_5^c + {}^m \underline{d}_9^c - {}^m \underline{d}_{10}^c = (+3 + 4 + 1 + 2)/5 = +2 = + {}^m d_5^0 = +2$ ;
- контур  $\underline{8}$ :  $- {}^m \underline{d}_1^c - {}^m \underline{d}_3^c + {}^m \underline{d}_4^c + {}^m \underline{d}_5^c + {}^m \underline{d}_8^c - {}^m \underline{d}_{10}^c = (+1 + 3 + 3 + 4 + 2 + 2)/5 = 15/5 = 3 = {}^m d_5^0 + {}^m d_8^0 = +2 + 1 = 3$ .

Это равно значению суммы источников воздействия в данном контуре. Таким образом, закон Кирхгофа для напряжений и здесь выполняется. Хотя можно было предположить, что «лишним» окажется значение напряжения в ветви  $\underline{3}$ , которое равно  $- {}^m \underline{d}_3^c = +3/5$ , поскольку именно эта ветвь по построению сети оказалась вне контура ветвей  $\underline{1}$ ,  $\underline{4}$ ,  $\underline{5}$ ,  $\underline{8}$ ,  $\underline{10}$ , оставшись как бы «подвешенной» к контуру в виде отдельной ветви. В конфигурации данного пути ветвь  $\underline{b}_3$  оказалась разомкнутой. При этом именно на границах этой ветви не выполняется баланс токов в узлах двойственной сети. Создается впечатление, что через ветвь  $\underline{3}$  проходит дополнительный поток от некоторого «внешнего» воздействия. Это воздействие показано на рисунке двойным пунктиром; оно выглядит как ток, входящий в узел C и выходящий из G.

Таким образом, для сети непланарного графа ЗКН полностью выполняется, т.е. по каждому контуру есть баланс воздействий и откликов, заданных компонент  ${}^m d_a^0$  и найденных ковариантных компонент откликов в ветвях  ${}^m \underline{d}_a^c$ . А для двойственной к ней сети, построенной по ортогональной матрице преобразования путей, в контуре  $\underline{8}$  есть баланс  ${}^m d_a^0$  и  ${}^m \underline{d}_a^c$  – выполняется условие закона Кирхгофа для результатов расчета, но на схеме двойственной сети этот путь фактически не замкнут. Т.е. путь не является контуром, но значение в «висячей» ветви приводит сумму напряжений в контуре к балансу с суммой напряжений заданных источников. Вместе с тем рассеиваемые мощности в этих сетях удовлетворяют инварианту двойственных сетей, т.е. их сумма равна сумме мощностей источников в свободных ветвях.

Итак, при анализе поведения непланарных графов как сетей с их возможными двойственными сетями, возникает противоречие в явном виде. Оно состоит в том, что расчеты, проведенные для двойственных к непланарным графам сетям, дают такие структуры сетей, в которых выполнение законов Кирхгофа в замкнутых и разомкнутых путях противоречит полученной структуре сетей. Это говорит о том, что структура двойственных сетей к сетям, соответствующим непланарным графам, должна иметь более сложную конфигурацию, чем тем двойственные сети, которые получались обычно для сетей, соответствующих планарным графам. Это противоречие должно иметь разрешение, поскольку динамика изменения способов соединения 9 ветвей, или 10 ветвей позволяет на каждом этапе получить двойственные сети. Как до подхода к непланарному графу, так и после прохождения через структуру непланарного графа.

Рассмотрим также структуру двойственной сети второго непланарного графа, максимально приближенную к структуре первого непланарного графа. Таким образом, получим, что эти два основных непланарных графа, которые присутствуют во всех других непланарных графах, оказываются двойственными друг другу. При этом одна ветвь, на которую они отличаются, оказывается как бы подвешенной в двойственной структуре, расположенной отдельно от самой сети.

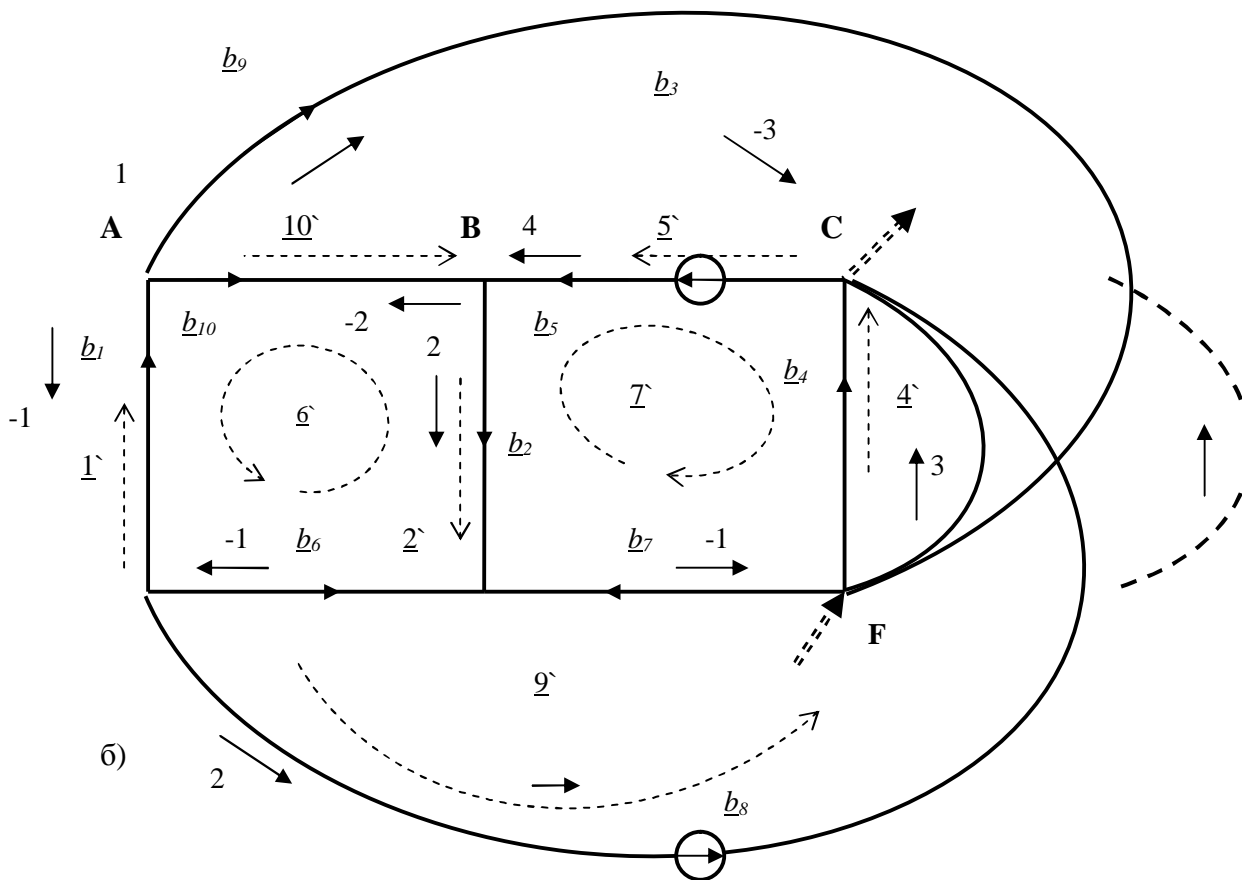


Рис. 4.16. Проверка результатов расчета сети непланарного графа  $K_5$ , и двойственной к этому графу сети

Такие странности можно связать с различием двойственных понятий в графах и сетях. Действительно, в графах и сетях существует двойственность разных типов. В плоских графах вводятся области (им соответствуют охватывающие их контуры) и вершины-точки, которые по одной можно поместить в каждую область. Еще одну точку можно поместить в область вне графа, и все это происходит на плоскости. Если граф не укладывается в плоскость, то возникает неоднозначность в определении областей, – в какое место на плоскости надо поместить точку-вершину, если сама область выходит за пределы плоскости. По этой причине нельзя однозначно определить двойственный граф к непланарному графу.

В сети число вершин-узлов меняется. Число контуров и охватываемых ими областей, тоже меняется. Постоянно лишь число ветвей. Двойственность вводится (существует) между замкнутыми и разомкнутыми путями. При слиянии или расщеплении узлов-границ ветвей эти пути переходят друг в друга. Всегда. Нет разумных оснований делать исключения из этого правила для планарных или непланарных графов. И соответствующих им сетей.

Вместе с тем матрицы преобразования путей для непланарных графов и ортогональные к ним матрицы, которым должны соответствовать некие наглядно изображаемые сети,



обладают необычными свойствами. Выше было показано, например, что в полученных двойственных сетях нарушаются законы Кирхгофа для компонент откликов на заданные векторы воздействия.

Надо изобразить рядом все 4 сети, и попытаться определить, почему возникает дисбаланс токов и напряжений в двойственных сетях к непланарным графам. Чем их можно дополнить, или что является лишним в этих сетях. Цель этих сопоставлений состоит в том, чтобы получить такую конструкцию из двух сетей, в которой два основных непланарных графа являются двойственными друг к другу. Трудность получения такой конструкции состоит в том, что основные непланарные графы имеют разное количество ветвей и, соответственно, разное количество базисных замкнутых и разомкнутых путей, следовательно, матрицы преобразования разного порядка. Что может означать в данном случае ортогональность матриц преобразования?

То есть главное здесь состоит в том, возможно ли определить в сетях с разным количеством элементов-ветвей понятие двойственности. Прежде такое было невозможно. Но и сети до этого располагались каждая в своей плоскости, хотя и в двойственных пространствах. Вообще говоря, каждая сеть может располагаться в любой пространственной конфигурации. Двойственность не должна привязываться к сопоставлению точек-вершин и областей-контуров в одной плоскости. Пути в сети представляют собой лишь координаты для представления, как структуры самих сетей, так и параметров наложенных на них объектов, т.е. процессов, которые происходят в структуре.

Ветвь 3 имеет воздействия на входе и выходе, равные  $2/5$ , именно эта ветвь является лишней в балансе токов для контура 8. Тем не менее, она входит в контур 8 по построению ортогональной матрицы преобразования. Т.е. в этой ветви как бы проходит отдельный поток и рассеивается отдельная мощность.

Возникает вопрос взаимодействия контурных и узловых сетей, когда при изменении происходит переход через непланарность. Это может быть аналогично тому, как взаимодействуют контурные и узловые воздействия при построении сетевой модели межотраслевого баланса. Именно эта задача и рассматривается далее в главе 5.

Анализ результатов расчета узловых сетей можно провести, используя уже полученные результаты для контурных сетей. Это позволяет сделать инвариант двойственных сетей. В самом деле, матрица решения для контурных воздействий в заданной сети одновременно является матрицей решения для узловых воздействий в двойственной сети. И наоборот, матрица решения для контурных воздействий в двойственной сети одновременно является матрицей решения для узловых воздействий в заданной сети. Это выполняется для

существующей структуры соединения ветвей независимо от распределения и значений источников воздействия.

Рассмотрим уже заданные контурные воздействия как узловые воздействия, получим отклики в отдельных ветвях с помощью соответственных двойственных матриц решения.

Зададим значения источников как источники тока, чтобы в ветвях не было нулей-откликов. Умножим на это матрицу решения для заданной сети, которая одновременно является матрицей решения узловой задачи двойственной сети.

$${}^m d_a^0 = e_a^0 = {}^i d_0^a = I_0^a = \begin{matrix} & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \end{matrix} & & & 1 & & & & & & 2 & \end{matrix} \quad (4.55)$$

Расчет откликов этого вектора в связанной сети получим, умножая полученную выше матрицу решения на вектор воздействия. Тогда совпадающие значения ковариантных и контравариантных компонент  ${}^m d_c^a = {}^m d_a^c$  вектора в ветвях связанной сети равны:

$${}^m d_c^a = {}^m d_a^c = \begin{matrix} & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{matrix} & & & & & & & & & & \end{matrix} \cdot 1/5 \quad (4.56)$$

Квадрат величины вектора  ${}^m \mathbf{d}$  в заданной сети в этом случае равен:

$$|{}^m \mathbf{d}|^2 = {}^m P = (1 + 1 + 9 + 1 + 1 + 4 + 9 + 9 + 36 + 4)/25 = 75/25 = 3.$$

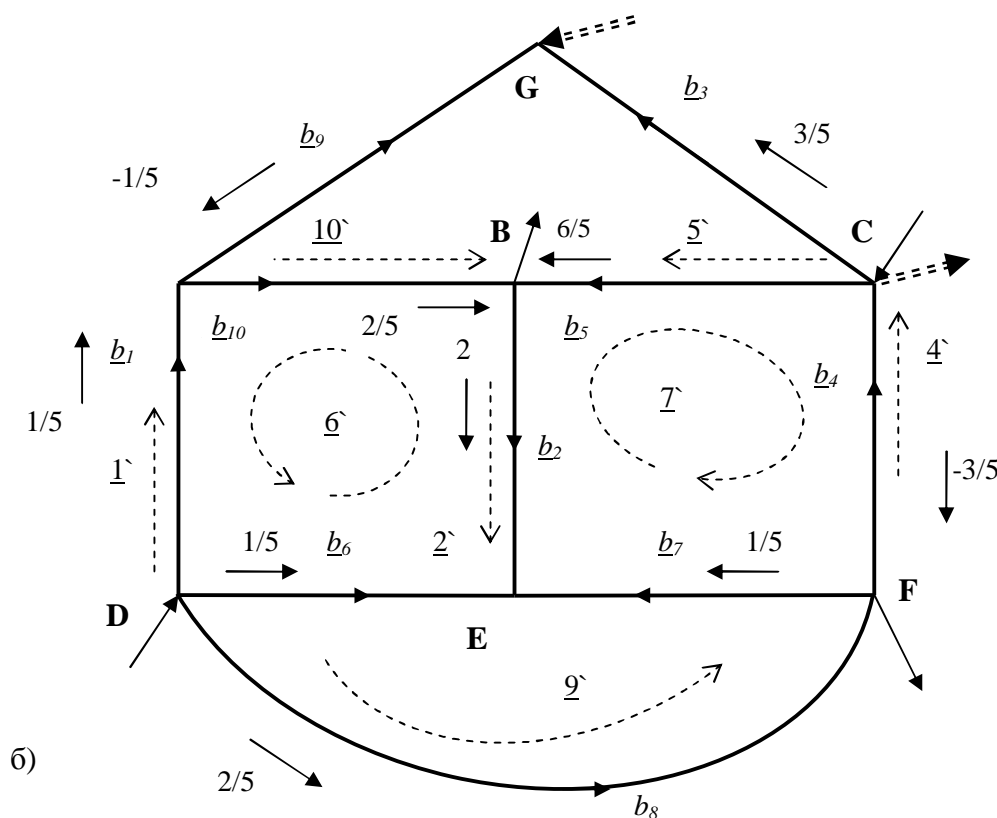


Рис. 4.17. Отклики в двойственной сети к графу  $K_5$  при узловом воздействии

Источники воздействия в сети на рис. 4.17 контурные, показанные ранее кружками со стрелками, теперь заменены на узловые воздействия, источники тока, или внешние источники. Они показаны стрелками на входе и выходе соответствующих ветвей.

Проверим законы Кирхгофа в двойственной сети при узловом воздействии. В этой сети, как и раньше, 7 узлов. Токи, входящие в узел, имеют знак «плюс». Токи, выходящие из узла, имеют знак «минус». Сумма токов в каждом узле равна нулю, или для контравариантных компонент вектора, т.е. для  $^j d_c^a$ , имеем, что  $S^j d_c^a = 0$ :

- узел А:  $-^j d_c^1 - ^j d_c^9 - ^j d_c^{10} = (-1 - 1 + 2)/5 = 0$ ;
- узел В:  $-^j d_c^2 + ^j d_c^5 + ^j d_c^{10} = (-2 + 4 - 2)/5 = 0$ ;
- узел С:  $-^j d_c^3 + ^j d_c^4 - ^j d_c^5 = (+3 + 3 - 4)/5 = +2/5$ ;
- узел D:  $-^j d_c^1 - ^j d_c^6 - ^j d_c^8 = (+1 + 1 - 2)/5 = 0$ ;
- узел E:  $+^j d_c^2 + ^j d_c^6 + ^j d_c^7 = (+2 - 1 - 1)/5 = 0$ ;
- узел F:  $-^j d_c^4 - ^j d_c^7 + ^j d_c^8 = (-3 + 2 + 1)/5 = 0$ ;
- узел G:  $+^j d_c^3 + ^j d_c^9 = (+1 - 3)/5 = -2/5$ .

Таким образом, для сети непланарного графа ЗКТ полностью выполняется, а для двойственной к ней сети, построенной по ортогональной матрице преобразования путей, в двух узлах С и G – не выполняется.

Для двойственной сети  $^j d_a^c = ^j d_c^a$ , заданные компоненты вектора  $^j d$  прежние, поэтому имеем, что ковариантные компоненты (разность потенциалов, или падение напряжения на ветвях цепи)  $S^j d_a^c = S^j d^0_a$ :

- контур  $\underline{6}$ :  $-^j d^c_1 - ^j d^c_2 + ^j d^c_6 - ^j d^c_{10} = (+1 - 2 - 1 + 2)/5 = 0$ ;
- контур  $\underline{7}$ :  $-^j d^c_2 - ^j d^c_4 - ^j d^c_5 + ^j d^c_7 = (-2 - 3 - 4 - 1)/5 = -2 = -^j d^0_5 = -2$ ;
- контур  $\underline{9}$ :  $-^j d^c_3 + ^j d^c_5 + ^j d^c_9 - ^j d^c_{10} = (+3 + 4 + 1 + 2)/5 = +2 = +^j d^0_5 = +2$ ;
- контур  $\underline{8}$ :  $-^j d^c_1 - ^j d^c_3 + ^j d^c_4 + ^j d^c_5 + ^j d^c_8 - ^j d^c_{10} = (+1 + 3 + 3 + 4 + 2 + 2)/5 = 15/5 = 3 = ^j d^0_5 + ^j d^0_8 = +2 + 1 = 3$ .

Это равно значению суммы источников воздействия в данном контуре. Таким образом, закон Кирхгофа для напряжений и здесь выполняется. Хотя можно было предположить, что «лишним» окажется значение напряжения в ветви  $\underline{3}$ , которое равно  $-^j d^c_3 = +3/5$ , поскольку именно эта ветвь по построению сети оказалась вне контура ветвей  $\underline{1}$ ,  $\underline{4}$ ,  $\underline{5}$ ,  $\underline{8}$ ,  $\underline{10}$ , оставшись как бы «подвешенной» к контуру в виде отдельной ветви. В конфигурации данного пути ветвь  $\underline{b}_3$  оказалась разомкнутой. При этом именно на границах этой ветви не выполняется баланс токов в узлах двойственной сети. Создается впечатление, что через ветвь  $\underline{3}$  проходит дополнительный поток от некоторого «внешнего» воздействия. Это воздействие показано на рисунке двойным пунктиром; оно выглядит как ток, входящий в узел С и выходящий из G.

*Непланарные графы – варианты разрешения противоречия.* Возможны три варианта выхода из ситуации отсутствия для непланарного графа двойственного графа.

Это вариант соединения в двойственную конструкцию графов  $K_{3,3}$  и  $K_5$ . Тогда графы меняют число ветвей при переходе через непланарность. Расположенная на границе ветвь может играть роль канала связи между двумя пространствами, в каждом из которых расположена одна из двойственно связанных сетей.

Возможно, эти графы имеют двойственные и числа ветвей не меняют. Основное здесь то, что плоская сеть выходит из двумерного пространства в трехмерное пространство.

Можно также допустить, что двумерная сеть из ветвей, т.е. 1-сеть, соединяется здесь с 2-сетью плоскостей, поверхностей. Взаимодействие таких сетей должно быть при реализации как электрической цепи – токи и напряжения. Аналогично – в электрической машине – 1-сеть электрической цепи взаимодействует с 2-сетью магнитных потоков, которые представлены обмотками статора и ротора.

Все варианты возможны. Однако в рамках рассматриваемых сетей надо начинать с самого начала, т.е. решить проблему в рамках одномерных сетей. Для этого надо рассмотреть последовательное преобразование сети с 9 ветвями через непланарность. Надо построить двойственную сеть до выхода на непланарность, после выхода из непланарности и сравнить именно двойственные сети.

Аналогично надо сравнить двойственные сети для сети с 10 ветвями, построив для нее эти сети до и после выхода на непланарность.

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА СИСТЕМ

Тензорный метод и сетевые модели применялись в электротехнике, электроэнергетике, электромеханике, для расчета лопаток турбин, строительных конструкций, ядерного реактора, сетей газоснабжения, сетей передач электроэнергии (см. главу 1). Автор создал, в частности, сетевую модель для расчета параметров массообмена в процессе ректификации в подсистеме прогноза пожароопасных ситуаций АСУ ТП объектов нефтепереработки.

Особый интерес представляет применение двойственных сетей в экономике для расчета, анализа и прогнозирования состояния производства и финансовой сферы, например, для расчета последствий при изменении хозяйственных связей. Известно, что разрыв хозяйственных связей приводит к снижению производства. Это наглядно подтвердило более чем двукратное падение производства при распаде СССР на независимые государства. Таким образом, роль структурных отношений в экономике весьма значительна. Вместе с тем экономические системы, как живые системы, принципиально отличаются от технических систем, поскольку не только рассеивают, но и накапливают потоки энергии.

В разделе 5.1 представлена сетевая модель межотраслевого баланса. Контурные и узловые токи представляют потоки продуктов, а напряжения – пропорции потоков денежных средств. Финансовых потоков нет в исходной постановке задачи баланса. Связывая потоки и структуру, двойственные отношения в замкнутых и разомкнутых путях, сетевая модель *позволяет отобразить* реально существующие зависимости потоков продуктов и денежных средств в экономической системе. Декомпозиция сети на подсистемы значительно снижает время расчета задачи, позволяет в режиме реального времени анализировать разные варианты структурной организации производства и финансовой сферы.

Применение метода двойственных сетей обеспечивает анализ состояния и динамики развития экономических систем. На основе данного подхода разработаны практические методики анализа результатов деятельности промышленных предприятий, банков, а также система расчета прогноза доходов бюджета (*Арменский и др.*, 1998).

Потоки денежных средств, обеспечивающие хозяйственную деятельность, проходят через банковскую систему, которая связывает хозяйствующие субъекты. Обратные средства предприятий, кредиты, инвестиции, потоки платежей между поставщиками и потребителями проходят через сеть банков. Банки образуют сеть проводников денежных средств. Банк привлекает средства из разных источников и размещает их в кредиты, ценные бумаги, валютные операции. Доходы, расходы и прибыль характеризуют потоки денежных средств. Методика анализа состояния и динамики развития банков, банковской системы РФ, реализована в информационно-аналитической системе «Банки и финансы». Производственные предприятия отличаются от финансовых организаций тем, что через них

проходят как потоки продуктов, так и двойственные потоки денежных средств. Методика анализа работы предприятий применялась при анализе производственной и финансовой деятельности предприятий в журнале «Наука и промышленность России» (раздел 5.2).

Сетевая модель денежных потоков доходов бюджета обеспечивает расчет вариантов прогноза исполнения бюджета в режиме реального времени. Этот метод реализован в системе прогноза доходов бюджета (раздел 5.3), что повысило обоснованность принимаемых решений по формированию бюджета.

### **5.1. Применение сетей для расчета межотраслевого баланса**

Классические уравнения межотраслевого баланса дополнены уравнением баланса потоков продуктов на входе отраслей, и описывают в сети производства все отношения между потоками продуктов. Оказалось, что контравариантные компоненты вектора в сети (токи) соответствуют потокам продуктов, а ковариантные (напряжения) – потокам денежных средств. При изменении связей отраслей величины полных уравнений преобразуются по тензорным законам. Модель допускает расчет сети по частям. Это экономит время и обеспечивает плано-прогнозный расчет различных вариантов. Связь потоков продуктов и денежных средств в сети позволяет рассчитать пропорции в распределении финансов, обеспечивающие производство при заданном спросе, или, наоборот, объемы производства при изменениях в кредитно-денежной политике.

В агрегированном виде экономическую систему можно представить как совокупность трех взаимосвязанных компонент: производство товаров и услуг (реальный сектор), потребление товаров и услуг (товарные рынки), финансовая система (платежная система, долговые рынки и т.д.). Часть конкурентоспособной продукции поступает на экспорт, импорт обеспечивает ту часть продукции, платежеспособный спрос на которую не покрыт внутренним производством. Экспорт и импорт обеспечивают связь данной системы с другими системами. Ими могут быть как другие регионы страны, так и другие государства. Материальные и энергетические потоки в системе производство-потребление продвигаются под действием денежных потоков в финансовой сети (платежная система, накопления и долговые инструменты), в конечном счете – под действием спроса на товары и услуги.

На рис. 5.1 представлена структура составляющих процесса воспроизводства в экономической системе, которые имеют то или иное материальное воплощение в виде технологий производства. В сети технологий распространяются потоки материалов, энергии, людей, которые обеспечивают реальное производство, а потоки денежных средств, обслуживают производство, накопление, инвестирование. Модель рассмотрена в связи с экономической безопасностью государства (Арменский и др., 2003).

По элементам, которые на данной схеме составляют внешний цикл, в направлении стрелок протекают материальные потоки ресурсов из природной среды. В процессе переработки они превращаются в товары и услуги, потребляются, а затем утилизируются в природной среде. Навстречу этим потокам по элементам внутреннего цикла движутся потоки денежных средств, которые протекают в платежной системе, для целей развития осуществляется кредитная, инвестиционная деятельность. Воздействием, которое обеспечивает движение всех потоков, является конечный спрос, который выражает потребности населения в создании и поддержании условий обеспечения жизнедеятельности, а также потребности развития. Потоки производства и потребления товаров и услуг замкнуты на окружающую среду. Денежные потоки в кредитно-финансовой системе замкнуты внутри человеческого общества и не имеют выхода на природную среду.

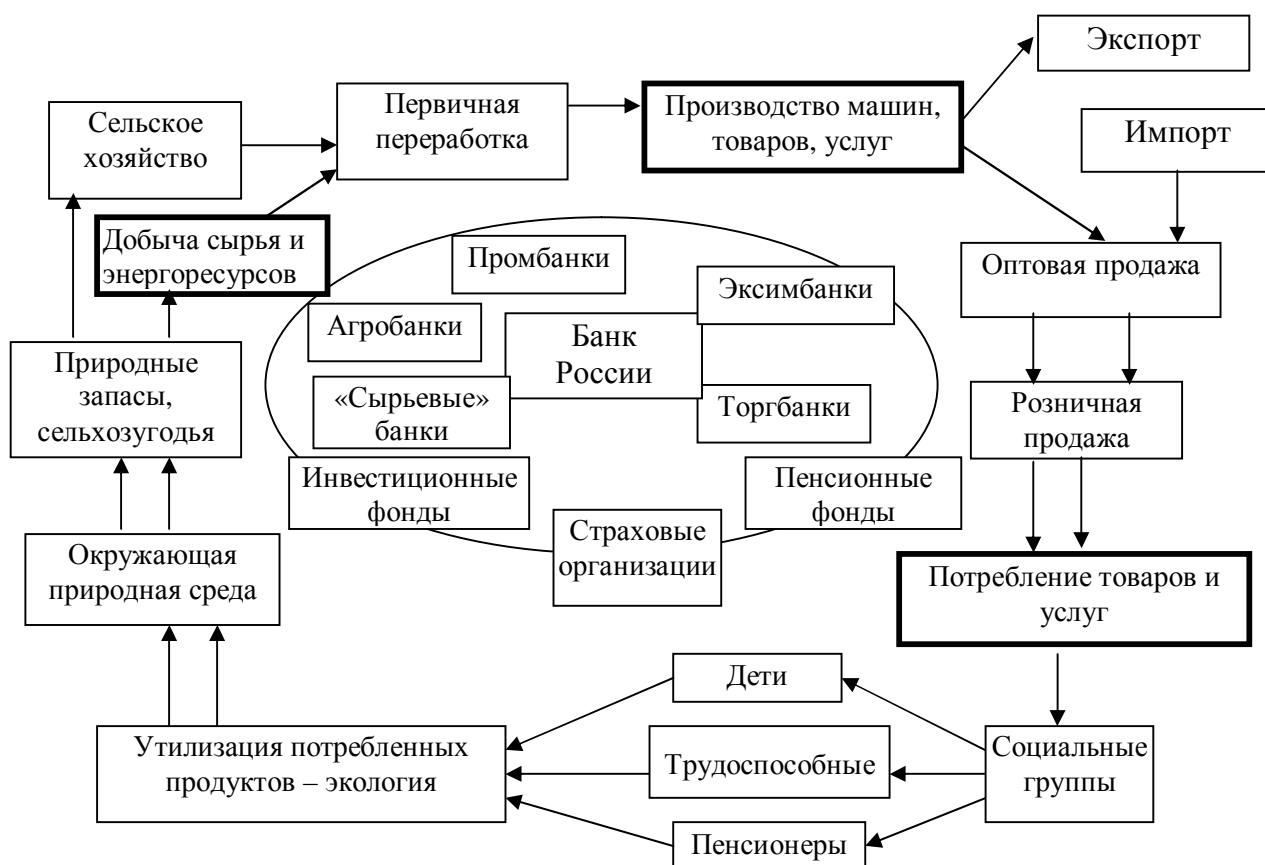


Рисунок 5.1. Сетевая модель связей составляющих социально-экономической системы

Основным показателем экономических и социальных систем на любом уровне: мировая система, страна, организация, семья является производимый, распределяемый и потребляемый поток энергии. Его характеризует мощность, т.е. энергия в единицу времени. Конфликты возникают по линии перераспределения произведенного продукта, измеряемого потоком энергии, как внутри страны (между социальными группами), так и между государствами.

При измерении продукта в денежном выражении возникают эффекты мультипликации, когда каждой денежной единице, соответствующей продукту (энергии) в каждый момент времени соответствует несколько, до 10, денежных единиц вторичных финансовых инструментов, которые обращаются на рынке капитала. Эти единицы отражают отношения общества и человека, различных государств между собой, но не отражают отношения человека и общества с природой. Единицы энергии имеют одни и те же значения везде, где производятся согласованные процедуры измерения. Денежные единицы подвержены инфляции разных видов, имеют разную покупательную способность в разных странах, имеют разные функции (оборотные средства, инвестиции, накопление, средства платежа), т.е. не являются инвариантом. Это делает возможным применение кредитно-денежного механизма для неэквивалентного обмена, например, между развитыми и развивающимися странами. Возможности изменения стоимости денежных единиц (покупательной способности) привели к череде региональных финансовых кризисов в 90-ые годы, известных как информационно-финансовые войны (*Арменский* и др., 2003). Огромные дисбалансы между масштабами финансовых операций и фундаментальной стоимостью активов стали причиной финансового кризиса, который начался в 2007 году.

Межотраслевой баланс предполагает инвариантный характер потоков продуктов, возможность их соизмеримости на протяжении определенного периода времени. Вместе с тем для составления баланса приходится применять стоимостные оценки, т.е. составлять его в денежных единицах. Баланс в натуральных единицах трудно применять практически из-за несопоставимости единиц разных продуктов. Можно составить такой баланс при выражении стоимости всех продуктов в энергетических единицах в высоко агрегированном виде. Для этого необходимо проводить практические работы по выражению стоимости продуктов в энергетических единицах. Кроме того, такое выражение стоимости потребует регулярного мониторинга, поскольку развитие технологий, применение новых материалов, приводит к изменению энергетической стоимости производства продуктов, которые имеют постоянное назначение в обеспечении жизнедеятельности.

Межотраслевой баланс может состояться двух видов: баланс потоков продуктов (материальный баланс) и баланс потоков денежных средств (финансовый баланс). Этим двум видам потоков соответствуют две разные сети, которые по структуре своей могут рассматриваться как двойственные по отношению друг к другу.

Сеть потоков продуктов создает реальные потребительские стоимости. Схема структурных связей между потоками продуктов при их движении от производства к использованию (включая потребление социальными группами), показана на рисунке 5.1.a (*Петров*, 2008, РФФИ). Это *открытая* система, разомкнутая на природу. Потоки продуктов



в виде природных ресурсов поступают из окружающей среды (полезные ископаемые, сельхозугодия, водоемы и т.д.), проходят цикл производства и использования, а затем в виде отходов возвращаются в природную среду (создавая экологические проблемы).

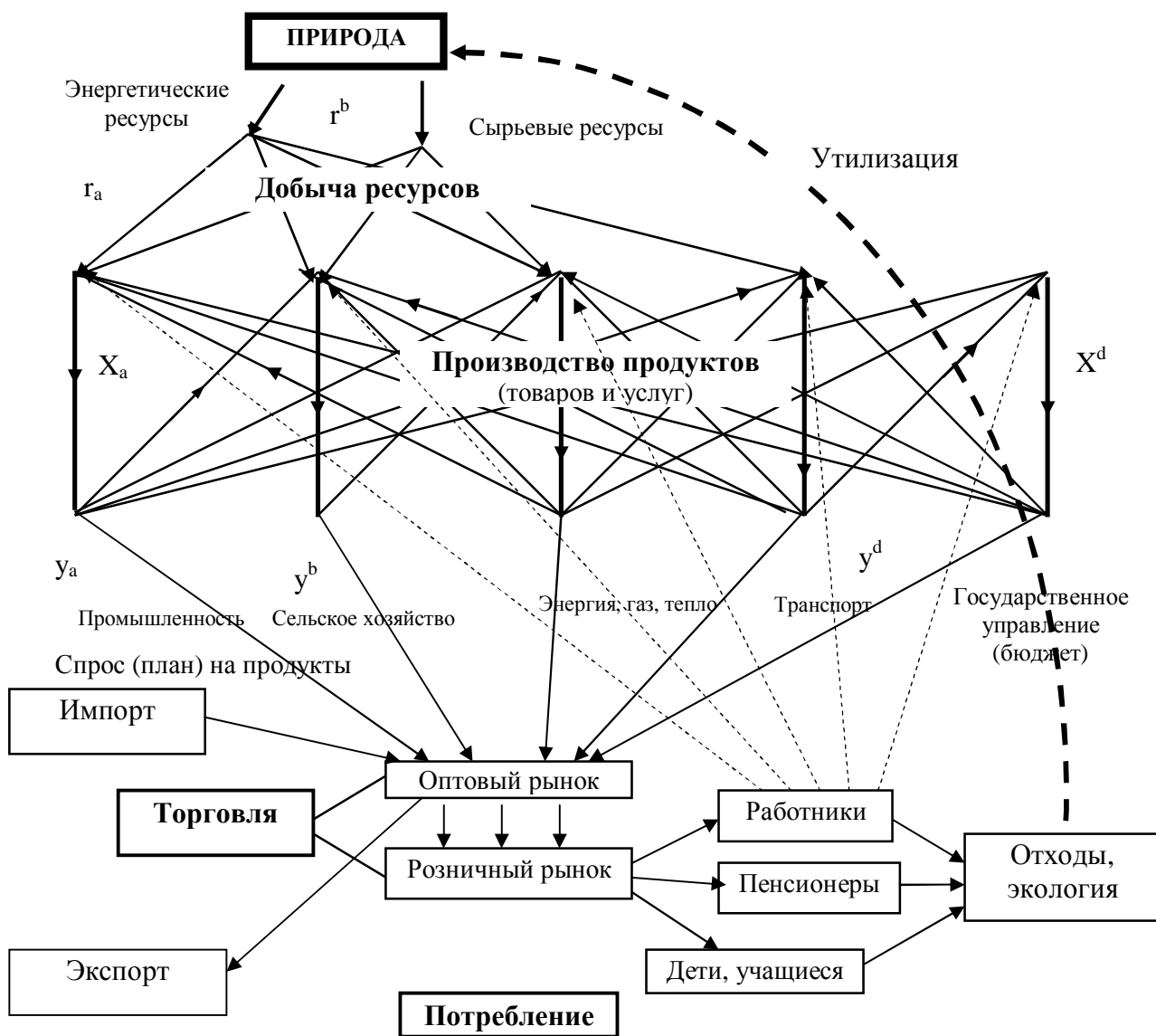


Рисунок 5.1.а Структура сети потоков продуктов в социально-экономической системе

Взаимодействие потоков продуктов и денежных средств имеет весьма сложный характер, для моделирования которого потребовалось использование метода двойственных сетей с внешними и внутренними воздействиями. Это позволило получить алгоритмы расчета потоков продуктов в системе производства. В сети производства возникают аналогии потенциалов и цен, напряжений и кредитных требований. В сети денежных потоков возникают аналогии потенциалов и ставок по кредитам и депозитам, дебиторской и кредиторской задолженности в двойственной сети. Это позволяет анализировать варианты

структурных изменений производства, где удалось установить аналогии между системой и сетевой моделью.

Схема структурных связей между потоками денежных средств от производства к потреблению, показана на рисунке 5.1.б. Денежные потоки замкнуты внутри общества, совершая обороты между хозяйствующими субъектами, юридическими и физическими лицами, замыкаясь на банковскую систему. Они не имеют выхода на природу, как энергетические по своему содержанию потоки продуктов, которые проходят путь от добычи природных ресурсов (созданных потоком солнечной энергии) до утилизации использованных продуктов в самой природе.

Сеть потоков денег – это совокупность потоков платежей за обмен продуктами между субъектами, включая продажу готовых продуктов конечным потребителям. Структура этой сети отличается от сетевой модели межотраслевого баланса тем, что платежи производятся через сеть банков, которые становятся структурными элементами сети.

В сети денежных потоков возникают платежи налогов, которые составляют основу бюджета и обеспечивают расходы, в том числе, на зарплаты работников бюджетной сферы, пособия, стипендии, пенсии. Эти денежные средства через физических лиц поступают на розничный рынок и обеспечивают спрос на продукты (товары и услуги), созданные в сети производства потоков продуктов.

Метрика в сети потоков денег отличается от метрики в сети потоков продуктов, где коэффициенты прямых затрат определяют пропорции потребности отраслей (хозяйствующих субъектов) в продукции друг друга. В финансовой сети метрика определяет пропорции, в которых субъекты обмениваются потоками денег. Метрикой в сети денег являются ставки привлечения и размещения, которые определяют цены денег в зависимости от сроков, объемов и назначения. Потоки взаимных поставок определяются ценами на комплектующие, сырье, материалы, энергию, рабочую силу.

Узлами и регуляторами денежных потоков являются банки. Банк, кредитная организация, по физической сути представляет собой аналог трансформатора. По одной группе циклов банк привлекает ресурсы (депозиты физических и юридических лиц, кредиты других банков, средства, расчетные счета предприятий, а также выпущенные ценные бумаги). Банк платит за пользование ресурсами. По другой группе циклов банк размещает средства – работающие активы. Банк получает плату за предоставленные денежные средства. Подробнее сетевая модель банка рассмотрена в разделе 5.2.

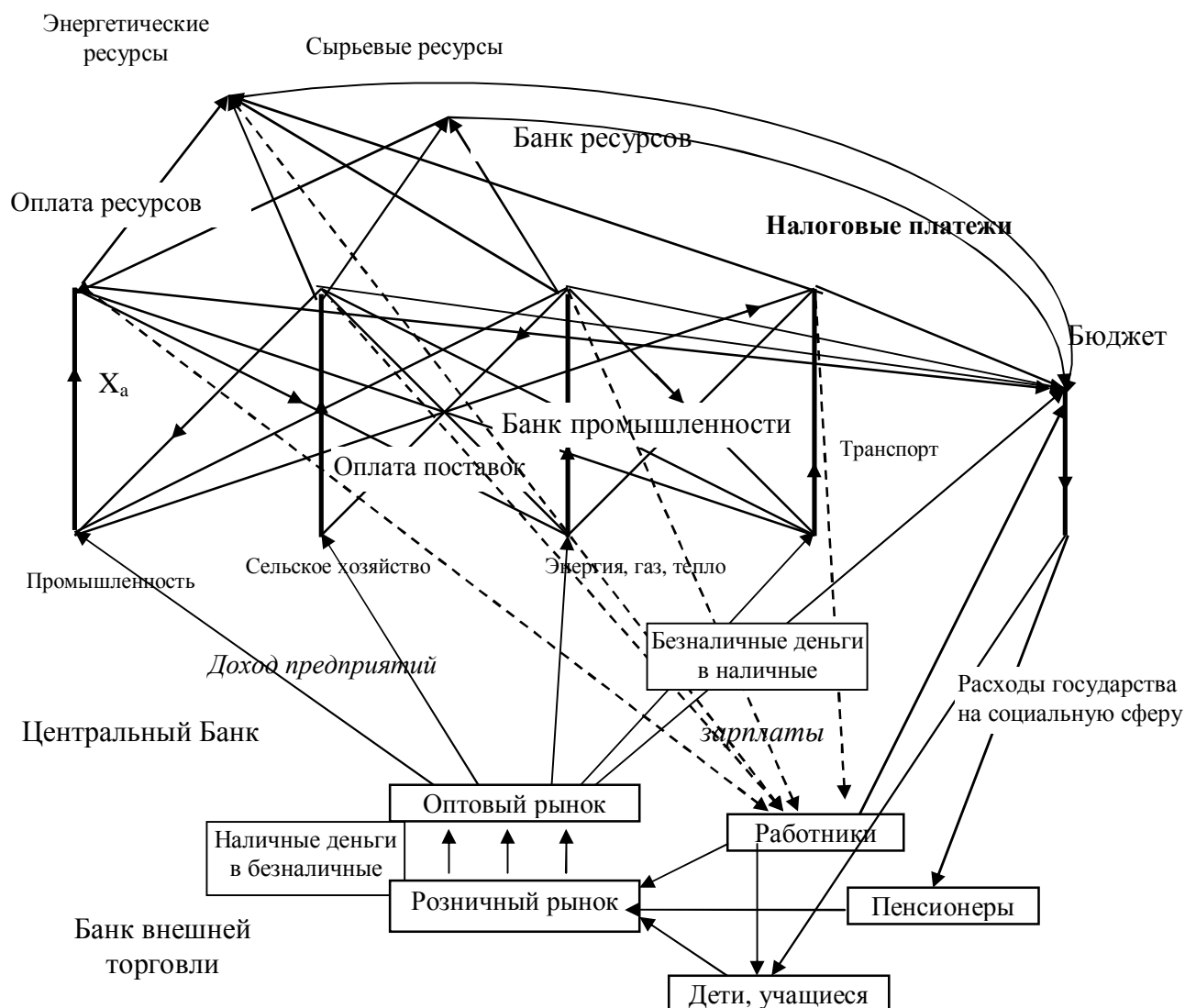


Рисунок 5.1.6 Структура двойственной сети потоков денег в социально-экономической системе

### 5.1.1. Полная система уравнений межотраслевого баланса

**Постановка задачи.** Отрасли выпускают продукты в количестве, определяемом спросом рынка (заданным планом) и потребностями межотраслевых поставок. В качестве «отраслей» в задаче могут фигурировать страны, регионы, предприятия, технологические линии. Т.е. эта задача достаточно универсальна. Отрасли потребляют ресурсы и продукцию друг друга. *Задача состоит в расчете объема производства (валового выпуска) каждой отрасли* и ресурсов, обеспечивающих спрос и поставки. Если ресурсы ограничены, то возникает задача максимизации общего выпуска, или обеспечения выпуска приоритетных отраслей («остаточный» принцип планирования) и т.д.

Согласно определению Росстата, *отрасль* представляет собой совокупность предприятий и организаций, принадлежащих соответствующей отрасли действующего в настоящее время Общероссийского классификатора отраслей народного хозяйства

(ОКОНХ). *Продукт* – совокупность однородных товаров и услуг данного вида, произведенных в различных отраслях экономики (*Система таблиц...*, 2006).

Математически задача имеет вид системы уравнений баланса продуктов на выходе отраслей. Сама система хозяйства состоит из  $n$  отраслей, выпускающих продукты с валовым выпуском  $X^a$  (где  $\alpha = 1, \dots, n$ ) в соответствии с планом  $y_a$  и обеспечивающих поставки  $x_{ab}$ , при потреблении ресурсов. Это записывается классической системой уравнений распределения произведенного продукта на выходе отраслей (*Коссов, 1966; Леонтьев, 1958*):

$$X_a = \sum_{b=1}^n x_{ab} + y_a. \quad (5.1)$$

Далее эти величины получают верхние и нижние индексы, в зависимости от их ролей, как воздействий и откликов, которые они играют в модели. Межотраслевые поставки задают коэффициенты прямых затрат, которые обозначают  $a^{ab}$ . Значения коэффициентов прямых затрат численно равны количеству продукта отрасли  $\alpha$ , которое необходимо для производства одной единицы продукта отрасли  $\beta$ .

В реальности коэффициенты прямых затрат представляют собой затраты одного продукта на производство другого (например, расход угля на производство электроэнергии) и рассчитываются в рублях на 1000 рублей продукции (*Система таблиц...*, 2006). Тогда значения потоков поставок продуктов между отраслями выражаются уравнениями:

$$x^{ab} = a^{ab} X_b. \quad (5.2)$$

Потребление ресурсов определяется аналогичными коэффициентами  $b^{ab}$ , численно равными количеству ресурса  $\gamma$  для производства одной единицы продукта отрасли  $\beta$ , что выражается уравнениями:

$$r^{gb} = b^{gb} X_b. \quad (5.3)$$

Таким образом, коэффициенты  $a^{ab}$  и  $b^{ab}$  устанавливают пропорции между воздействиями, в виде производимого продукта, и откликом, в виде потока поставки или ресурса. Подставляя (5.2) в (5.1) и преобразуя, получим систему уравнений

$$y^a = (d^{ab} - a^{ab}) X_b \quad (5.4)$$

где  $(d^{ab} - a^{ab}) = (I - A)$  – так называемая экономическая матрица (или матрица Леонтьева), обращение которой дает решение исходной задачи:

$$X_a = (d^{ab} - a^{ab})^{-1} y^b \quad (5.5)$$

Обращение экономической матрицы можно выполнить вычислением суммы степенного ряда:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots \quad (5.6)$$

поскольку коэффициенты в матрице  $a^{ab}$  меньше, и даже много меньше единицы и норма матрицы  $(d^{ab} - a^{ab})$  меньше единицы.

Элементы обратной экономической матрицы называют коэффициентами полных затрат. Коэффициенты полных затрат учитывают затраты, связанные с производством того или иного продукта не только прямо, но и косвенно через другие продукты, участвующие в производстве данного продукта. Например, для определения полных затрат электроэнергии на производство станков учитываются не только прямые затраты на их производство, но и расход электроэнергии на выплавку стали, обработку металлов и производство других материалов, из которых изготавливаются станки; на выработку топлива для производства станков; на транспортировку всех этих материалов с мест первичного производства до предприятий-потребителей и т. д. Таким образом, для определения полных затрат электроэнергии на производство станков необходимо учесть весь ее расход по всей цепи технологических связей станкостроения с другими отраслями экономики. В отличие от коэффициентов прямых затрат, являющихся составной частью издержек производства данного вида продукции, коэффициенты полных затрат охватывают элементы издержек производства других продуктов, косвенно связанных с производством данного вида продукции. Коэффициенты полных затрат показывают потребности в выпуске для производства 1000 рублей продукции данного вида, конечной продукции другого вида (*Система таблиц...*, 2006).

Симметричная таблица «Затраты-Выпуск» устанавливает связи типа «продукт-продукт» и используется для осуществления прогнозных и сценарных расчетов развития экономики на основе коэффициентов прямых и полных затрат.

Ряд (5.6) сходится медленно. Вычисление суммы степенного ряда при размерности задачи, превышающей даже несколько тысяч показателей (в зависимости от степени детализации задачи их могут быть миллионы, например в СССР – более 20 миллионов показателей) требует затрат времени, которые сопоставимы с плановым периодом. Это не оставляет времени на оптимизацию и делает практически невозможным управление экономикой на основе математических расчетов.

Для построения сетевой модели межотраслевого баланса, как и любой сетевой модели, необходимо найти все соотношения между потоками в системе. При этом уравнения системы приводятся к тензорному виду. Это значит, что при изменении координат (изменении связей элементов, структуры) все величины преобразуются по линейным законам, как в формуле (1.2). Преобразованиями координат могут быть: изменение структуры хозяйственных связей, структуры спроса, источников ресурсов.

На рисунке 5.2 дан пример пяти отраслей (вертикальные линии), связанных поставками (наклонные линии), сверху поступают ресурсы, стрелки внизу показывают воздействие спроса (плана). Эта схема отражает естественную структуру процессов производства во взаимно связанных отраслях экономической системы. Представлены 5 базовых отраслей экономики: промышленность, сельское хозяйство, строительство, транспорт, розничная торговля.

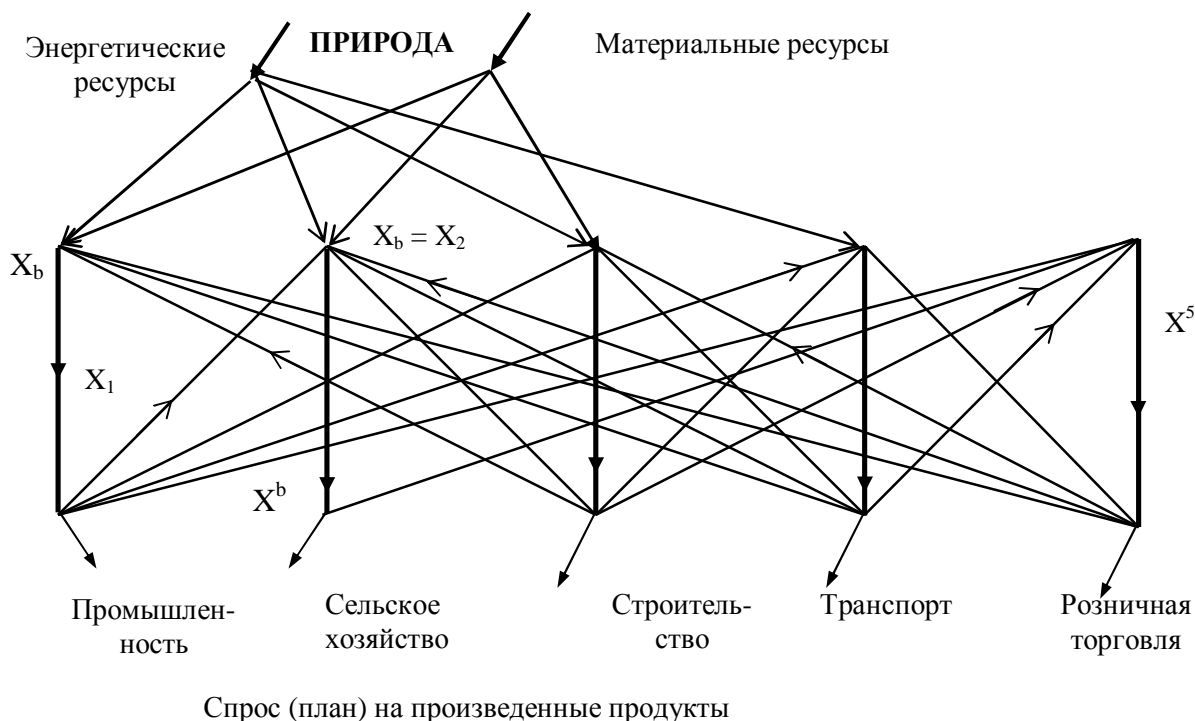


Рис. 5.2. Структура сети потоков продуктов в отраслях

Жирные линии – это основные отрасли производства продуктов, потоки в них направлены вниз, от входов к выходам. Сверху к ним поступают ресурсы (энергетические и материальные). Тонкие линии от выходов одних отраслей к входам других – это направления межотраслевых поставок. Стрелки внизу показывают спрос на продукцию данных отраслей (план производства). Сама структура потоков продуктов задана технологиями, или физическим содержанием процессов преобразования потоков энергии в экономике.

В настоящее время произведенный ВВП представляют как по видам деятельности (ОКНХ), так и по отраслевой классификации (ОКДБ), т.е. по тем хозяйствующим субъектам, которые его создают. Данные представлены в денежных единицах (например, млрд. рублей). Поскольку стоимость единицы такого измерения, например, рубля, с течением времени меняется (в силу инфляции), то приходится публиковать данные как в номинальном выражении (значение на момент составления отчетности), так и в «реальном» выражении, чтобы обеспечить возможность объективных сравнений. Реальное выражение означает, что динамика показателей за ряд лет выражена в ценах одного года, принятого за базовый, например, в ценах

2000 года, или 2003 года, т.е. с поправкой на инфляцию. Аналогично осуществляется расчет и публикация использованного объема ВВП, который распределяется по тем хозяйствующим субъектам, которые его потребляют.

Это делается, например, для публикации данных Федеральной службы государственной статистики (Росстат) в соответствии со Специальным стандартом распространения данных МВФ (ССРД МВФ). *Источник – Росстат ([www.gks.ru](http://www.gks.ru))*. Указанные обстоятельства обеспечивают, с одной стороны, возможность расчета, анализа и сравнений, но, с другой стороны, указывают на те трудности, которые создает применение показателей, выраженных в денежных единицах, для анализа поведения экономических систем. Для международных сравнений приходится также учитывать не только разницу курсов валют, но и различную структуру цен, по сути – различие системы ценностей, сложившихся в разных странах. Это определяется тем, что составляет основное содержание, богатство каждой страны, в частности, что она производит сама, а что должна получать извне. Сравнение ВВП разных стран осуществляется по ППС – паритету покупательной способности.

Связь потоков продуктов в этой сети записана в (5.1) как закон сохранения потоков в узлах на *выходе* отраслей. Это аналогично первому закону Кирхгофа в электрической цепи. Формулы (5.2) и (5.3) похожи на метрические, где элементы метрической матрицы – это коэффициенты прямых затрат для поставок  $a^{ab}$  и ресурсов  $b^{ab}$ . Они аналогичны законам Ома в цепи. Других соотношений в этой задаче обычно не используют. Однако, как можно видеть на рис. 5.2, существует связь между потоками в узлах **входов** отраслей. Эту связь можно записать в виде системы уравнений:

$$X^a = S x^{ab} + S r^{gb} = S a^{ab} X_b + S b^{ab} X_b = (S a^{ab} + S b^{ab}) X_b. \quad (5.7)$$

Потребление ресурсов  $r^{gb}$  и поставок  $x^{ab}$  определяется, следовательно, величиной выпуска  $X_a$ . В формуле (5.7) слева и справа стоит численно один и тот же вектор, поэтому:

$$S a^{ab} + S b^{ab} = 1. \quad (5.8)$$

Физически это означает: для выпуска единицы данного продукта должны быть обеспечены все необходимые поставки и ресурсы – условие очевидное, а потому обычно не используемое. Однако это условие обеспечивает полноту описания потоков в сети и позволяет привести уравнения к тензорному виду. Нетрудно видеть, что отсюда следует равенство суммы спроса сумме потоков ресурсов:  $S r^{gb} = S y_a$ .

### 5.1.2. Тензорная форма уравнений межотраслевого баланса

Покажем, что при условии (5.8) уравнения балансовой задачи приводятся к тензорному виду. Для этого будем считать, что каждая ветвь на рис. 5.2 (отрасли, поставки, ресурсы) – это объект пространства потоков продуктов. Размерность такого пространства равна числу отраслей. Поставки и ресурсы от них линейно зависят, как следует из (5.2) и (5.3). Таким

образом, пространство определяет набор отраслей, а способы их соединения поставками и ресурсами (структура) задают системы координат.

Рассмотрим изменение уравнений и величин в (5.1–5.3) при таком изменении координат, когда ветви-поставки переключаются от одних потребителей или производителей к другим. Заданным вектором является план (спрос)  $y^a$ , который, как показано, определяет через матрицу  $(I - A)$  и выпуски отраслей, и поставки, и необходимые ресурсы. Рассмотрим *преобразование* от одной схемы соединения отраслей к другой, которое оставляет вектор  $y^a$  инвариантом. Пусть есть две разных схемы соединения **1** и **2** одних и тех же  $n$  отраслей. Запишем для них (5.4).

$$y_1^a = (d^{ab} - a_1^{ab})X_{1b}, \quad (5.9)$$

$$y_2^a = (d^{ab} - a_2^{ab})X_{2b}. \quad (5.10)$$

Поскольку  $y_1^a = y_2^a$ , то можно приравнять правые части и выразить векторы валовых выпусков друг через друга:

$$y_1^a = (d^{ab} - a_1^{ab})X_{1b} = (d^{ab} - a_2^{ab})X_{2b}, \quad (5.11)$$

или, обозначая произведение скобок как матрицу преобразования  $C_I^2$ , как это делается для якобиана преобразования координат (см. 2.6), получим, что валовой выпуск преобразуется как ковариантная величина:

$$X_I = C_I^2 X_2, \text{ или } X_{a'} = A_{a'}^a X_a. \quad (5.12)$$

Такие матрицы по своей роли аналогичны матрицам преобразования путей в сети (главы 2 и 3). Однако их строки не перечисляют ветви, которые составляют пути, а столбцы – пути, проходящие через данную ветвь. Структура сети представлена в такой матрице не явно, а как бы в «скомканном» виде, поэтому невозможен анализ связей.

Валовой выпуск, когда он рассматривается как поток продукта, является продольной (контравариантной) величиной. Когда валовой выпуск рассматривается как воздействие, вызывающее поток межотраслевой поставки – он является поперечной (ковариантной) величиной. Валовой выпуск, таким образом, играет двоякую роль: на входе в отрасль это воздействие, (определяет величины поставок), а на выходе – это отклик, поток (результат слияния поставок и ресурсов). В первом случае он входит в уравнение (5.2), а во втором – в (5.1). Если отрасль не потребляет собственную продукцию, то  $a_{aa} = 1$ , а значит валовые выпуски на входе и выходе отрасли численно равны. Однако их связывает соотношение:

$$X^a = a^{aa} X_a = d^{aa} X_a, \quad (5.13)$$

показывающее, что они преобразуются по противоположным законам. Будем считать потоки продуктов (токи) контравариантными компонентами *вектора*, тогда валовой выпуск на **выходе** отрасли обозначим  $X^a$  – это отклик на воздействие плана – спроса  $y^a$ . Валовой



выпуск на **входе** обозначим  $X_a$ ; он воздействует на  $X^b$  других отраслей, которые поставляют ему часть своей продукции, пропорционально значениям коэффициентов прямых затрат, соответствующих метрическому тензору.

В тех случаях, когда в каждой отрасли валовой выпуск на выходе  $X^a$  равен валовому выпуску на входе  $X_a$ , то это означает, что система отраслей работает в стационарном режиме. То есть в каждый момент времени поток финишного продукта (спрос), поставки, потоки ресурсов определены и являются постоянными. При этом метрический тензор является единичным,  $g^{ba} = d^{ba} = I$ , что в геометрии соответствует прямоугольным (декартовым) координатам.

Однако ситуация меняется, когда происходят изменения структуры связей, спроса, ресурсных возможностей, и т.д. В этом случае система отраслей работает в переходном режиме, и тогда  $X_b \neq X^a$ . Тогда метрический тензор принимает более сложный вид, а системы координат в пространстве потоков продуктов становятся криволинейными. За счет искривления пространства система настраивается на стационарный режим. Например, при вычислении суммы ряда (5.6) на каждом этапе вычислений  $m$  имеем, что  $X_b^m \neq X^a_m$ . Действительно, подставим (5.6) в (5.5), тогда получим, что:

$$X_b = d_{ba} y^a + a_{ba} y^a + (a_{ba} y^a)^2 + (a_{ba} y^a)^3 + \dots = X^b_0 + X^b_1 + X^b_2 + X^b_3 + \dots$$

Это означает следующее. Допустим, что первоначально все предприятия стоят, а затем дан старт производству. Тогда отрасли начинают выпускать продукт в объеме заданного спроса (плана):  $X_{a0} = d_{aa} y^a = y^a$ . Однако, для этого им нужны поставки продукции других отраслей в количестве  $x^{ba}_0 = a^{ba} X_{b0} = a^{ba} y^a$ . Тогда выпуск продукта на выходе отраслей возрастет и составит величину:

$$X^b_1 = y^a + a^{ba} y^a = (d^{ba} + a^{ba}) y^a, \quad (5.14)$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование. При вычислении  $(m + 1)$  члена ряда  $X^b_{(m+1)}$  на выходе отрасли уже возрастет до величины:

$$X^b_{(m+1)} = X^b_m + (a^{ba})^{(m+1)} y^a, \quad (5.15)$$

где матрица коэффициентов прямых затрат  $a^{ba}$  возводится в степень  $(m + 1)$ , а воздействие, которым является здесь валовой выпуск на входе,  $X_{bm} = a^{ba} X^b_m$ , остается прежним (поскольку следующий член ряда еще не вычислен). Записывая  $X_{bm}$  через сумму предыдущих  $m$  членов ряда, выразим  $y^a$  и подставим в (5.15). Тогда получим зависимость каждого последующего члена ряда  $X^b_{(m+1)}$  от предыдущего  $X^b_m$ , которая имеет вид:

$$X^a_{m+1} = (d^{ab} + \frac{(a^{ab})^{m+1}}{\sum_{p=0}^m (a^{ab})^p}) X_{bm} \quad (5.16)$$

Сравнивая формулу (5.16) с выражением  $X_b = d_{ba} X^a$  получим, что выражение в скобках – это метрический тензор  $g^{ba}$ . Этот тензор связывает ковариантные и контравариантные компоненты вектора потока продуктов в отраслях – ветвях данной сети. Поскольку  $a^{ba} < 1$ , то при стремлении числа членов ряда  $m$  к бесконечности дробное выражение стремится к нулю и тогда  $g^{ba} = d^{ba}$ . Итак, на каждом шаге вычислений  $g^{ba}$  переходит от сложной кривизны, к нулевой кривизне декартова пространства. Такое изменение кривизны показывает сложность процессов в экономической системе при переходном процессе от равновесия (состояния покоя) к установившемуся режиму, а также при любых изменениях стационарного процесса в системе, в частности, при изменении структуры хозяйственных связей, разделении на независимые подсистемы.

Согласно (5.16), отличны от нуля те компоненты метрического тензора  $g^{ba}$ , которые соответствуют поставкам, связывающим отрасли, т.е.  $a^{ba} \neq 0$ . Эти недиагональные компоненты заданы структурой самой экономической системы. Их отличие от нуля показывает, что процесс установления потоков продуктов происходит в пространстве с кривизной. Крон показал (Kron, 1934), что подобные геометрические аналогии соответствуют переходным процессам в электрических машинах (Петров, 1985).

В (5.12) получена формула преобразования ковариантных компонент вектора  $X_a$ . Теперь получим такую же формулу для его контравариантных компонент  $X^a$ , т.е. определяющих поток продуктов, а не воздействие. Для этого рассмотрим стационарный случай, когда  $g^{ba} = d^{ba}$  и подставим (5.13) в (5.12). Тогда получим при переходе к новой, обозначенной штрихами, системе координат, что:

$$X^{a'} = g^{a'b'} X_{b'} = g^{a'b'} A_{b'}^{b'} X_b = g^{a'b'} A_{b'}^{b'} g_{ba} X^a. \tag{5.17}$$

Учитывая свойство метрического тензора поднимать и опускать индексы, получим отсюда, что матрица преобразования  $X^a$  имеет вид:

$$g^{a'b'} A_{b'}^{b'} g_{ba} = A^{a'b} g_{ba} = A^{a'}_a,$$

следовательно, формула преобразования  $X^a$  принимает вид следующий:

$$X^{a'} = A^{a'}_a X^a. \tag{5.18}$$

Таким образом,  $X^a$  преобразуется с помощью матрицы  $A^{a'}_a = (A_{b'}^{b'})^{-1}$ , т.е. обратной и транспонированной по отношению к матрице преобразования  $X_b$ .

Это показывает, что валовой выпуск подчиняется тензорным законам преобразования координат. Проведя аналогичные рассуждения, получим формулы преобразования для потоков поставок  $x^{ba}$  и ресурсов  $r^{ga}$ :

$$x^{b'a'} = a^{b'a'} X_{a'} = a^{b'a'} A_{a'}^{a'} X_a = a^{b'a'} A_{a'}^{a'} (a^{ab})^{-1} x^{ba}, \tag{5.19}$$

$$r^{g'a'} = b^{g'a'} X_{a'} = b^{g'a'} A_{a'}^{a'} X_a = b^{g'a'} A_{a'}^{a'} (b^{ag})^{-1} r^{ga}. \tag{5.20}$$

Эти формулы преобразования не тензорные, поскольку вместе с матрицей  $A_{a^{\cdot a}}$  в них входят также множителями матрицы  $a^{b^{\cdot a^{\cdot}}}$ ,  $b^{g^{\cdot a^{\cdot}}}$ ,  $(a^{ab})^{-1}$ ,  $(b^{ag})^{-1}$ , которые не только не являются матрицами преобразования, но и, как показывают простые примеры, могут не иметь обратных, т.е. не образуют группы. Например, матрица  $a^{ab}$  может иметь определитель, равный нулю. Тогда обратная к ней матрица не существует.

Отсюда следует, что по изменению структуры связей отраслей, заданному матрицей преобразования и поставками, нельзя определить потоки поставок в новой системе координат. То же самое касается и потоков ресурсов. Отсутствие тензорной формулы преобразования для поставок и ресурсов объяснимо тем, что ни те, ни другие сами не определяют полностью всех потоков продуктов в системе отраслей. Определить потоки продуктов в системе отраслей можно тремя способами:

- задать план-спрос и, решая балансовую задачу (5.1–5.3), получить все валовые выпуски, поставки и ресурсы;
- задать валовые выпуски, тогда по формуле (5.2) найдем поставки, по формуле (5.1) – какой этому соответствует спрос, а по формуле (5.3) ресурсы;
- задать *одновременно* поставки и ресурсы, тогда найдем  $X_a$  из (5.7).

Из третьего способа задания потоков продуктов можно получить формулу преобразования *совокупности* поставок и ресурсов, с учетом (5.8):

$$\begin{aligned} Sx^{b^{\cdot a^{\cdot}}} + Sr^{g^{\cdot a^{\cdot}}} &= S(a^{b^{\cdot a^{\cdot}}} X_{a^{\cdot}}) + S(b^{g^{\cdot a^{\cdot}}} X_{a^{\cdot}}) = \\ &= (S a^{b^{\cdot a^{\cdot}}} + S b^{g^{\cdot a^{\cdot}}}) X_{a^{\cdot}} = X_{a^{\cdot}} = A_{a^{\cdot a}} X_a = A_{a^{\cdot a}} (Sx^{ba} + Sr^{ga}), \end{aligned} \quad (5.21)$$

откуда ясно, что сумма поставок и ресурсов преобразуется тензорно, т.е. с помощью только матрицы  $A_{a^{\cdot a}}$ . При этом используется (5.8), которое не требуется в других методах, а здесь необходимо для приведения к тензорному виду уравнений потоков продуктов в экономической системе. Таким образом, соотношения (5.12), (5.18) и (5.21) показывают, что потоки продуктов приведены к тензорному виду.

### 5.1.3. Сетевая модель межотраслевого баланса

Сетевая модель потоков продуктов в системе отраслей, поставок и ресурсов описана в работах автора (Петров, 1984, 1985, 2002, 2004). Алгоритм расчета межотраслевого баланса по частям (при разделении сети на подсети), и его программная реализация представлены в работе по применению тензорного метода расчета сложных систем к задаче балансового планирования (Петров, 1984). Алгоритм и программные средства экспериментально проверены. Сетевая модель также генерирует пропорции финансовых воздействий.

Для того чтобы представить потоки продуктов сетевой моделью, используем аналогии между электрическими и экономическими величинами. В экономической и электрической сети потоки составлены из воздействий и откликов, связанных метрикой, характеризующей среду. Инерционное сопротивление материальной среды устанавливает пропорции между воздействием и откликом. Вопрос в том, что есть воздействие, а что – отклик. В сети два типа воздействий – контурные, заданные источниками ЭДС и узловые, заданные источниками тока. Они по-разному, ковариантными и контравариантными компонентами, определяют вектор в пространстве сети (преобразования рассмотрены в главах 2 и 3).

В экономике одно воздействие – спрос (план), определяемый потребностями. Кажется, что можно выбрать любую величину в сети, чтобы представлять поток продуктов. Однако это не так. Дело в том, что электрическая сеть – это техническая система, а сеть производств – экономическая. Первая только рассеивает потоки энергии, вторая – не только рассеивает, но и накапливает. Вместе с тем двойственный набор понятий в сети (а также ее технический аналог – электрическая цепь) обеспечивает представление понятий экономической системы.

План-спрос будем представлять в модели как вектор потока разомкнутых путей – воздействующий узловой ток, а потоки в отраслях, поставки и ресурсы – как отклики. Казалось бы, можно для представления использовать двойственный источник воздействия в замкнутых путях – источник напряжения. В двойственном смысле эти величины равноправны. Однако дело в том, что разомкнутые пути обеспечивают представление экономики как открытой системы. Спрос формируется вне рассматриваемой системы. Ресурсы также поступают извне, причем некоторые ресурсы могут представлять поставки со стороны тех отраслей, которые не вошли в рассматриваемую систему отраслей. Это обеспечивает определенную свободу в отношении выбора, – какие отрасли включать в конкретную сетевую модель, а какие считать «внешней средой». Связь открытой системы с внешней средой обеспечивают разомкнутые пути, и соответствующие им источники воздействия, формирующие потоки в сети.

При использовании сетевых аналогий необходимо учесть разницу между техникой и экономикой. Отличие токов и потоков продуктов выражено теоремой Волавера (см. главу 3)

о не усилении мощности при изменении соединений в электрической цепи. Согласно этой теореме, токи, которые являются откликами в электрической цепи, *не превышают* воздействия (по рассеиваемой ими мощности). В сетевой модели потоков продуктов отклики – валовые выпуски отраслей, *должны превышать* заданный спрос (план), поскольку обеспечивают также поставки другим отраслям, как показано в соотношении (5.1).

Понятие поставок между людьми, частями производства, отраслями, регионами отражает суть разделения труда в процессе производства, представляя один из механизмов создания прибавочной стоимости. Поставки создают структуру производства. Сама прибавочная стоимость есть экономическое выражение физической сути биологического процесса извлечения из потока солнечной энергии дополнительной энергии, превышающей затраты на извлечение. Вообще говоря, все живое получает энергии больше, чем затрачивает на получение. Это обеспечивает возможность роста и размножения живых организмов. Передача энергии в разных формах ее накопления происходит между видами за счет того, что одни питаются другими, а в начале цепочки стоит процесс фотосинтеза зеленой массы из энергии солнечного луча.

Поставки обеспечивают создание искусственных предметов, которые становятся продуктами (товарами и услугами), и при этом не разрушаются, как при поедании, а усложняются в процессе производства конечного продукта, который идет на рынок потребления. Стоимость продуктов обеспечивает эквивалентный обмен промежуточными продуктами и конечными продуктами.

Таким образом, несмотря на внешнее сходство, потоки в сетевой модели и потоки продуктов отраслей принципиально отличаются друг от друга.

Чтобы представить поток продукта потоком в сети, воспользуемся двойственностью потоков в замкнутых и разомкнутых путях в сети. Эти потоки вызваны двойственными источниками воздействия, которые не зависят друг от друга. Отклики на них дополняют друг друга, поэтому их можно использовать для создания суммарных потоков в сети, соответствующих потокам продуктов. Для этого будем так задавать двойственные компоненты вектора воздействий (в данном случае – в замкнутых путях), чтобы отклики от них последовательно, шаг за шагом, дополняли отклики в разомкнутых путях до величин, соответствующих потокам продуктов в каждой ветви сетевой модели. То есть в ветвях, соответствующих отраслям, поставкам и ресурсам.

В терминах электротехники будем задавать источники напряжения так, чтобы отклики-токи на них дополняли отклики-токи на источники тока до таких величин, которые равны потокам продуктов. Рассмотрим условия, при которых это можно сделать полно и однозначно, где должны располагаться дополнительные источники и какие иметь значения.

Решение этих вопросов позволит получить формулы, которые выражают величины потоков продуктов через величины сети, что и составит саму модель задачи баланса.

Допустим, что сначала заданы только узловые токи (представляющие спрос  $y^a$ ), обозначим их как  $I^a$ . Эти токи заданы на ветвях отраслей. В качестве проводимостей ветвей  $Y^{ab}$  примем коэффициенты прямых затрат  $a^{ab}$  для поставок и  $b^{gb}$  для ресурсов. Если отрасли не потребляют свою продукцию, то их  $Y^{aa} = a^{aa} = I$ . Решая полученную сеть тензорным (или традиционным) методом, получим отклики – узловые токи в ветвях  $I_c^a$ . Величинам откликов в ветвях *отраслей, поставок и ресурсов* добавим индексы, и обозначим, соответственно, как  $I_{ca}^a, I_{cq}^a, I_{cr}^a$ . Пример такой сети для трех отраслей представлен на рисунке 5.3. Индекс  $\alpha$  перечисляет ветви данной сети: сначала отрасли от 1 до  $n$ , затем поставки от  $n + 1$  до  $n + q$ , затем ресурсы от  $n + q + 1$  до  $N = n + q + r$ , где  $N$  – полное число ветвей.

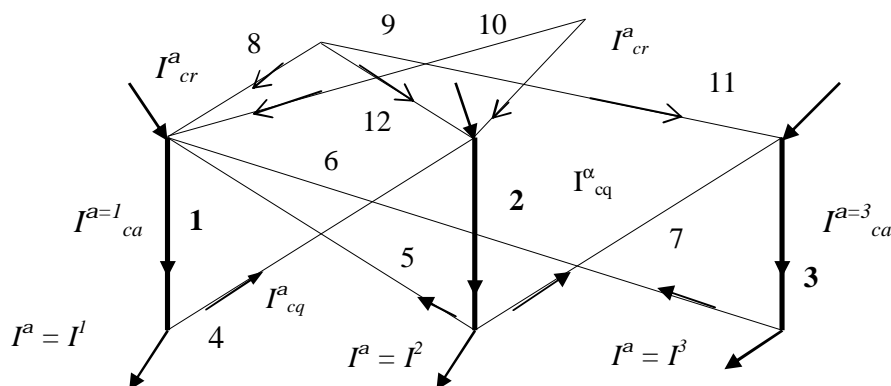


Рис. 5.3. Модель сети потоков продуктов с узловыми воздействиями

Стрелки на выходе отраслей (их ветви выделены жирным) показывают, что спрос задан именно в этой отрасли. Здесь ветви 1 – 3 представляют отрасли; 4 – 7 – поставки, ветви 8 – 12 представляют ресурсы. Не показаны проводимости ветвей  $Y^{ab}$  – коэффициенты  $a^{ab}$  и  $b^{gb}$ , чтобы не загромождать рисунок. Ориентация ветвей выбрана здесь так, что она соответствует направлениям, в которых *должны двигаться* потоки продуктов.

Однако реальные токи в такой сети не только не равны потокам продуктов, но и не совпадают с ними по заданным направлениям. Дело в том, что мощность уменьшается при соединении ветвей в сеть (в силу теоремы Волавера), а разность «переходит» в двойственную сеть. Поэтому отклики в ветвях отраслей не могут вырасти до величин, равных сумме заданного плана и поставок. Закон Кирхгофа для токов в узлах выхода отраслей соблюдается, но он не соответствует балансу потоков продуктов. Т.е. в данной сети с токами воздействия в разомкнутых путях баланс токов на выходе отраслей имеет вид:

$$I^a = I_{ca}^a + S I_{cq}^a;$$

и это означает, что воздействующий ток (спрос) равен сумме валового выпуска и поставок. А в задаче баланса потоки продуктов на выходе отраслей имеют другое отношение

$$I_{ca}^a = I^a + S I_{cq}^a$$

– валовой выпуск равен сумме спроса и поставок. Таким образом, прямой аналогии между токами и продуктами нет, хотя структура их соединений одинакова. Чтобы привести токи к продуктам, используем двойственность замкнутых и разомкнутых воздействий. Для этого предположим, что источники напряжения расположены в сети так, что отклики дополняют узловые токи до таких значений, какие должны иметь потоки продуктов.

Где и как надо расположить источники напряжения, чтобы они обеспечили выполнение этих условий? Общее число узлов  $J = 2n + k$ , где  $k$  показывает, сколько в данной системе есть разных типов ресурсов. На рис. 5.3 представлены два типа ресурсов,  $k = 2$ . Это могут быть материальные и энергетические ресурсы, как на рис. 5.2. Чтобы с помощью воздействий получать любые значения откликов в ветвях сети, надо задать столько источников, сколько есть *независимых* путей данного типа. Они составят базис, в котором можно задать вектор потока с любыми необходимыми значениями откликов в ветвях сети. На рис. 5.4. представлены примеры сетевых моделей из трех отраслей, которые снабжаются одним или двумя видами ресурсов соответственно.

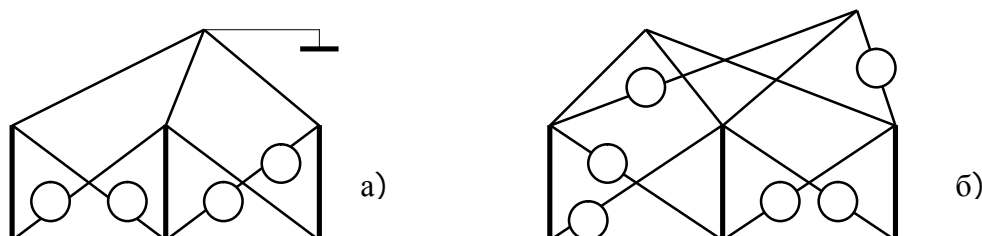


Рис. 5.4. Сетевые схемы моделей потоков продуктов

а) – с одним типом ресурсов, б) – с двумя типами ресурсов

Всего ветвей в данной сети  $N = n + q + r$ . Если каждую отрасль снабжает ресурс одного типа, то  $r = n$ , тогда  $N = 2n + q$ . Из структуры сетей на рисунке 5.4.а ясно, что все такие ветви выходят из одного узла (заземленного на окружающую среду).

Тогда общее число узлов в сети составит  $J = 2n + 1$ , а число независимых *разомкнутых* путей равно:  $j = J - 1 = 2n$ , т.е. сумме ветвей отраслей и ресурсов. Число независимых контуров:  $m = N - j = q$ , т.е. равно числу ветвей поставок. Если в поставках расположить источники напряжения  $e_{a_i}^q$ , как показано кружками на рис. 5.4.а, то можно подобрать их значения так, что отклики в ветвях сети будут иметь любые заданные значения. Например, допустим, что заданы источники напряжения в замкнутых путях, определяемых ветвями поставок,  $e_{a_i}^q$ , такие, что отклики-токи на них в ветвях, т.е.  $i_c^a$ , примут те значения, которые

нам необходимы. То есть такие значения, которые дополняют токи отклика в ветвях  $I^a_c$  (от источников тока  $I^a$ ) до любой заданной или необходимой величины.

Если типов ресурсов больше одного,  $k > 1$ , как на рис. 5.4.б, то ветвей ресурсов  $r$  станет больше, чем отраслей:  $r > n$ . Тогда число узлов увеличится только на число новых типов ресурсов, т.е. первой ветви нового ресурса соответствует разомкнутый путь, а всем следующим – контуры. Для полноты определения откликов, в эти новые контуры следует поместить свои источники напряжения; это и показано кружками на рис. 5.4.б. Итак, число узлов  $J = 2n + k$ , а независимых разомкнутых путей  $j = J - 1 = 2n + k - 1$ , т.е. не равно сумме числа ветвей отраслей и ресурсов, как для одного типа ресурса.

Процесс дополнения узловых токов контурными токами для того, чтобы представить этой комбинацией токов сети потоки продуктов, выполним за несколько итераций. Сначала допустим, что источники  $e_a^1$  таковы, что отклики  $i^a_1$ , (по отраслям, поставкам, ресурсам –  $i^a_{n1}$ ,  $i^a_{m1}$ ,  $i^a_{r1}$ ), вместе с откликами на  $I^a$  составят величины, равные начальным значениям потоков продуктов при вычислении суммы ряда (5.6), т.е. будут соответствовать его первому члену. Получим формулы представления потоков продуктов токами на *первом* этапе:

$$\begin{aligned} X^a_1 &= I^a_n + i^a_{n1} = y^a + x^{ab}_1 = y^a; \\ x^{ab}_1 &= I^a_m + i^a_{m1} = 0; \\ r^{ga}_1 &= I^a_r + i^a_{r1} = y^a. \end{aligned} \quad (5.22)$$

То есть, на этом этапе отрасли производят столько, чтобы удовлетворить спрос и потребляют необходимые для этого ресурсы, не обмениваясь взаимными поставками. С точки зрения экономики, это соответствует ремесленным производствам, когда каждый производитель сам производит товар от сырья до прилавка.

Теперь допустим, что источники  $e_a^2$  таковы, что отклики на них,  $i^a_2$ , (по отраслям, поставкам, ресурсам –  $i^a_{n2}$ ,  $i^a_{m2}$ ,  $i^a_{r2}$ ), вместе с откликами на источники  $I^a$  и откликами на источники  $e_a^1$ , составят величины, равные значениям потоков продуктов при вычислении второго члена суммы ряда (5.6). Получим формулы для выражения потоков продуктов токами на *втором* этапе:

$$\begin{aligned} X^a_2 &= I^a_n + i^a_{n1} + i^a_{n2} = y^a + S x^{ab}_2 = y^a + S a_{ab} y^b; \\ x^{ab}_2 &= I^a_m + i^a_{m1} + i^a_{m2} = x^{ab}_1 + a_{ab} X^a_1 = a_{ab} y^b; \\ r^{ga}_2 &= I^a_r + i^a_{r1} + i^a_{r2} = y^a + S a_{ab} y^b - S a_{ba} y^a = b_{ga} y^a + S a_{ab} y^b. \end{aligned} \quad (5.23)$$

При этом значения ресурсов  $r^{ga}_2$  связаны с  $X^a_2$  и  $x^{ab}_2$  соотношениями (5.7), выражающими закон Кирхгофа для узлов входа отраслей. Покажем, что этот закон выполняется в узлах входов отраслей при выборе источников напряжения, которые дают



приращения токов в ресурсах, как в (5.23) и с учетом соотношения (5.8), связывающего коэффициенты  $b_{ga}$  и  $a_{ab}$ .

$$\begin{aligned} X_2^a &= S x_2^{ba} + r_2^{ga} = S a_{ba} y^a + b_{ga} y^a + S a_{ab} y^b = \\ &= \cancel{S a_{ba} y^a} + y^a - \cancel{S a_{ba} y^a} + S a_{ab} y^b = y^a + S a_{ab} y^b = X_2^a. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Таким образом, выбирая значения источников, можно привести комбинацию контурных и узловых токов в сети в соответствие величинам потоков продуктов в системе отраслей. То есть, *сетевая модель адекватно представляет задачу межотраслевого баланса*. Представить потоки продуктов только узловыми токами нельзя в силу теоремы о неусилении мощности при соединении ветвей в сети. В отраслях потоки продуктов (валовой выпуск) должны превышать спрос, поскольку необходимо еще обеспечивать поставки отраслям-смежникам. А отклики в ветвях (в том числе представляющие валовой выпуск) не могут превышать по мощности источники тока (представляющие спрос). Но нельзя представить потоки продуктов и одними контурными токами, которые не выходят из сети. Для представления продуктов в модели необходимо использовать сумму, комбинацию двойственных контурных и узловых токов.

Продолжим выбирать значения источников так, чтобы они обеспечили в ветвях на каждом этапе такую сумму узловых и контурных токов, которая равна потокам продуктов в сети отраслей при решении балансовой задачи. Тогда получим для  $p$ -ого этапа расчета следующие двойственные отклики (токи) замкнутых и разомкнутых путей, которые численно равны потокам продуктов. В совокупности они представляют компоненты, из которых состоят потоки продуктов в ветвях сети. Для валовых в ветвях отраслей выпусков отраслей получим:

$$X_p^a = I_n^a + \sum_{m=1}^{m=p} i_{nm}^a = \sum_{m=1}^{m=p-1} (a_{ab})^m y^b = y^a + a_{ab} y^b + (a_{ab})^2 y^b + \dots + (a_{ab})^{p-1} y^b, \quad (5.25)$$

в ветвях поставок между отраслями:

$$x_p^{ab} = I_m^a + \sum_{m=1}^{m=p} i_{mm}^a = \sum_{m=1}^{m=p-1} (a_{ab})^m y^b \quad (5.26)$$

в ветвях ресурсов, потребляемых отраслями:

$$r_p^{ga} = I_r^a + \sum_{m=1}^{m=p} i_{rm}^a = b_{ga} (y^a + \sum_{m=0}^{m=p-1} (a_{ab})^m y^b) \quad (5.27)$$

Эти суммы независимых, двойственных контурных и узловых токов, численно равны потокам продуктов в отраслях, поставках и ресурсах, получаемым при вычислении  $p$  членов ряда (5.6) (при обращении экономической матрицы). Уравнения (5.25–5.27) представляют потоки продуктов в системе отраслей (производств), как комбинацию токов (или контравариантных компонент вектора потока) в сетевой модели задачи баланса. Для расчета

по частям сеть делится на подсистемы, решения которых затем алгоритмически соединяют в решение всей системы. Такой алгоритм обеспечивает многократное снижение объема вычислений, ускоряя плановые расчеты (Петров, 1985, 1998).

#### 5.1.4. Расчет межотраслевого баланса по частям

Представление потоков продуктов величинами сети позволяет построить алгоритм расчета балансовой задачи по частям, что сокращает время расчета и допускает организацию параллельных вычислений. Для программной реализации алгоритм расчета по частям можно построить двумя путями – сложным и простым. Сложный путь требует больше аналитических построений и значительных объемов вычислений, превышающих, как правило, те, которые требуются в традиционном способе расчета межотраслевого баланса. Зато он дает не только значения потоков продуктов, но и значения напряжений, которые должны соответствовать пропорциям финансовых воздействий (оборотных средств, инвестиций). Простой путь обеспечивает снижение объемов вычислений по сравнению с традиционным способом расчета межотраслевого баланса, однако он дает только значения потоков продуктов. Суть сложного и простого алгоритмов состоит в следующем:

- *Сложный путь.* Разделить сетевую модель на произвольные подсети. Произвести расчет подсетей по частям сетевым методом, используя из раздела 3.4 формулу (3.125) для расчета матрицы решения  $Z_c^2$  для базиса разомкнутых путей (начальное приближение) и формулу (3.122) для расчета матрицы решения базиса  $Y_c^2$  замкнутых путей для расчета взаимодействий подсетей. Либо применять соответствующие формулы расчета компонент векторов потока.
- *Простой путь.* Разделить сеть на подсети, рассчитать каждую из них, как обычную задачу баланса – обращая матрицу  $(I - A)$  или вычисляя сумму ряда (5.6), а затем соединить решения подсетей, используя сетевое представление.

В первом случае получим все значения каждой величины, причем не только токов, но и напряжений, т.е. как контравариантные, так и ковариантные компоненты вектора потока. Однако для выполнения таких расчетов потребуется использовать матрицы преобразования порядка  $(n + m + r) \times m$  и  $(n + m + r) \times (n + r)$ . То есть, размерность задачи вырастает далеко за пределы числа отраслей  $n$ , что увеличит время расчета. Это существенно для задач, в которые входит несколько сотен, или тысяч, или десятков тысяч переменных. Кроме того, поскольку потоки продуктов представлены как комбинации контурных и узловых токов, надо рассчитать узловую задачу сети, а затем многократно – контурную задачу сети.

Во втором случае получим только значения потоков продуктов, не разделенные на контурную и узловую компоненты сети. Однако при этом размерность задачи не превысит

числа отраслей, как в случае расчета полной задачи, так и при ее расчете по частям. Это позволит решить саму задачу межотраслевого баланса при меньшем объеме вычислений.

Второй путь более приемлем по объемам вычислений для решения задачи межотраслевого баланса. Алгоритм такой схемы блочного расчета матрицы  $(I - A)$ , к которому приводится метод расчета эквивалентной сети баланса продуктов по частям, представленный автором в работе (Петров, 1985) состоит в следующем:

1. Разделение на подсети.
2. Нулевой цикл расчета подсетей – отрасли производят только финишные продукты.
3. Расчет подсетей.
4. Получение взаимного воздействия подсетей друг на друга.
5. Расчет подсетей с найденными взаимными воздействиями (пункт 3).
6. Получение новых взаимных воздействий (пункт 4).
7. Проверка на достижение заданной точности решения.

Время обращения матрицы пропорционально кубической степени ее размера (точнее растет в степени 2,73), поэтому размеры подсетей выбираем примерно одинаковыми, поскольку время расчета подсетей определяется временем обращения наибольшей по размеру матрицы. Итак, матрицу  $(I - A)$  полной системы разделяем на соответствующие подсистемы, блоки-подсети так, чтобы матрицы не только подсетей, но и сети пересечений были примерно одного размера. Это можно сделать до расчета обратных матриц, (до выполнения наибольшего объема вычислений). Можно показать, что разделение модели на подсети приводит к выделению блоков вдоль главной диагонали, а все элементы, не попавшие в эти блоки, составляют отдельную матрицу – эквивалент сети пересечений. В такую матрицу попадают:

- все ненулевые элементы, не попавшие в блоки вдоль диагонали;
- все нулевые элементы строк и столбцов этих элементов, которые пересекаются строками или столбцами других ненулевых элементов;
- все элементы на главной диагонали на пересечении строк или столбцов ненулевых элементов, не попавших в диагональные блоки. Например:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		-0,1			-0,2		
2	-0,3	0,9	-0,2					
3			0,8					
4				0,9				
5			-0,3		1		-0,1	
6						0,9		
7	-0,1						0,8	
8								1

	1	3	5	6	7
1	1			-0,2	
3		0,8			
5		-0,3	1		-0,1
6				0,9	
7	-0,1				0,8

Двойными линиями выделены блочные матрицы подсистем, а справа показана матрица связывающей подсистемы (аналог сети пересечений). Матрица  $(I - A)$  разделяется на блоки-

подматрицы вдоль главной диагонали. Эти подматрицы соответствуют подсетям, у которых удалены ветви-поставки, связывающие их с другими подсетями.

Для расчета и анализа сетевой модели межотраслевого баланса общую структуру связей можно записать в виде, представленном на рис. 5.5, где показаны обозначения основных величин потоков в данной сети: выпуски отраслей, потоки межотраслевых поставок и потоки ресурсов. Ресурсы здесь показаны двух типов. Например, это могут быть потоки энергии и потоки материалов. Реально ресурсов больше – например, должна рассматриваться также рабочая сила, потоки инвестиций, новых технологий и т.д. Более того, каждая отрасль может быть выведена из данной системы, и рассматриваться как отдельный ресурс. Таким образом, рассматриваемая сетевая модель является открытой, в том смысле, что можно добавлять отрасли, в том числе, за счет ресурсов.

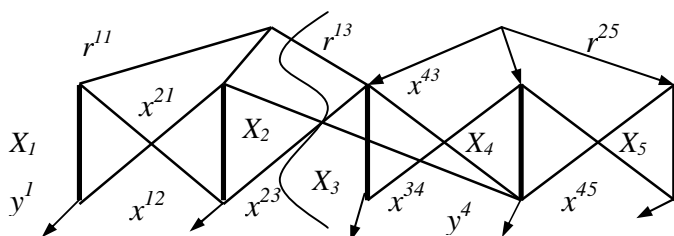


Рис. 5.5. Потоки в сетевой структуре межотраслевого баланса для 5 отраслей

В качестве примера рассмотрим следующую матрицу  $(I - A)$  данных отраслей с заданными произвольно коэффициентами прямых затрат. В этой матрице выделены подматрицы, соответствующие двум подсистемам, которые на рис. 5.5 разделены кривой линией. Вне выделенных матриц подсистем остались в данном случае два элемента, соответствующие двум ветвям-поставкам, которые оказались «разорванными» при разделении на подсистемы. Они и составят основу матрицы сети пересечений.

	1	2	3	4	5
1	1-0,1	-0,15			
2	-0,2	1-0,2	-0,06		
3			1-0,1	-0,1	
4		-0,24	-0,08	1-0,3	-0,17
5				-0,12	1-0,1

Для расчета по частям сетевая модель делится на части, в соответствии с выделением матриц подсистем (см. рис. 5.5) в экономической матрице  $(I - A)$ . Пример разделения на подсети в соответствии с кривой линией, которая проведена на рис. 5.5, и экономических матриц для полученных при разделении подсистем, представлен на рис. 5.6. Матрица подсети соединений обозначена  $(I - A)_3$ .

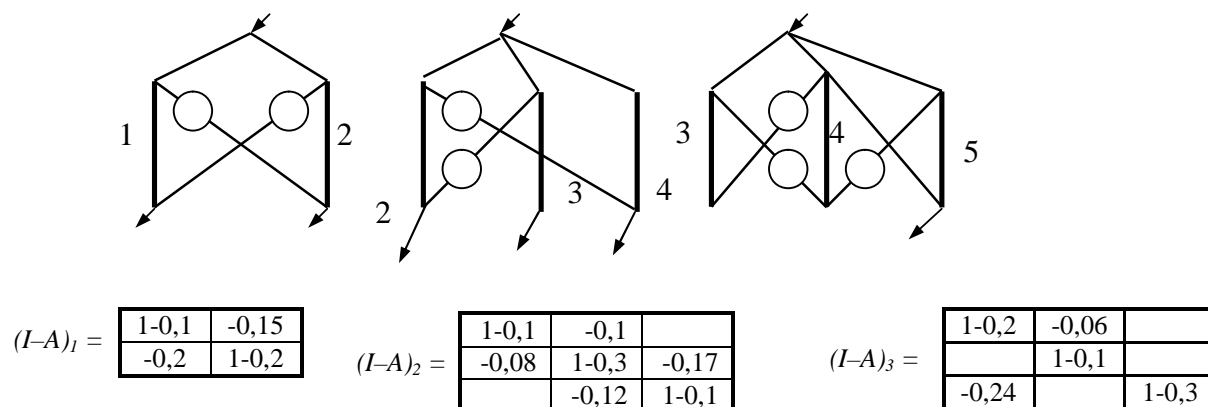


Рис. 5.6. Разделение сетевой модели баланса на подсети, матрицы подсетей

Вычислительные эксперименты с моделью межотраслевого баланса были выполнены в начале 80-тых годов на ЭВМ ЕС 1045. Было осуществлено около 600 расчетов для разных размерностей и вариантов разделения на подсистемы. Проводился анализ зависимости времени расчета от размерности системы и количества и размерности подсистем. Было показано, что время расчета сокращается в 2-4 раза для задач порядка 150-200 отраслей (технологических процессов). При экстраполяции на задачи в 1000-4000 отраслей (порядок задач Госплана) это давало сокращение времени расчета в 10—40 раз. На рис. 5.7 показан пример того, как изменяется время расчета межотраслевого баланса, как целого, так и по частям, в зависимости от того, на сколько подсистем разделена исходная система отраслей. Т.е. задана система отраслей, с матрицей коэффициентов прямых затрат, а строится график зависимости времени расчета полной системы от количества подсетей.

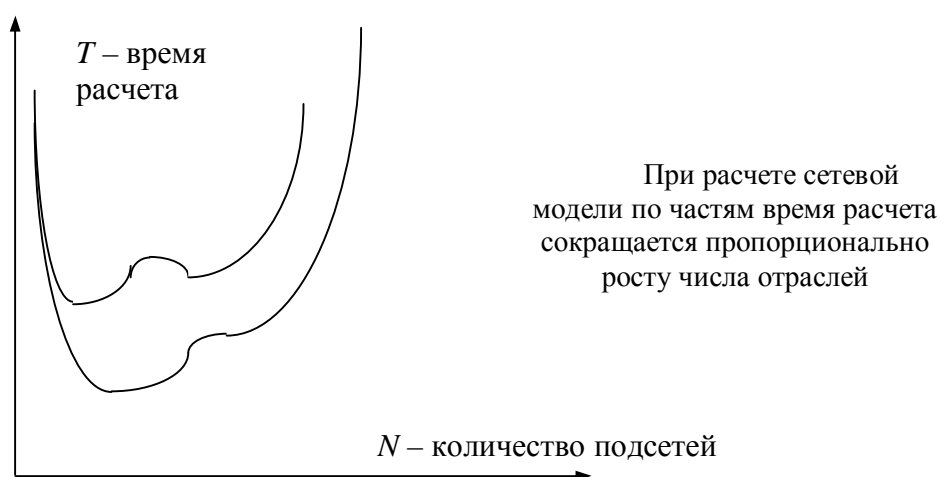


Рис. 5.7. Пример изменения времени расчета межотраслевого баланса в зависимости от количества (размера) подсистем сетевой модели

С точки зрения сетевой модели расчет потоков продуктов как компонент векторов контуров и разомкнутых путей (или параметров электрической цепи) состоит из следующих этапов:

1. Выбор размера подсетей (подсистем), при котором размерность сети пересечений (удаленных отраслей) минимальна. Матрица  $(I - A)$  – ее норма меньше единицы – обращается путем вычисления суммы ряда (5.6). Плохая сходимость этого ряда требует выполнения больших объемов вычислений и затрат времени, что не обеспечивает в режиме реального времени (или близкого к реальному) расчет плана, т.е. какие выпуски, поставки и ресурсы обеспечат спрос. Тем более, для расчета различных вариантов плана: при изменении структуры производств, вариантов поставки ресурсов, вариантов взаимодействия отраслей, и т.д.
2. Декомпозиция, разделение сети на подсети. Подсети могут быть произвольного размера. Подсети связаны между собой через компоненты двойственного вектора, значения которых рассчитываются в процессе вычислений. В терминах электротехники в модели двойственные компоненты представлены как источники ЭДС в каждой подсети, которые зависят от значений откликов на источники тока в других подсетях.
3. Расчет независимых подсетей, получение решений для вектора разомкнутых путей, заданные компоненты которого определяют спрос (план).
4. Расчет взаимных воздействий, которые вызваны компонентами двойственного вектора замкнутых путей, источниками напряжения. Эти показатели соответствуют финансовым потокам денежных средств.
5. Расчет сетей с источниками напряжения.
6. Расчет взаимных воздействий подсетей друг на друга и расчет подсетей с новыми полученными источниками напряжения.
7. Расчет новых воздействий в подсетях за счет увеличения значений источников напряжения.
8. Повторение этапов 5–7 до тех пор, пока разность между новыми приращениями и старыми не станет меньше наперед заданной точности вычислений.

Сетевой алгоритм расчета задачи баланса по частям также приводит к вычислению суммы ряда, аналогичного (5.6), но члены этого ряда состоят из матриц блочно-диагонального вида. Это значительно сокращает время расчета, причем выигрыш времени оказывается тем больше, чем больше размерность самой задачи (за счет того, что время расчета находится в кубической зависимости от размерности подсистем). Алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Разделение сети на подсети. Выделяются и удаляются ветви поставок до тех пор, пока не окажется, что заданная сеть разделена на независимые подсети.
2. Расчет сетей с возможным использованием параллельных компьютеров.
3. Расчет взаимодействия сетей, вызванного наличием двойственных источников напряжения.
4. Расчет сетей с новыми источниками воздействия. Получение новых, дополнительных решений, также на параллельных компьютерах.
5. Получение новых дополнений и переход к этапу 3.
6. Повторение этапов 3–5 до достижения заданной точности расчета.

Расчет сетевой модели в общем виде требует больших объемов вычислений, но результатом является расчет, как баланса продуктов, так и материально-финансового баланса. Для решения задачи баланса продуктов алгоритм расчета сетевой модели трансформируется в алгоритм расчета матрицы, обратной к экономической матрице, следующим образом:

1. Выделяются блоки вдоль диагонали экономической матрицы такого размера, который соответствует выбранному размеру подсистемы. Эти блоки обращаются независимо друг от друга последовательно, или с применением параллельных вычислений.
2. Все ненулевые элементы вне выбранных блоков образуют сеть пересечений. Из этих элементов выбираем все элементы их строк и столбцов вместе с расположенными на главной диагонали элементами. Полученная матрица соответствует сети разорванных при декомпозиции ветвей поставок, а также отраслям, которые связывают эти поставки.
3. Полученные решения – валовые выпуски подсистем – рассматриваются как воздействие-спрос на отрасли сети пересечений. Производится расчет сети пересечений при таких воздействиях. Получаются отклики-выпуски отраслей сети пересечений. Приращения этих выпусков, по сравнению с теми, которые заданы со стороны подсистем, играют роль дополнительных воздействий. Эти воздействия сама сеть пересечений оказывает на подсистемы в ответ на воздействия с их стороны.
4. Производим расчет подсистем при новых воздействиях. Полученные результаты играют роль новых дополнительных воздействий на сеть пересечений. Повторяем этот вычислительный процесс до тех пор, пока получаемые приращения не станут меньше наперед заданного порога точности расчета. Полученный результат является решением задачи межотраслевого баланса производства продуктов.

Этот итерационный процесс сходится, а при разделении сетевой модели на части производится расчет относительно небольших подсистем, что повышает эффективность и решение требует меньшего объема вычислений, чем при прямом обращении экономической

матрицы. Результатом расчета экономической матрицы являются объемы валовых выпусков, поставок и ресурсов, которые представляют собой решение задачи межотраслевого баланса, но без определения пропорций распределения потоков денежных средств, как получается при расчете сетевой модели данной задачи.

Автор показал (*Петров, 1984*), что реализация алгоритма, использующего матрицу сети пересечений (элементов вне диагональных блоков), уменьшает объемы вычислений. Для повышения эффективности расчетов возможно совместное применение других численных методов снижения объемов вычислений, например, разреженных матриц.

Вместе с тем данный алгоритм отличается от известных алгоритмов, предназначенных для уменьшения объема вычислений, типа разреженных матриц. Здесь производится меньше перемножений ненулевых элементов в матрицах подсистем. Перемножаются только элементы в матрице сети пересечений и матрицах подсистем. Программная реализация алгоритма применялась на ряде предприятий в 80-ые годы для расчетов вариантов состояния производства в зависимости от изменения хозяйственных связей.

#### **5.1.5. Двойственность потоков продуктов и потоков денежных средств**

В ветвях сетевой модели есть как воздействия (источники тока и напряжения), так и отклики на эти воздействия (потоки энергии по каждой ветви, представленные соответственно напряжениями и токами). При построении сетевой модели и расчете межотраслевого баланса потоки продуктов представлены только комбинацией токов (откликов на источники двух видов). Напряжения (ковариантные компоненты вектора) не используются. В самой постановке задачи баланса нет таких величин, которым могли бы по физической сути соответствовать напряжения. Получается, что сетевая модель сама генерирует некие величины, которые предоставляют новую информацию, не заданную в исходной постановке задачи.

Вместе с тем в экономической науке известна двойственность потоков денежных средств и потоков продуктов (товаров и услуг). Логично предположить, что напряжения в сетевой модели, которые возникают при построении и расчете потоков продуктов, соответствуют пропорциям в распределении финансовых воздействий, потоков денежных средств, обеспечивающих процесс производства. Тогда получится, что сеть одномерных ветвей моделирует сеть токов, представляющих потоки продуктов, а двойственная  $(n - 1)$  мерная сеть эквипотенциальных поверхностей (по определению Крона) моделирует финансовые потоки. Речь здесь может идти только о пропорциях, поскольку сама величина денежных потоков определяется с точностью до выбора валютного курса. Например, с точностью до определения (назначения) количества золота (или нефти, или электроэнергии), которым эквивалентен один рубль.



Дело в том, что потенциал в электротехнике играет точно такую же роль. Само значение потенциала в точке нельзя определить. Его можно определить только как разность значений между двумя точками («поперечная» величина, как отмечалось в главе 1). Эта разность и называется напряжением. В сети потенциал одного узла назначают равным нулю (как правило, его называют «заземление», потенциал земли, т.е. достаточно большой массы). Переходя от одной ветви к другой, получают потенциалы остальных узлов как разность между очередным узлом и заземлением. Это возможно сделать однозначно потому, что в связанной сети узлов на единицу больше, чем ветвей, как показано в разделе 2.1.

Таким образом, в сетевой модели межотраслевого баланса токи могут представлять продукты, а напряжения могут представлять пропорции в распределении денежных средств.

Итак, целесообразно рассматривать напряжения, которые играют роль воздействий, вызывающих токи, как аналоги, пропорции финансовых воздействий, потоков денежных средств в экономике, которые играют там как раз такую роль воздействий, мотиваций к действиям, как напряжения в электрической сети. При этом следует отметить, что существует, по крайней мере, три различных типа напряжений в сети. Это разность потенциалов на источнике напряжения; разность потенциалов на ветвях, вызванная источниками напряжения; разность потенциалов на каждой ветви, вызванная действием источников тока.

Каждый вид такой разности потенциалов можно сопоставить с разными видами финансов (денежных потоков), связанных с кредитованием производства, поставок (товарные кредиты), и с потоками денежных средств в наличной и безналичной форме, направленными на оплату товаров, услуг, и т.д. Эта сеть напряжений соответствует сети финансового сектора в экономической системе.

При моделировании экономической системы технической системой пришлось учитывать различие заложенных в них механизмов протекающих процессов. Оказалось, что двойственные сети обеспечивают адекватное сопоставление этих разнородных процессов.

Как известно, электромагнитное поле имеет магнитную и электрическую составляющие. Они составляют единое целое, но отличаются по структуре своих потоков. Силовые линии магнитного потока всегда замкнутые и не имеют начала и конца, поскольку магнитных зарядов не обнаружено. Электрическое поле начинается и заканчивается на электрических зарядах.

Эта физическая картина электромагнитного поля имеет аналогии в экономике. Потоки товаров и услуг начинаются и заканчиваются на окружающей среде. Поток солнечной энергии обеспечивает добычу энергетических и материальных ресурсов и на этой основе производство товаров и услуг. Пройдя цикл в системе (сети) производства и потребления,

потоки продуктов завершают свой путь в виде отходов, которые «потребляет» природная среда. В этом отношении материальные и энергетические потоки ведут себя аналогично потокам электрического поля. Потоки денежных средств в экономической системе играют роль воздействий и двигаются навстречу потокам продуктов (товаров и услуг). Потоки денежных средств являются замкнутыми в самой экономической системе; они не имеют выхода в природную среду, которая, как известно, производит энергетические и материальные ресурсы не за деньги. В этом отношении потоки денежных средств аналогичны магнитным потокам, которые всегда замкнуты.

Существует различие в результатах воздействия узлового тока, который порождает токи-отклики в ветвях цепи, и спроса (плана), который порождает отклики в виде потоков выпусков отраслей, поставок в другие отрасли и ресурсов. Спрос вызывает выпуск продукта, значение которого больше значения самого спроса. Узловой ток вызывает токи отклика, значения которых не превышают его значений (в соответствии с теоремой Волавера о неусилении мощности при наложении на цепь связей). Это происходит потому, что электрическая цепь рассеивает происходящие через нее потоки энергии, но не накапливает. Рассеивание происходит, например, в виде потерь тепла на нагревание проводников тока.

Экономическая система накапливает потоки энергии, расходуемые на потребление, обеспечение спроса. Это выражается в том, что энергия, получаемая в распоряжение общества, человека, из природы, оказывается больше, чем энергия, затраченная на ее получение. Происходит такое усиление благодаря тому, что через человека, общество, любую биологическую систему проходят потоки энергии разных видов, в основе которых поток солнечной энергии. Задача жизни – получить из этого потока энергии больше, чем затратить.

Таким образом, поток энергии, мощность, в системе производства возрастает. Механизм увеличения потока энергии при производстве продуктов в сетевой модели представлен двойственностью потоков в замкнутых путях и разомкнутых путях. Следовательно, двойственность позволяет связать представление живой системы (хозяйства, связанных отраслей) с помощью неживой системы (сети связанных ветвей с воздействиями и откликами). Более того, можно предположить, что двойственность сетей, замкнутых и разомкнутых путей в сетях, с инвариантом сохранения потока энергии (мощности), лежит в основе самого механизма функционирования живых систем.

В сетевой модели системы производства потоки продуктов (товаров и услуг) выражаются комбинацией ковариантных и контравариантных компонент вектора потока. Т.е. здесь устанавливается взаимодействие подпространств замкнутых путей и разомкнутых путей, которые физически и математически являются независимыми.

С точки зрения физики такому представлению потоков продуктов соответствуют комбинации контурных и узловых токов в электрической цепи, которые возбуждаются источниками напряжения и тока соответственно. Происходит двойственное дополнение токов как источников в отраслях и ресурсах источниками напряжения в поставках. Токи (контравариантные компоненты вектора) представляют потоки продуктов. Напряжения (ковариантные компоненты вектора) представляют потоки денежных средств, финансовых воздействий в системе производства. Следует отметить, что есть два типа токов и два типа напряжений. Это соответствует четырем типам ковариантных и контравариантных компонент вектора, которые рассматривались в главе 2.

Источники тока действуют в разомкнутых путях и порождают отклики напряжения на каждой ветви. В каждой ветви также протекает ток, пропорциональный этому напряжению. Источники напряжения, двойственно дополняющие источники тока для моделирования потоков продуктов, действуют в замкнутых путях и порождают отклики токи в каждой ветви. В каждой ветви также возникает напряжение (разность потенциалов), которое пропорционально этому протекающему току. Таким образом, два типа токов отклика представляют потоки продуктов. Два типа напряжения могут представлять потоки денежных средств. Кроме того, есть еще источники напряжения в контурах, которые связаны с поставками и ресурсами, и эти источники играют свою роль в представлении денежных потоков.

Контравариантные токи – потоки продуктов и ковариантные напряжения – финансовые потоки в двойственной конструкции сети составляют единое целое. Они описывают процесс прохождения солнечной энергии через хозяйственную систему производств. В результате получается механизм отображения в математических понятиях исторического закона увеличения потока энергии на каждого человека. Но это отображение потребовало другой математики. А именно геометрии двойственных сетей, которая одновременно отображает процессы и структуру, т.е. соединяет в одном аппарате структуру и метрику. Преобразования в этой геометрии имеют инвариантом метрический тензор двойственных сетей, который соответствует закону сохранения потока энергии.

Применение сетевой модели для анализа влияния социальных групп на безопасность страны определяется путем анализа состояния и динамики изменения потоков потребления в каждой социальной группе, а также динамики изменения пропорций между группами:

- соотношением между потоками производства и потребления в каждой группе,
- доли потоков, потребляемых на человека в каждой группе в ВВП,
- соотношением между потоком потребления и прожиточным минимумом,

- соотношением между существующим потоком потребления и максимальным потоком, т.е. доступным группе из 10% граждан с наибольшим доходом.

Метод сетевого анализа обеспечивает расширение сетевой модели производства, которая соединяет взаимодействующие потоки продуктов и потоки денежных средств, путем дополнения сети производства сетью потребления. Распределение потоков произведенных продуктов в сети потребления по социальным группам позволяет определить степень их соответствия существующим нормам потребления (уровень выживания по прожиточному минимуму, который существенно различается для различных регионов). Далее такой подход обеспечивает сравнение уровней потребления на соответствие существующим идеалам и ценностям социальных групп (уровень развития). Тогда из анализа отличия потоков потребления, с учетом их доли в общем распределяемом продукте (выраженном как в энергетических единицах, так и в денежных единицах), можно определить «потенциалы социального напряжения» в обществе между отдельными подсистемами.

Такие потенциалы социального напряжения возникают как между отдельными сетями распределения, представляющими социальные группы, так и между каждой группой и государством. Величина потенциала, динамика его изменения определяют уровень, степень поддержки каждой группой проводимой экономической, внутренней политики государства, либо степень противодействия (потенциального или явного). Анализ динамики изменения данных показателей в условиях различных вариантов проводимой экономической и социальной политики позволяет сформулировать подход к измерению показателя социальной стабильности в обществе, который является одной из характеристик способности общества к устойчивому развитию.

### 5.1.6. Примеры расчета сетевой модели баланса продуктов

**Расчет по частям.** В качестве примера исходных данных для задачи межотраслевого баланса, в таблице по данным Федеральной службы государственной статистики (Росстат) представлен номинальный объем произведенного ВВП по видам экономической деятельности (ОКВЭД), по кварталам 2005-2008 гг. в текущих ценах. Порядок публикации определен Специальным стандартом распространения данных МВФ (ССРД МВФ).

Таблица 5.1 Номинальный объем произведенного ВВП по кварталам  
- в структуре видов экономической деятельности по ОКВЭД  
в текущих ценах, млрд. рублей

		2005		2006				2007				2008	
		3 квартал	4 квартал	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал	1 квартал	2 квартал
Раздел А	Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство	466,3	224,8	108,2	172,4	490,9	265,6	127,3	202,8	599,1	346,7	171,3	290,0
Раздел В	Рыболовство, рыбоводство	16,6	17,2	18,5	21,4	20,9	19,0	17,4	16,7	19,1	19,5	20,0	22,0
Раздел С	Добыча полезных ископаемых	597,8	573,3	469,5	662,7	678,8	621,6	555,3	691,1	797,3	909,1	827,3	957,4
Раздел D	Обрабатывающие производства	944,9	928,1	935,6	1 086,0	1 166,8	1 248,8	1 085,8	1 332,0	1 405,4	1 564,3	1 432,9	1 754,7
Раздел E	Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	122,8	189,7	237,9	164,8	146,5	223,9	249,6	189,4	188,7	258,6	305,1	223,4
Раздел F	Строительство	302,9	322,0	193,6	300,0	400,4	462,1	254,8	377,3	475,3	563,6	397,2	552,9
Раздел G	Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования	898,8	1 099,8	960,7	1 047,1	1 156,4	1 332,1	1 223,4	1 372,7	1 509,8	1 735,0	1 614,6	1 836,4
Раздел H	Гостиницы и рестораны	46,5	48,8	42,1	53,2	58,4	62,9	51,4	61,8	68,8	74,9	66,7	79,4
Раздел I	Транспорт и связь	509,9	535,4	457,0	530,8	614,8	655,9	543,1	653,3	739,0	734,2	664,1	819,5
Раздел J	Финансовая деятельность	190,2	222,8	217,9	232,6	259,9	275,6	290,9	317,1	345,3	394,7	390,1	411,4
Раздел K	Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг	473,7	554,4	459,5	521,4	585,7	700,1	596,5	694,2	731,8	914,4	750,7	858,8
Раздел L	Государственное управление и обеспечение военной безопасности; обязательное социальное обеспечение	242,2	246,1	299,5	305,3	309,5	313,4	361,5	368,8	376,4	388,8	480,7	453,2
Раздел M	Образование	126,7	130,1	155,4	156,2	165,1	169,0	189,0	189,9	201,7	209,6	236,5	248,9
Раздел N	Здравоохранение и предоставление социальных услуг	152,5	151,6	172,0	184,4	195,7	194,1	224,2	238,2	250,3	256,1	286,9	308,1
Раздел O	Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг	84,6	100,6	96,4	110,2	115,3	137,9	120,1	134,8	133,3	160,2	154,1	170,7
	Косвенно измеряемые услуги финансового посредничества	-111,5	-142,9	-120,2	-128,3	-146,4	-156,4	-159,9	-178,2	-196,1	-238,2	-233,0	-261,6
	Итого добавленная стоимость по видам экономической деятельности (в основных ценах)	5 064,9	5 201,9	4 703,3	5 420,1	6 218,8	6 525,5	5 730,2	6 661,9	7 645,2	8 291,4	7 565,1	8 725,3
	Чистые налоги на продукты	806,9	894,3	958,5	905,7	1 029,2	1 019,9	1 017,8	1 087,2	1 181,5	1 372,3	1 273,0	1 549,4
	Валовой внутренний продукт (в рыночных ценах)	5 871,7	6 096,2	5 661,8	6 325,8	7 248,1	7 545,4	6 747,9	7 749,1	8 826,6	9 663,7	8 838,1	10 274,7

Дата последнего размещения данных – 09.09.2008 г.

Выберем из данной таблицы 6 отраслей и зададим для примера возможные связи между ними. Отметим, что при столь незначительном уровне детализации, практически все отрасли связаны между собой. В задачах, где рассматриваются десятки и сотни, а тем более, тысячи отраслей (предприятий), экономическая матрица весьма слабо заполнена ненулевыми

элементами, т.е. немногие отрасли связаны между собой. В качестве источника ресурсов будем рассматривать добычу полезных ископаемых. Эти отрасли и связи между ними представлены на рис. 5.8.

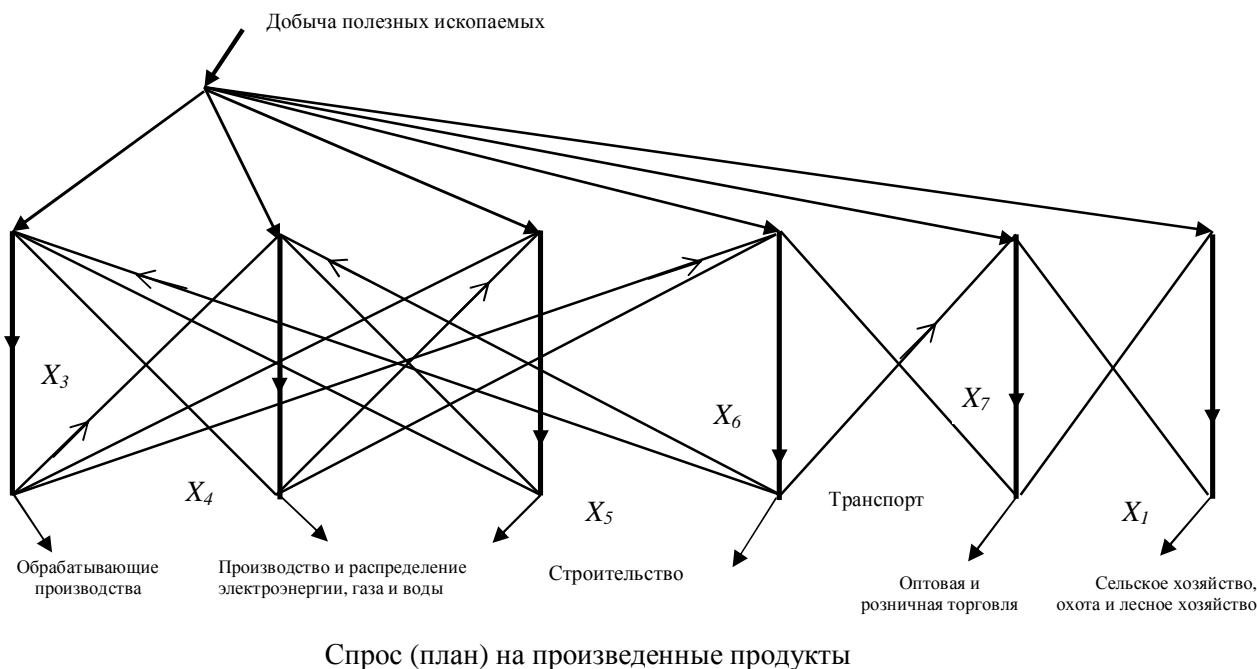


Рис. 5.8. Структура сети потоков продуктов в отраслях

Примерные значения воздействий, т.е. конечного продукта (спроса) на продукцию этих отраслей зададим из таблицы ВВП в соответствии со вторым кварталом 2005 года.

$$y_a = \begin{matrix} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ \hline & 700 & 130 & 250 & 800 & 400 & 150 \end{matrix} \quad (5.28)$$

Матрицу коэффициентов прямых затрат (экономическая матрица) для данного примера  $(I - A)$  зададим для примера (модели) следующими значениями:

$$(I - A) = \begin{matrix} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ \hline 3 & 1 & -0,2 & -0,1 & -0,1 & 0 & 0 \\ 4 & -0,1 & 1 & -0,2 & -0,2 & 0 & 0 \\ 5 & -0,1 & -0,1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -0,1 & -0,1 & 0 & 1 & -0,1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & 1 & -0,1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & 1 \end{matrix} \quad (5.29)$$

Единицы на главной диагонали данной матрицы означают, что собственное потребление отраслей отсутствует. Для прямого расчета этой задачи, т.е. для получения значений выпусков отраслей, которые обеспечивают спрос, поставки, а также значений потребляемых ресурсов, необходимо решить уравнение (5.1). Для этого надо обратить матрицу в уравнении (5.5). Матрица коэффициентов полных затрат (обратная матрица коэффициентов прямых затрат) для данного примера  $(I - A)^{-1}$  имеет вид:

$$(I - A)^{-1} = \begin{matrix} 3 & \begin{matrix} 1,055333 & 0,242181 & 0,15397 & 0,157177 & 0,016038 & 0,001604 \end{matrix} \\ 4 & \begin{matrix} 0,154428 & 1,077558 & 0,230954 & 0,235766 & 0,024058 & 0,002406 \end{matrix} \\ 5 & \begin{matrix} 0,120976 & 0,131974 & 1,038492 & 0,039294 & 0,00401 & 0,000401 \end{matrix} \\ 6 & \begin{matrix} 0,123496 & 0,134723 & 0,039294 & 1,060946 & 0,10826 & 0,010826 \end{matrix} \\ 7 & \begin{matrix} 0,025203 & 0,027495 & 0,008019 & 0,21652 & 1,042502 & 0,10425 \end{matrix} \\ 1 & \begin{matrix} 0,005041 & 0,005499 & 0,001604 & 0,043304 & 0,2085 & 1,02085 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.30)$$

Отсюда, по уравнению (5.5), получим значения валовых выпусков отраслей, что и составляет основную часть решения данной задачи для полной сети.

$$X_b = (I - a_{ab})^{-1} y_a = \begin{matrix} 3 & \begin{matrix} 700 \end{matrix} & 3 & \begin{matrix} 941,1067 \end{matrix} \\ 4 & \begin{matrix} 130 \end{matrix} & 4 & \begin{matrix} 504,5171 \end{matrix} \\ 5 & \begin{matrix} 250 \end{matrix} & 5 & \begin{matrix} 394,5624 \end{matrix} \\ 6 & \begin{matrix} 800 \end{matrix} & 6 & \begin{matrix} 1007,47 \end{matrix} \\ 7 & \begin{matrix} 400 \end{matrix} & 7 & \begin{matrix} 629,0755 \end{matrix} \\ 1 & \begin{matrix} 150 \end{matrix} & 1 & \begin{matrix} 275,8151 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.31)$$

Далее следует получить значения потоков поставок по (5.2), потоков ресурсов по (5.3). Эти потоки откликов можно подставить на схему соединения отраслей. Затем следует убедиться, что в узлах на входе и выходе отраслей выполняется баланс потоков. Это означает, что сумма входящих и выходящих потоков, включая спрос (конечный продукт) в каждом узле равна нулю, как в законе Кирхгофа для электрических токов, что и подтверждает правильность решения задачи.

В данном случае возможны другие формы постановки задачи. Например, заданы предельные значения возможных поставок ресурсов. Надо определить оптимальный по стоимости, или по заданным значениям набор потоков финишных продуктов. Или, заданы предельные возможности производственных мощностей. Необходимо найти максимальный объем производства при неограниченных ресурсах.

Рассчитаем данную сеть по частям, используя второй вариант алгоритма, рассмотренный в разделе 5.1.4. Матрицу  $(I - A)$  полной системы разделяем на блоки-подсети так, чтобы матрицы не только подсетей, но и сети пересечений были примерно одного размера. Для этого разделим сеть на две подсети по три отрасли в каждой, а также получим связывающую их сеть соединения (пересечений). Разделение модели на подсети приводит к выделению блоков вдоль главной диагонали (которые обозначим 1, 2, ..., s), а все элементы, не попавшие в эти блоки, составляют основу отдельной матрицы, которая соответствует сети пересечений. Для разделения на подсети проведем «разрез» между отраслями 5 и 6. Этому соответствует выделение в матрице полной системы двух блоков вдоль главной диагонали. Эти блоки в матрице, которую обозначим  $(I - A)_s$  выделены двойными линиями:

$$(I - A)_s =$$

	3	4	5	6	7	1
3	1	-0,2	-0,1			
4	-0,1	1	-0,2			
5	-0,1	-0,1	1			
6				1	-0,1	0
7				-0,2	1	-0,1
1				0	-0,2	1

Первая подсистема состоит из трех отраслей: 3 (обрабатывающие производства), 4 (производство и распределение электроэнергии, газа и воды) и 5 (строительство), связанных между собой соответствующими поставками. Она представлена на рис. 5.9. Показаны коэффициенты прямых затрат поставок из матрицы (5.32), а коэффициенты для ресурсов получены из соотношения (5.8) для входа отраслей.

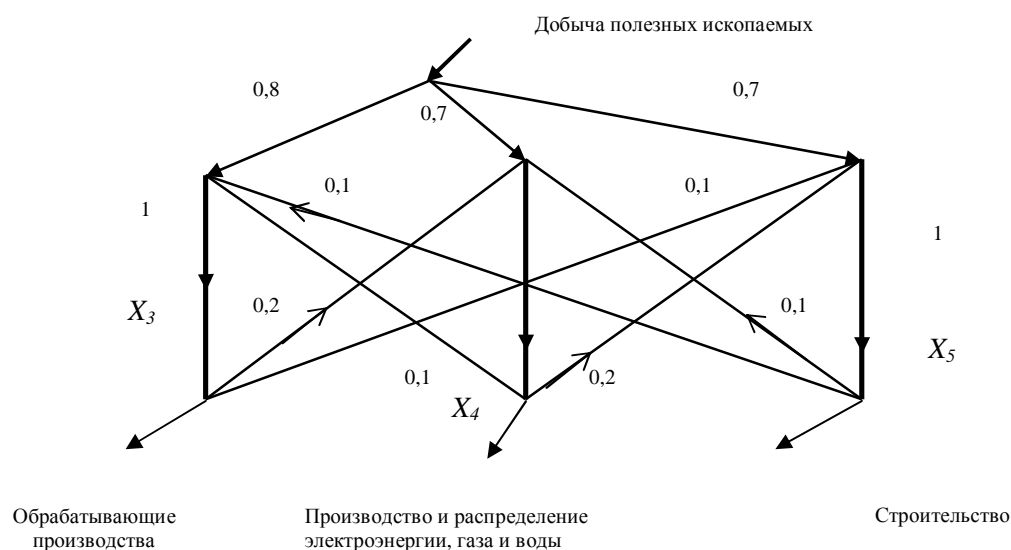


Рис. 5.9. Подсистема 1 из трех отраслей 3, 4, 5

Матрицу коэффициентов прямых затрат для подсистемы (подсети) 1 обозначим  $(I - A)_1$ . Она получается как диагональная подматрица верхней части матрицы полной сети:

$$(I - A)_1 =$$

	3	4	5
3	1	-0,2	-0,1
4	-0,1	1	-0,2
5	-0,1	-0,1	1

(5.32)

Решение подсистемы можно получить по тем же формулам, что и решение полной сети. Для этого надо обратить соответствующую матрицу в уравнении (5.5). Матрица коэффициентов полных затрат подсети 1  $(I - A)_1^{-1}$  имеет вид:

$$(I - A)_1^{-1} =$$

	3	4	5
3	1,037037	0,222222	0,148148
4	0,126984	1,047619	0,222222
5	0,116402	0,126984	1,037037

(5.33)



Отсюда, по уравнению (5.5), получим значения валовых выпусков отраслей, что и составляет решение задачи для подсети 1.

$$X^I_b = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1,037037 & 0,222222 & 0,148148 \\ \hline 4 & 0,126984 & 1,047619 & 0,222222 \\ \hline 5 & 0,116402 & 0,126984 & 1,037037 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 700 \\ \hline 130 \\ \hline 250 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 791,8519 \\ \hline 4 & 280,6349 \\ \hline 5 & 357,2487 \\ \hline \end{array} \quad (5.34)$$

Вторая подсистема состоит из других трех отраслей 6 (транспорт), 7 (оптовая и розничная торговля) и 1 (сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство), связанных между собой соответствующими поставками, представлена на рис. 5.10.

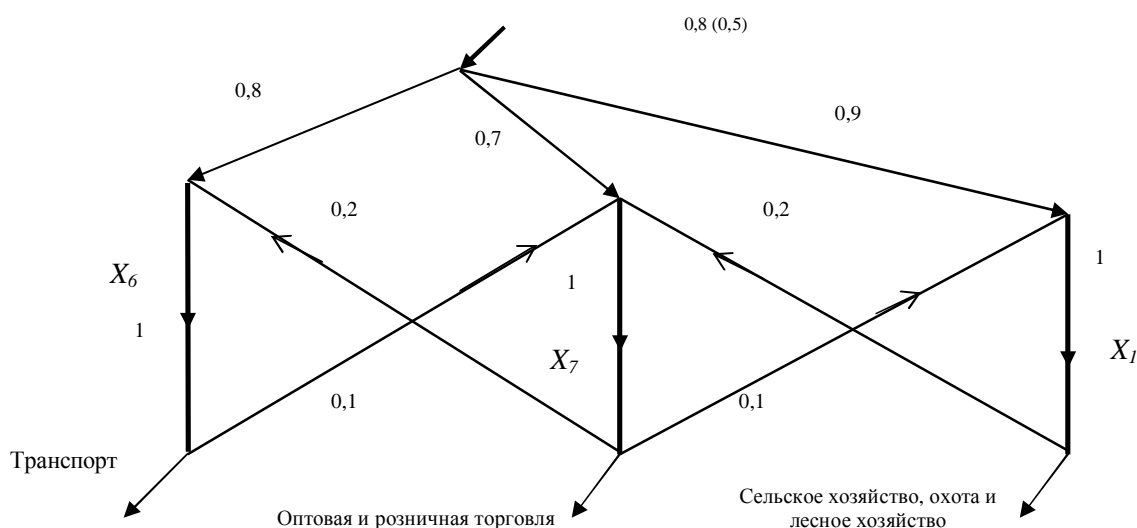


Рис. 5.10. Подсистема 2 из трех отраслей 6, 7, 1

Матрицу коэффициентов прямых затрат для подсистемы (подсети) 2 обозначим  $(I - A)_2$ . Далее не будем указывать скользящие индексы, которые перечисляют ветви (отрасли), чтобы не загромождать формулы. Она получается как диагональная подматрица нижней части матрицы полной сети:

$$(I - A)_2 = \begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 1 & -0,1 & 0 \\ \hline 7 & -0,2 & 1 & -0,1 \\ \hline 1 & 0 & -0,2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Подсистему рассчитываем по тем же формулам, что полную сеть. Для этого надо обратить соответствующую матрицу в уравнении (5.5), в данном случае, для подсети 2. Матрица коэффициентов полных затрат подсети 2, которая обозначена  $(I - A)_2^{-1}$ , будет иметь вид:

$$(I - A)_2^{-1} = \begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 1,020833 & 0,104167 & 0,010417 \\ \hline 7 & 0,208333 & 1,041667 & 0,104167 \\ \hline 1 & 0,041667 & 0,208333 & 1,020833 \\ \hline \end{array} \quad (5.35)$$

Отсюда получим значения валовых выпусков отраслей, т.е. решение подсети 2.

$$X_b^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,020833 & 0,104167 & 0,010417 \\ 0,208333 & 1,041667 & 0,104167 \\ 0,041667 & 0,208333 & 1,020833 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 800 \\ 400 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 859,8958 \\ 598,9583 \\ 269,7917 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.36)$$

**Сеть пересечений.** Элементы матрицы  $(I - A)$  полной системы, не попавшие в блоки-подсети, становятся основой матрицы сети пересечений, которую обозначим  $(I - A)_p$ . В такую матрицу попадают, в соответствии с разделом 5.1.4:

- все ненулевые элементы, не попавшие в блоки вдоль диагонали;
- все нулевые элементы строк и столбцов этих элементов, которые пересекаются строками или столбцами других ненулевых элементов;
- все элементы на главной диагонали на пересечении строк или столбцов ненулевых элементов, не попавших в диагональные блоки.

Тогда матрица сети пересечений  $(I - A)_p$  примет следующий вид, включая в себя соответствующие элементы из экономической матрицы полной сети:

$$(I - A)_p = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,1 \\ 0 & 1 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.37)$$

Этому соответствует структура сети пересечений, представленная на рис. 5.11.

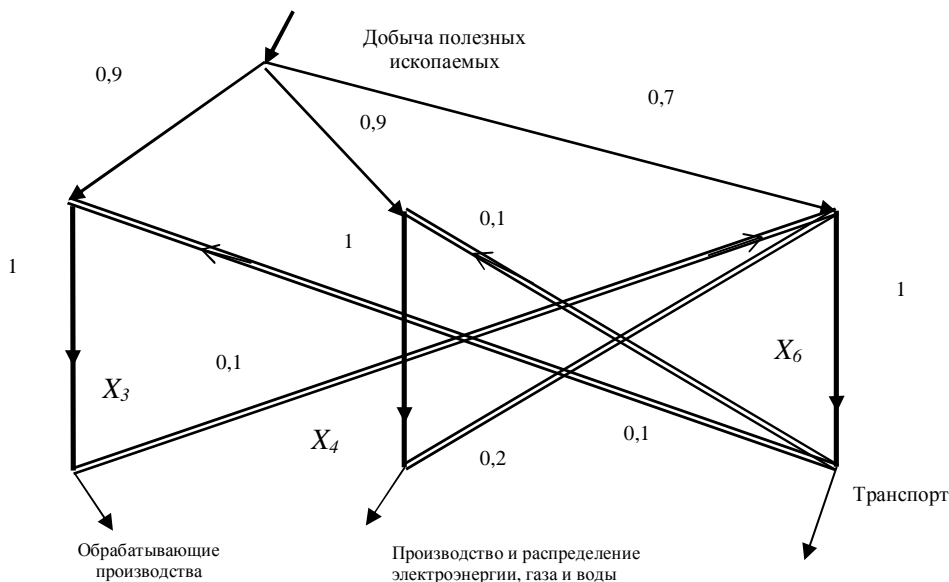


Рис. 5.11. Основой сети пересечений являются разорванные ветви поставок (показаны двойными линиями)

Решение сети пересечений можно получить по тем же формулам, что и решение полной сети, однако теперь воздействиями будут отклики-выпуски в соответствующих

отраслях подсетей. Физически это означает, что на поставки разорванных ветвей должны оказывать воздействие возросшие выпуски отраслей в подсетях. Значения этих выпусков были получены выше при расчете независимых подсетей. Для их преобразования в вектор источников воздействия в сети пересечений следовало бы использовать, в соответствии с тензорным методом двойственных сетей, матрицу преобразования от подсетей к сети пересечений. Также, аналогично, соответствующая матрица преобразования должна использоваться при переходе от полной сети к подсетям. Здесь мы для простоты ограничились выбором элементов из экономической матрицы в соответствии с той структурой подсетей, которая возникает в процессе декомпозиции.

Матрица коэффициентов полных затрат сети пересечений, или подсети  $p$ ,  $(I - A)_p^{-1}$ :

$$(I - A)_p^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{1,010309} & \boxed{0,010309} & \boxed{0,103093} \\ \boxed{0,020619} & \boxed{1,020619} & \boxed{0,206186} \\ \boxed{0,103093} & \boxed{0,103093} & \boxed{1,030928} \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.38)$$

Отсюда получим значения выпусков отраслей, т.е. решение задачи для подсети  $p$ , используя в качестве воздействия (конечного продукта) соответствующие выпуски отраслей, полученные при расчете подсетей. Вектор выпусков отдельных подсетей, которые связаны с сетью пересечений, обозначим  $y^p = X_p^{s=1,2} = X_p^s$ . Верхние и нижние индексы в данном обозначении – это не ковариантность и контравариантность, а указание, что подсети  $s$  воздействуют на сеть пересечений  $p$ .

$${}^1X^p = (I - A)_p^{-1} y^p = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{1,010309} & \boxed{0,010309} & \boxed{0,103093} \\ \boxed{0,020619} & \boxed{1,020619} & \boxed{0,206186} \\ \boxed{0,103093} & \boxed{0,103093} & \boxed{1,030928} \end{matrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \boxed{791,85} \\ \boxed{280,63} \\ \boxed{859,9} \end{matrix} = \begin{matrix} 3 & \boxed{891,556} \\ 4 & \boxed{480,042} \\ 6 & \boxed{997,0598} \end{matrix} \quad (5.39)$$

Следующий этап – построение обратных воздействий со стороны сети пересечений на подсистемы. Это воздействие формируется как разность между полученными выпусками отраслей сети пересечений и выпусками в независимых подсетях, которые здесь играли роль воздействий. Обозначим обратное воздействие на первом этапе расчета (индексы указывают, что сеть пересечений  $p$  воздействует на подсети  $s$ ) как  ${}^1y_s^p = {}^1X^p - y^p = {}^1X^p - X_p^s$ . Получим:

$${}^1y_s^p = \begin{matrix} 3 & \boxed{891,556} \\ 4 & \boxed{480,042} \\ 6 & \boxed{997,0598} \end{matrix} - \begin{matrix} 3 & \boxed{791,85} \\ 4 & \boxed{280,63} \\ 6 & \boxed{859,9} \end{matrix} = \begin{matrix} 3 & \boxed{99,71} \\ 4 & \boxed{199,41} \\ 6 & \boxed{137,16} \end{matrix} \quad \begin{matrix} {}^1y_1^p \\ {}^1y_2^p \end{matrix} \quad (5.40)$$

Здесь индекс слева от буквы указывает номер этапа расчета. В данном случае первый этап расчета обозначает единица. Отсюда берем соответствующие значения обратных воздействий сети пересечений на каждую из подсистем, и проводим расчет подсетей на

втором этапе. Это даст дополнительные выпуски, поставки и ресурсы, которые учитывают первое влияние подсетей друг на друга, и соответствуют вычислению второго члена степенного ряда в (5.6).

**Расчет воздействия сети пересечений на подсети.**

Подсеть 1. По уравнению (5.34), но с воздействиями из (5.40), получим значения дополнительных выпусков отраслей для подсети 1.

$${}^1X^1 = (I - A)_1^{-1} {}^1y^p_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,037037 & 0,222222 & 0,148148 \\ 0,126984 & 1,047619 & 0,222222 \\ 0,116402 & 0,126984 & 1,037037 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 99,71 \\ 199,41 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 147,7163 \\ 221,5673 \\ 36,92836 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Подсеть 2. По уравнению (5.36), но с воздействиями из (5.40), получим значения дополнительных выпусков отраслей для подсети 2.

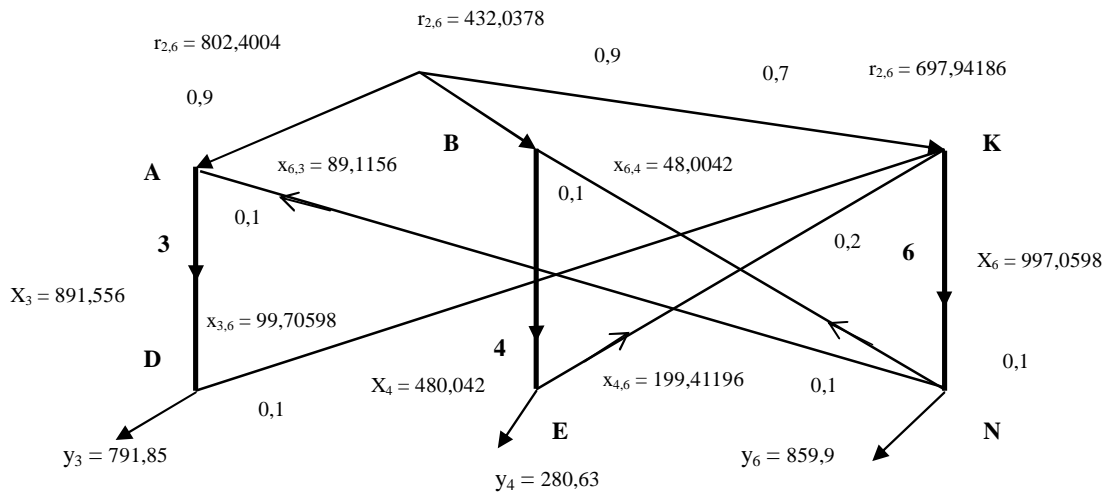
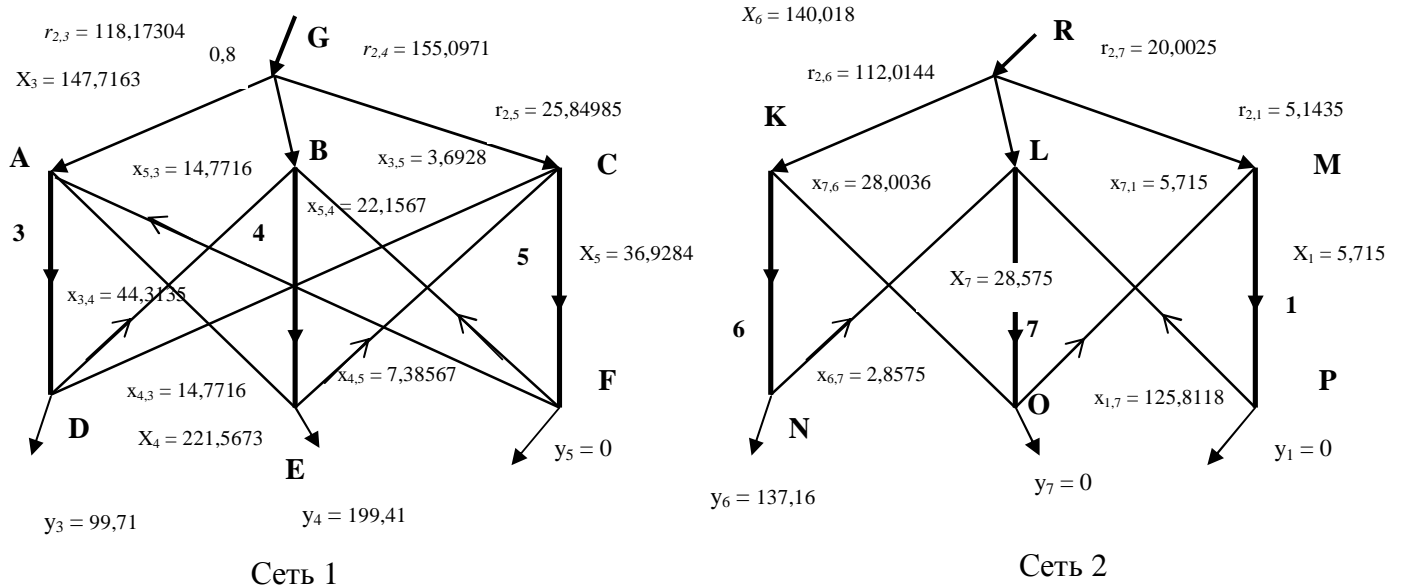
$${}^1X^2 = (I - A)_2^{-1} {}^1y^p_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,020833 & 0,104167 & 0,010417 \\ 0,208333 & 1,041667 & 0,104167 \\ 0,041667 & 0,208333 & 1,020833 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 137,16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 140,018 \\ 28,575 \\ 5,715 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Полученные значения прибавляются к выпускам отраслей, полученным на первом этапе расчета. Тогда получим значения валовых выпусков в отраслях  ${}^1X_b$  на этапе 1.

$${}^1X_b = X_b + {}^1X^{1,2}_b = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_b \end{matrix} & & \begin{matrix} {}^1X^{1,2}_b \end{matrix} & & \begin{matrix} {}^1X_b \end{matrix} & & \begin{matrix} X_b \end{matrix} & & \begin{matrix} {}^1d \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 791,8519 \\ 280,6349 \\ 357,2487 \\ 859,8958 \\ 598,9583 \\ 269,7917 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 147,7163 \\ 221,5673 \\ 36,92836 \\ 140,018 \\ 28,575 \\ 5,715 \end{bmatrix} & = & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 939,5682 \\ 502,2022 \\ 394,1771 \\ 999,9138 \\ 627,5333 \\ 275,5067 \end{bmatrix} & - & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 941,1067 \\ 504,5171 \\ 394,5624 \\ 1007,47 \\ 629,0755 \\ 275,8151 \end{bmatrix} & = & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1,5385 \\ -2,3149 \\ -0,3853 \\ -7,5562 \\ -1,5422 \\ -0,3084 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

В правых столбцах показано точное значение выпусков отраслей  $X_b$ , полученное в (5.31) при прямом расчете полной системы, а также разность между точным значением и значением выпусков, полученным на первом этапе расчета по частям:  ${}^1d = {}^1X_b - X_b$ .

На рис. 5.12 представлены значения потоков выпусков, поставок и ресурсов, которые получились после завершения первого этапа расчета в подсетях и сети пересечений. Здесь в сети пересечений представлены потоки, которые возникли после расчета воздействия со стороны подсетей, рассчитанных как независимые системы. В отдельных подсетях даны потоки, которые возникли после расчета обратного воздействия на них со стороны сети пересечений. В сети пересечений в качестве воздействий (спроса) на входе отраслей, рассматриваются результаты расчета подсетей, т.е. выпуски в контактных отраслях. В подсетях в качестве воздействий (спроса) на входе отраслей, при расчете обратного воздействия, рассматриваются приращения выпусков в соответствующих отраслях сети пересечений.



Сеть пересечений после первого этапа расчета

Рис. 5.12. Потoki в подсистемах (5.41–5.42) и сети пересечений (5.39) после завершения первого этапа расчета по частям

**Этап 2.** Изменение выпусков отраслей дает новое воздействие на сеть пересечений, т.е. на разорванные ветви-поставки. А через них приращение выпуска в одной подсети влияет на приращение выпуска в отраслях других подсетей. Воздействие на сеть пересечений со стороны подсетей на втором этапе имеет вид  ${}^2y_p^s = {}^1X_p^s - {}^1y_p^s$ .

$${}^2y_p^s = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 147,7163 \\ 221,5673 \\ 36,9284 \\ 140,018 \\ 28,575 \\ 5,715 \end{matrix} - \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 99,71 \\ 199,41 \\ 0 \\ 137,16 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 48,0063 \\ 22,1573 \\ 36,9284 \\ 2,858 \\ 28,575 \\ 5,715 \end{matrix} \begin{matrix} {}^2y_p^1 \\ {}^2y_p^2 \end{matrix} \quad (5.44)$$

Те значения приращений выпусков, которые составляют вектор воздействия на сеть пересечений, выделены в (5.44) двойными линиями. Произведем расчет сети пересечений на этапе 2, в результате получим приращения выпусков в отраслях, соединяемых разорванными ветвями.

$${}^2X^p = (I - A)_p^{-1} {}^2y_s^p = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,010309 & 0,010309 & 0,103093 \\ 0,020619 & 1,020619 & 0,206186 \\ 0,103093 & 0,103093 & 1,030928 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 48,0063 \\ 22,1573 \\ 2,858 \end{bmatrix} \\ = \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 49,0243 \\ 24,19325 \\ 10,17975 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.45)$$

Тогда полные выпуски в отраслях сети пересечений после выполнения этапа 2 при суммировании (5.39) и (5.45) примут следующие значения:

$$X^p = {}^1X^p + {}^2X^p = \begin{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 891,556 \\ 480,042 \\ 997,0598 \end{bmatrix} \end{matrix} + \begin{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 49,0243 \\ 24,19325 \\ 10,17975 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 940,5803 \\ 504,2353 \\ 1007,2396 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Далее получим обратные воздействия со стороны сети пересечений на подсистемы на этапе 2. Формулу расчета запишем как  ${}^2y_s^p = {}^2X^p - {}^2y_p^s$ . Тогда получим:

$${}^2y_s^p = \begin{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 49,0243 \\ 24,19325 \\ 10,17975 \end{bmatrix} \end{matrix} - \begin{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 48,0063 \\ 22,1573 \\ 2,858 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1,018 \\ 2,036 \\ 7,32175 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} {}^2y_{p1} \\ {}^2y_{p2} \end{matrix} \quad (5.46)$$

По этим дополнительным воздействиям проводим расчет подсетей на втором этапе. Получим очередное приращение выпусков, что соответствует вычислению третьего члена ряда в (5.6).

**Расчет воздействия сети пересечений на подсети.**

*Подсеть 1.* По уравнению (5.34), но с дополнительными воздействиями из (5.46), проведем расчет подсети 1.

$${}^2X^1 = (I - A)_1^{-1} {}^2y_{p1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,037037 & 0,222222 & 0,148148 \\ 0,126984 & 1,047619 & 0,222222 \\ 0,116402 & 0,126984 & 1,037037 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1,018 \\ 2,036 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1,5081 \\ 2,2622 \\ 0,3770 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.47)$$

*Подсеть 2.* По уравнению (5.36), но с воздействиями из (5.40), получим значения дополнительных выпусков отраслей для подсети 2.

$${}^2X^2 = (I - A)_2^{-1} {}^2y_{p2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,020833 & 0,104167 & 0,010417 \\ 0,208333 & 1,041667 & 0,104167 \\ 0,041667 & 0,208333 & 1,020833 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 7,32175 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \\ \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7,4743 \\ 1,5254 \\ 0,3051 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.48)$$

Полученные значения прибавляются к выпускам отраслей, полученным на первом этапе расчета. Тогда получим значения валовых выпусков в отраслях  ${}^2X$  на этапе 2.

$${}^2X_b = {}^1X_b + {}^2X^{1,2}_b = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 939,5682 \\ \hline 502,2022 \\ \hline 394,1771 \\ \hline 999,9138 \\ \hline 627,5333 \\ \hline 275,5067 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1,5081 \\ \hline 2,2622 \\ \hline 0,3770 \\ \hline 7,4743 \\ \hline 1,5254 \\ \hline 0,3051 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 941,0763 \\ \hline 504,4644 \\ \hline 394,5541 \\ \hline 1007,388 \\ \hline 629,0587 \\ \hline 275,8118 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 941,1067 \\ \hline 504,5171 \\ \hline 394,5624 \\ \hline 1007,47 \\ \hline 629,0755 \\ \hline 275,8151 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -0,0304 \\ \hline -0,0527 \\ \hline -0,0083 \\ \hline -0,0819 \\ \hline -0,0168 \\ \hline -0,0033 \\ \hline \end{array} \quad (5.49)$$

В правых столбцах снова, как и на этапе 1, показано точное значение выпусков  $X_b$ , полученное в (5.31) при прямом расчете полной системы, а также разность  ${}^2d = {}^2X_b - X_b$  между точным значением и значением выпусков, полученным на втором этапе расчета. Сравнивая с (5.43) можно видеть, что значения выпусков, полученные при расчете по частям, быстро сходятся к точным значениям, которые были получены прямым расчетом. Точно таким же образом выполняется третий этап расчета по частям, а при необходимости и последующие этапы. В данном примере необходимая точность достигается уже на третьем этапе, т.е. полученные значения при расчете по частям значения отличаются от точных на уровне выбранного количества знаков после запятой.

### Проверка полученных решений балансовых задач

Проверим результаты расчета баланса потоков продуктов в целой сети (на примере подсети 1, рис. 5.9), которые представлены на рис. 5.13. Потоки поставок получают умножением валовых выпусков отраслей из (5.34) на коэффициенты  $a^{ab}$  в матрице (5.32). Потоки ресурсов получают умножением выпусков из (5.34) на соответствующие коэффициенты  $b^{ab}$  ресурсов. Все эти коэффициенты показаны на рис. 5.9.

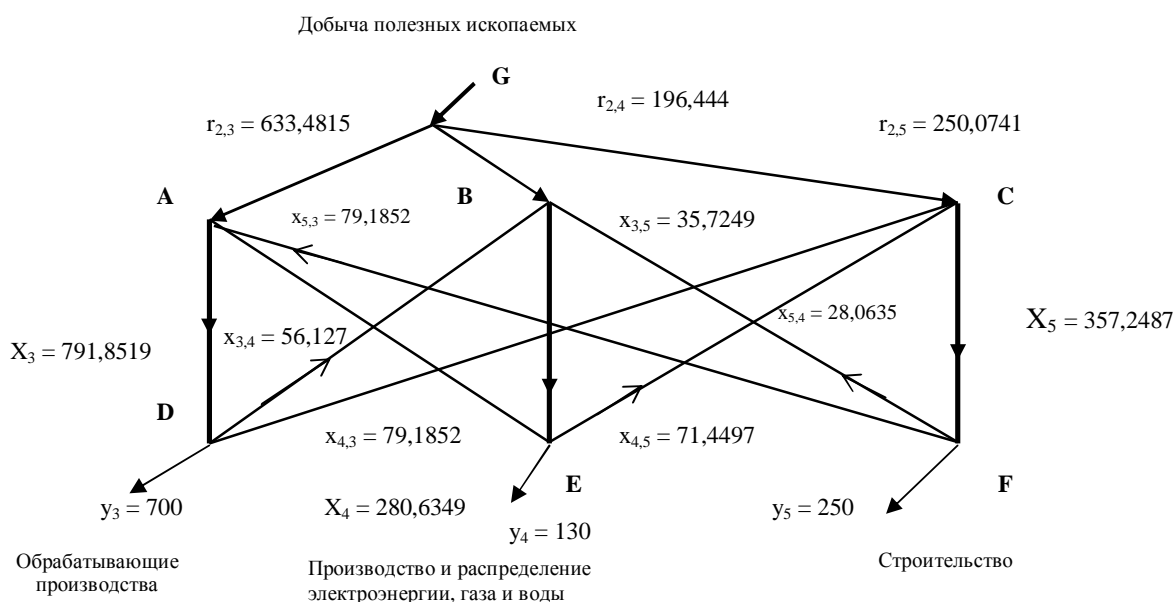


Рис. 5.13. Результаты расчета подсистемы 1 из трех отраслей 3, 4, 5

Проверим баланс потоков в узлах данной сети, как это делалось в примерах расчета сетей в главе 3. По сути, здесь также выполняется первый закон Кирхгофа.

$$\text{Узел А: } X_3 = x_{4,3} + x_{5,3} + r_{1,3} = 79,1852 + 79,1852 + 633,4815 = 791,8519$$

$$\text{Узел В: } X_4 = x_{3,4} + x_{5,4} + r_{1,4} = 56,127 + 28,065 + 196,444 = 280,636$$

$$\text{Узел С: } X_5 = x_{3,5} + x_{4,5} + r_{1,5} = 35,7249 + 71,4497 + 250,0741 = 357,2487$$

$$\text{Узел D: } y_3 = X_3 - x_{3,4} - x_{3,5} = 791,8519 - 56,127 - 35,7249 = 700$$

$$\text{Узел Е: } y_4 = X_4 - x_{4,3} - x_{4,5} = 280,6349 - 79,1852 - 71,4497 = 130$$

$$\text{Узел F: } y_5 = X_5 - x_{5,3} - x_{5,4} = 357,2487 - 79,1852 - 28,0635 = 250$$

Отсюда видно, что балансовые соотношения в результатах расчета подсети 1 выполняются на входе и на выходе всех отраслей, что подтверждает правильность решения.

$$\text{Узел G: } r_{2,3} + r_{2,4} + r_{2,5} = 633,4815 + 196,444 + 250,0741 = 1079,9996 = 1080$$

$$\text{Узел H (объединяет выходы всех отраслей): } y_3 + y_4 + y_5 = 700 + 130 + 250 = 1080$$

Таким образом, потоки на входе в сеть из внешней среды (природы), и на выходе из сети во внешнюю среду (система потребления) также сбалансированы в рамках принятых единиц измерения.

Аналогично проверим результаты расчета баланса потоков продуктов по частям с использованием сетевой модели. Результаты расчета сети *как целого* (заданной на рис. 5.8), без разделения на части, представлены на рис. 5.14. Жирным шрифтом внизу показаны заданные значения спроса, около ветвей – точные значения выпусков при расчете сетевой модели как целой сети (из соотношения 5.31).

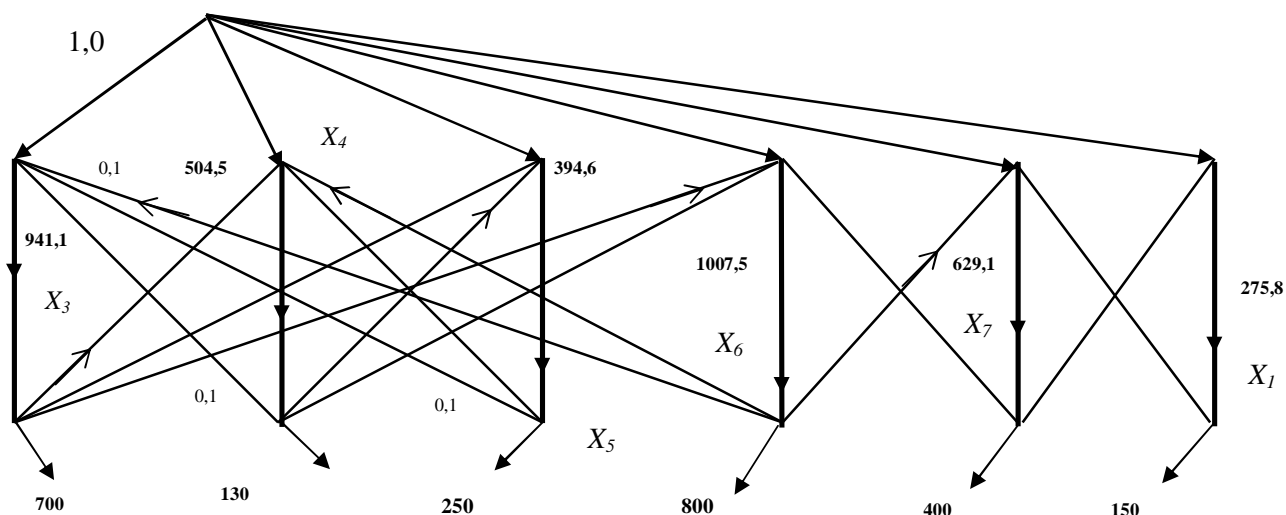


Рис. 5.14. Результаты расчета сети потоков продуктов как целого

Для проверки результатов расчета *по частям* на рис. 5.15 для двух подсетей и сети пересечений представлены значения потоков продуктов. Эти значения выпусков, поставок и

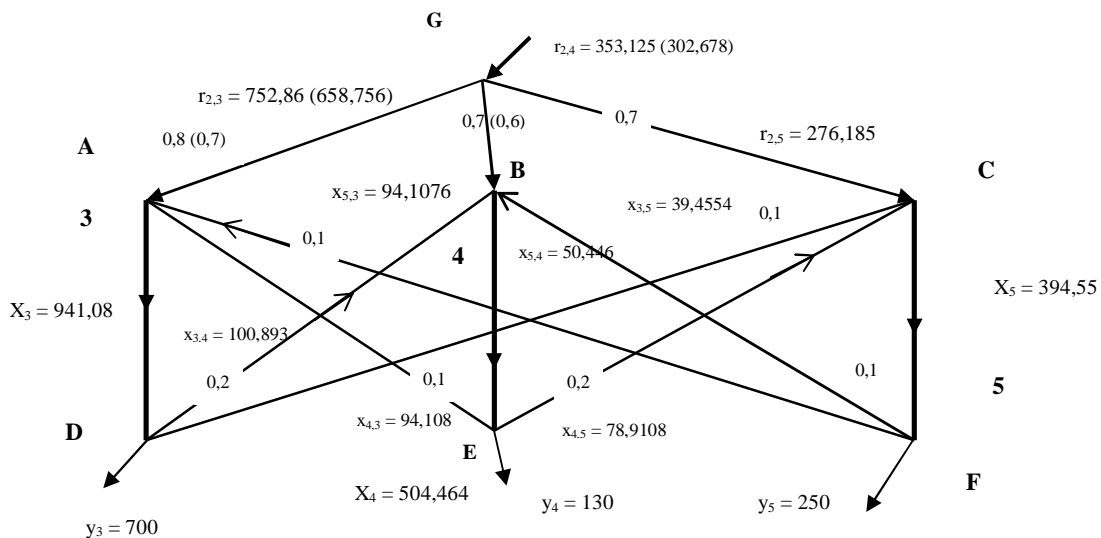


ресурсов получены после завершения второго этапа расчет подсетей и сети пересечений. Они практически соответствуют тем значениям, которые получаются при расчете заданной системы отраслей, как целого, которые показаны на рис. 5.14. Для соединяемых узлов сделана проверка выполнения баланса всех потоков. Кроме того, при соединении частей в целое меняются выпуски, поставки и ресурсы в подсистемах. Также проверены балансы потоков продуктов в узлах входа и выхода отраслей (предприятий) всех подсистем.

Надо учесть, что при соединении отдельных подсетей в полную сеть меняются коэффициенты прямых затрат *ресурсов*. Это происходит потому, что соединение частей (подсетей) в целое соответствует переходу, преобразованию части ресурсов в поставки. Например, при установлении хозяйственных связей с другими регионами (странами, предприятиями отрасли) можно заменить часть необходимых для производства собственных ресурсов на поставки новых смежников. В результате возрастает специализация, разделение труда, что, при правильной организации, дает рост эффективности.

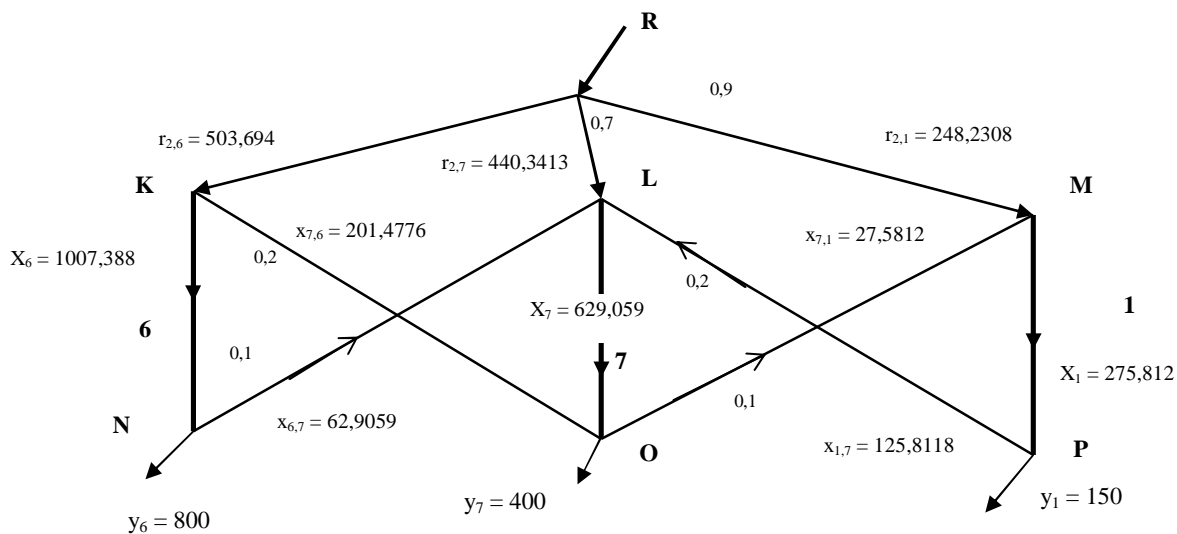
Поскольку в подсетях получены полные значения выпусков отраслей, то поставки сразу и однозначно принимают значения в соответствии с коэффициентами  $a^{ab}$ . Однако значения потоков ресурсов будут меняться по мере подключения тех разорванных связей, которые соединяют подсистемы. Значения выпусков в соответствующих отраслях подсетей и сети пересечений отличаются друг от друга на величину одного шага алгоритма. Этот шаг – обратное воздействие на подсети со стороны сети пересечений – составляет половину этапа расчета (в данном случае второго этапа).

Теперь проверим баланс потоков в узлах, по которым соединяются подсети и сеть пересечений. Такие узлы на рис. 5.15 обозначены одинаковыми буквами. На выходе отраслей в подсетях баланс выполняется, с учетом существования разорванных ветвей. На входе отраслей в подсетях баланс также выполняется, но поток ресурса зависит от учета или не учета существования разорванных ветвей при расчете баланса. В зависимости от этого изменяются коэффициенты  $b^{ab}$  ресурсов – в соответствии с соотношением (5.8). Как и раньше, все эти балансы представляют собой аналог первого закона Кирхгофа.



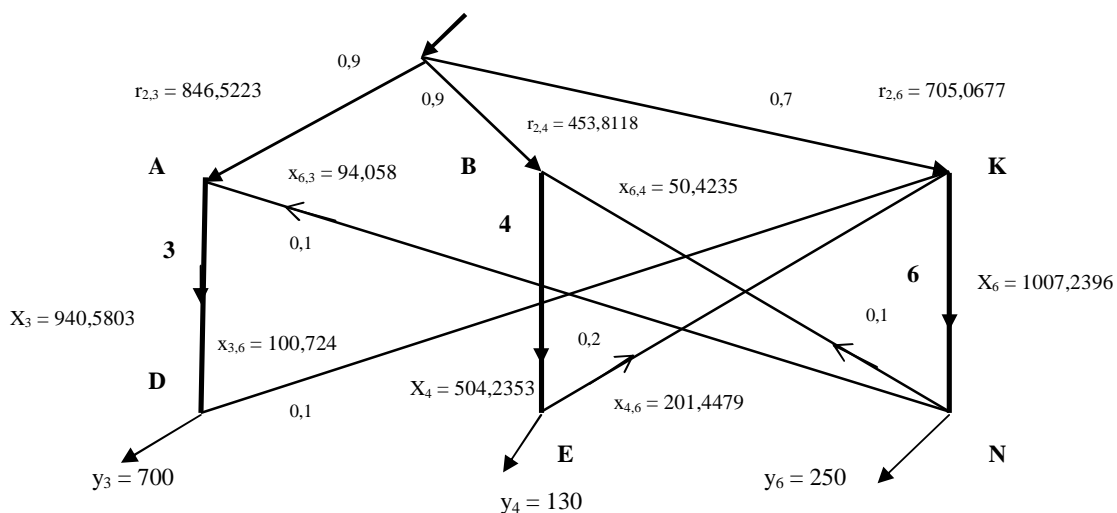
а)

Сеть 1



б)

Сеть 2



в)

Сеть пересечений

Рис. 5.15. Результаты расчета подсистем и сети пересечений

Если учесть ветви, которые в полной сети соединяют отрасль 6 с отраслями 3 и 4, то баланс в узлах  $A$  и  $B$  будет выполняться, но коэффициенты ресурсов скорректируют свое значение; соответственно изменятся и потоки ресурсов. Это соответствует тому, что при объединении, например, отдельных регионов в единый субъект, часть производства (и потребления) собственных ресурсов, можно заменить готовыми поставками соседей. *Новые значения коэффициентов и потоков ресурсов на рис. 5.15 показаны в скобках.*

**Проверка подсети 1.** Сначала рассмотрим узлы входа отраслей (в полной сети).

$$\text{Узел } A: X_3 = x_{4,3} + x_{5,3} + r_{2,3} = 94,1076 + 94,1076 + 752,86 = 941,08$$

В полной сети в этот узел добавится ветвь  $b_{6,3}$ , которая включена в сеть пересечений, в ней протекает поток, найденный при расчете по частям, и равный на рис. 5.15.в:  $x_{6,3} = 94,058$ , поскольку  $a_{6,3} = 0,1$ . С учетом этого изменится значение для ресурса:

$$b'_{2,3} = b_{2,3} - a_{6,3} = 0,8 - 0,1 = 0,7, \text{ а } r'_{2,3} = b'_{2,3} X_3 = 0,7 \cdot 941,08 = 658,756. \text{ Тогда получим:}$$

$$\text{Узел } A: X_3 = x_{4,3} + x_{5,3} + r'_{2,3} + x_{6,3} = 94,1076 + 94,1076 + 658,756 + 94,058 = 941,03.$$

Аналогичную работу проделаем для узла  $B$ , тогда получим:

$$\text{Узел } B: X_4 = x_{3,4} + x_{5,4} + r_{2,4} = 100,893 + 50,446 + 353,125 = 504,464$$

Меняем коэффициент ресурса с учетом ветви связи  $b_{6,4}$  подсистемы с полной системой:

$$b'_{2,4} = b_{2,4} - a_{6,4} = 0,7 - 0,1 = 0,6, \text{ а } r'_{2,4} = b'_{2,4} X_4 = 0,6 \cdot 504,464 = 302,678. \text{ Получим:}$$

$$\text{Узел } B: X_4 = x_{3,4} + x_{5,4} + r'_{2,4} + x_{6,4} = 100,893 + 50,446 + 302,678 + 50,424 = 504,441.$$

Таким образом, баланс в узлах  $A$  и  $B$  сохраняется при соединении в полную сеть, но с учетом соответствующих изменений потоков ресурсов. Возникающие расхождения в балансе (в пятом знаке) связаны с тем, что проведено всего две итерации расчета по частям.

$$\text{Узел } C: X_5 = x_{3,5} + x_{4,5} + r_{2,5} = 39,455 + 78,911 + 276,185 = 394,55.$$

В узле  $C$  баланс не меняется, поскольку эта отрасль имеет связи только внутри подсистемы. Рассмотрим балансы в узлах выхода.

$$\text{Узел } D: y_3 = X_3 - x_{3,4} - x_{3,5} = 941,08 - 100,893 - 39,455 = 800,732 \neq 700.$$

Это не равно спросу в отрасли 3, равному 700, если эта отрасль принадлежит только отдельной подсистеме, сети 1. Однако теперь отрасль 3 включена в полную сеть, связывающую сети 1 и 2 через сеть пересечений. Эта связь осуществляется через ветвь  $b_{3,6}$ , которая включена в сеть пересечений, в ней протекает поток  $x_{3,6}$ . С учетом этого, получим:

$$\text{Узел } D: y_3 = (X_3 - x_{3,4} - x_{3,5}) - x_{3,6} = 800,732 - 100,724 = 700,008 = y_3$$

$$\text{Узел } E: y_4 = X_4 - x_{4,3} - x_{4,5} = 504,464 - 94,108 - 78,911 = 331,445 \neq 130$$

Аналогично, это не равно спросу в отрасли 4, равному 130, если эта отрасль принадлежит только сети 1. Однако теперь отрасль 4 включена в полную сеть через сеть пересечений ветвью  $b_{4,6}$ , в ней протекает поток поставки  $x_{4,6}$ . С учетом этого, получим:

$$\text{Узел } E: y_4 = (X_4 - x_{4,3} - x_{4,5}) - x_{4,6} = 331,445 - 201,4479 = 129,9971 = y_4$$

В отрасли 5 баланс выполняется сразу, поскольку она не связана с другими подсетями в полной сети.

$$\text{Узел } F: y_5 = X_5 - x_{5,3} - x_{5,4} = 394,55 - 94,108 - 50,446 = 249,996 = 250.$$

Таким образом, можно видеть, что балансовые соотношения в решении подсети 1 выполняются на входе и на выходе всех отраслей, которые теперь включены в полную сеть. Это подтверждает правильность расчета полной сети по частям.

Баланс полного входа потоков ресурсов в систему и полного выхода произведенных продуктов теперь выполняется только для полной сети, поскольку часть произведенных продуктов покидает подсистему, поступая через сеть пересечений в подсеть 2, а другая часть поступает оттуда в подсеть 1. Таким образом, совокупность потоков поступающих ресурсов в подсеть 1 (включена в полную сеть) равна:

$$\text{Узел } G: r_{2,3} + r_{2,4} + r_{2,5} = 302,678 + 658,756 + 276,185 = 1237,619 \neq 1080.$$

С учетом потоков поставок, покидающих подсистему, это составит:

$$(r_{2,3} + r_{2,4} + r_{2,5}) - x_{3,6} - x_{4,6} = 1237,619 - 100,724 - 201,4479 = 935,4471.$$

С учетом потоков поставок, поступающих в подсистему, получим:

$$(r_{2,3} + r_{2,4} + r_{2,5}) - (x_{3,6} - x_{4,6}) + x_{6,3} + x_{6,4} = 935,4471 + 94,058 + 50,4235 = 1079,9286 = 1080,$$

что равно сумме спроса (плана) в отраслях, с учетом точности вычислений, в узле Н.

$$\text{Сумма выходов всех отраслей сети 1 равна: } y_3 + y_4 + y_5 = 700 + 130 + 250 = 1080.$$

**Проверка подсети 2.** Аналогично проверим потоки в подсети 2 (когда она включена в полную сеть). Здесь только отрасль (ветвь) 6 участвует в соединении подсетей через сеть пересечений. В ветвь 6 входят две поставки из отраслей 3 и 4 через сеть пересечений. Включим их в расчет баланса в узле. Соответственно, сразу скорректируем  $b^{ab}$  и поток ресурса:

$$b_{2,6} = b_{2,6} - a_{3,6} - a_{4,6} = 0,8 - 0,1 - 0,2 = 0,5; r_{2,6} = b_{2,6} X_6 = 0,5 \cdot 1007,388 = 503,694$$

$$\text{Узел } K: X_6 = x_{7,6} + r_{2,6} + x_{3,6} + x_{4,6} = 201,4776 + 503,694 + 100,724 + 201,4479 = 1007,344.$$

$$\text{Узел } N: y_6 = X_6 - x_{6,7} = 1007,388 - 62,9059 = 944,4821 \neq 800.$$

Это не равно спросу в отрасли 6, равному 800, если эта отрасль принадлежит только сети 2. Однако теперь отрасль 6 включена в полную сеть, связывающую сети 1 и 2 через сеть пересечений. Эта связь осуществляется через ветви  $b_{6,3}$ , и  $b_{6,4}$  которые включены в сеть пересечений, в них протекают потоки  $x_{6,3}$  и  $x_{6,4}$ . С учетом этого, получим:

$$\text{Узел } N: y_6 = (X_6 - x_{6,7}) - x_{6,3} - x_{6,4} = 944,4821 - 94,058 - 50,4235 = 800,0006.$$

В двух других отраслях в узлах входа и выхода баланс выполняется сразу, поскольку у них нет связи с другими подсетями в полной сети.

$$\text{Узел } L: X_7 = x_{6,7} + x_{1,7} + r_{2,7} = 62,9059 + 125,8118 + 440,3413 = 629,059.$$

$$\text{Узел } M: X_1 = x_{7,1} + r_{2,1} = 27,5812 + 248,2308 = 275,812.$$

$$\text{Узел } O: y_7 = X_7 - x_{7,6} - x_{7,1} = 629,059 - 201,4776 - 27,5812 = 400,0002$$

$$\text{Узел } P: y_5 = X_1 - x_{1,7} = 275,812 - 125,8118 = 150,0002$$

Итак, балансы в решении подсети 2, когда она включена в полную сеть, выполняются на входе и на выходе всех отраслей, что подтверждает правильность расчета по частям.

Баланс полного входа в систему потоков ресурсов и полного выхода произведенных продуктов теперь выполняется только для полной сети, поскольку часть произведенных продуктов покидает подсистему, поступая через сеть пересечений в подсеть 1, а другая часть поступает оттуда в подсеть 2. Потоки ресурсов в подсеть 2 (в полной сети) равны:

$$\text{Узел } R: r_{2,6} + r_{2,7} + r_{2,1} = 503,694 + 440,3413 + 248,2308 = 1192,2661 \neq 1350.$$

С учетом потоков покидающих подсистему поставок это составит:

$$(r_{2,6} + r_{2,7} + r_{2,1}) - x_{6,3} - x_{6,4} = 1192,2661 - 94,058 - 50,4235 = 1047,7846.$$

С учетом потоков поступающих в подсистему поставок получим:

$$(r_{2,6} + r_{2,7} + r_{2,1}) - (x_{6,3} - x_{6,4}) + x_{3,6} + x_{4,6} = 1047,785 + 100,724 + 201,448 = 1349,957 = 1350,$$

что равно сумме спроса (плана) в отраслях, с учетом точности вычислений.

$$\text{Сумма выходов всех отраслей сети 2 равна: } y_6 + y_7 + y_1 = 800 + 400 + 150 = 1350.$$

Таким образом, потоки на входе в подсети (включенные в полную сеть) из внешней среды (природы), и на выходе из подсетей во внешнюю среду (в систему потребления) также сбалансированы в рамках принятых единиц измерения.

**Сеть пересечений.** Данная подсеть, в которой главным являются только ветви связи подсетей, в процессе расчета по частям живет своей жизнью, но соблюдает все балансы.

$$\text{Узел } A: X_3 = x_{6,3} + r_{2,3} = 94,058 + 846,5223 = 940,5803$$

$$\text{Узел } B: X_4 = x_{6,4} + r_{2,4} = 50,4235 + 453,8118 = 504,2353$$

$$\text{Узел } K: X_6 = x_{3,6} + x_{4,6} + r_{2,6} = 100,724 + 201,4479 + 705,0677 = 1007,2396$$

$$\text{Узел } D: y_3 = X_3 - x_{3,6} = 940,5803 - 100,724 = 839,8563 = 791,85 + 48,0063 = 839,8563.$$

Т.е. роль спроса в сети пересечений играет сумма воздействий со стороны подсетей на всех этапах расчета, в данном случае, воздействий на этапах 1 – в (5.39) и 2 – в (5.45). Аналогично получим для других узлов выхода сети пересечений.

$$\text{Узел } E: y_4 = X_4 - x_{4,6} = 504,2353 - 201,4479 = 302,7874 = 280,63 + 22,1573 = 302,7873.$$

$$\text{Узел } N: y_6 = X_6 - x_{6,3} - x_{6,4} = 1007,2396 - 94,058 - 50,4235 = 859,9 + 2,858 = 862,758.$$

Отсюда видно, что балансовые соотношения в решении сети пересечений выполняются на входе и на выходе всех отраслей, что подтверждает правильность расчета по частям.

Баланс потоков на входе и выходе отраслей, как для подсетей, так и для сети пересечений выполняется на каждом этапе вычислений, как если бы эти подсети были независимые, свободные системы. Однако на каждом этапе в сети пересечений меняются источники воздействия, которые представляет спрос (план) на выходе отраслей. *В изменении*

*воздействий как раз и отражаются структурные связи подсетей*, скрытые при разделении на части. Таким образом, разорванная связь контура, (определяет ветвь поставки и внутреннее воздействие) заменяется на внешнее воздействие разомкнутого пути. Разомкнутый путь определяет тот узел, на который воздействует спрос (план).

**Аналогии воздействий.** В связке ветвей «ресурс – отрасль» сетевой модели возникает *два внешних источника (в электрической аналогии – тока)*. Один источник расположен в отрасли – он дает выпуск на выходе и создает спрос на входе. Другой источник расположен в ресурсе, где он дает на выходе поток (первого этапа расчета) для работы отрасли, а на входе дает воздействие, спрос на внешнюю среду. Внешней средой здесь может быть природа, из которой извлекаются материальные, энергетические и человеческие ресурсы. В качестве внешней среды могут также выступать другие регионы. Или другие страны. Таким образом, контакт с внешней средой такой системы, как предприятие, регион, страна происходит и на входе (потребление ресурсов) и на выходе (удовлетворение спроса).

На выходе отраслей разрывание ветвей поставок заменяется увеличением спроса со стороны внешней среды потребления (обратное воздействие на подсети со стороны сети пересечений). На входе разрывание ветвей поставок заменяется увеличением потребления «ресурсов», которые поступают из внешней среды. На выходе отраслей сети пересечений баланс также выполняется, однако надо учесть, что роль исходного воздействия (спроса) здесь играли выпуски, полученные для отдельных подсетей.

Менее очевиден баланс на входе отраслей, поскольку он включает в себя потоки в ресурсах. Сами коэффициенты прямых затрат для ресурсов зависят от суммы коэффициентов прямых затрат на входе отраслей в соответствии с соотношением (5.8). Поэтому, когда к подсети в том или ином виде подключается ветвь поставки, например, от сети пересечений, коэффициент для ресурса меняется. Это можно понять так, что при производстве продукта потеря одного поставщика должна заменяться другим поставщиком. В данном случае эту роль играют поставщики, которые находятся вне рассматриваемой системы. Скажем, при разрыве хозяйственных связей или потере какой-либо части технологии внутри страны, необходимо заменить потерю, например, импортными поставками, которые в данной модели могут рассматриваться как ветви ресурсов.

Таким образом, при изменении структуры, разделении на подсистемы, коэффициенты прямых затрат ресурсов должны меняться так, чтобы сохранить возможность производства необходимой продукции.

**Собственное потребление отраслей.** Если есть собственное потребление отраслями своей продукции, то это вносит определенное усложнение данного алгоритма. Дело в том, что тогда все отрасли, которые потребляют свою продукцию (например, электроэнергетика)

следует представлять двумя ветвями. Одна ветвь от входа к выходу, как и ранее, представляет процесс производства. Другая ветвь, от выхода к входу, представляет процесс потребления. Получается цикл в каждой такой отрасли.

При разделении на части возникает вопрос – должна ли ветвь потребления быть только в своей подсистеме, если сама отрасль попала также в сеть пересечений? В экономической матрице эти структурные преобразования связаны с принадлежностью элементов разным подматрицам в процессе расчета. Оказалось, что собственное потребление учитывается при расчете подсетей – соответственно растут выпуски. В сеть пересечений не входят те ветви, которые представляют собственное потребление, – их воздействие происходит через возросшие выпуски отраслей других подсетей. Таким образом, в структуре сети при декомпозиции не возникают новые ветви связей отраслей.

**Доказательство сходимости алгоритма расчета по частям** следует из условия сходимости степенного ряда (5.6) который обеспечивает расчет межотраслевого баланса. Это условие заключается в том, что ряд сходится, поскольку коэффициенты в матрице  $A$  меньше, и даже много меньше единицы и норма экономической матрицы  $(I - A)$  меньше единицы. Доказательство сходимости должно состоять из двух частей.

1. Доказать, что полученные при расчете по частям решения (в том числе, при разных способах деления на подсети) сходятся по мере выполнения итераций к одному решению. Таким образом, что разность между последовательными итерациями после выполнения конечного числа шагов алгоритма становится меньше сколь угодно малого заданного числа.
2. Доказать, что это решение соответствует решению задачи как целого, т.е., что разность между результатом расчета по частям и результатом расчета системы (сети) как целого становится за конечное число шагов алгоритма меньше сколь угодно малого заданного числа.

Рассмотрим преобразования, которые происходят с матрицами данного ряда при декомпозиции на подматрицы и расчете по частям. Переход от полной системы к подсетям и сети пересечений должен аналитически осуществляться с помощью матрицы преобразования, которая описывает изменения в структуре связей. В матрице Леонтьева эти изменения в структуре проявляются в разделении на подматрицы. Тогда матрицу можно представить как сумму двух матриц  $A = A_s + A_p$ . Одна из них,  $A_s$  – блочно-диагональная матрица, вдоль ее главной диагонали расположены матрицы подсистем, на которые разделена исходная система отраслей. Другая матрица,  $A_p$ , такого же порядка, содержит элементы (представляющие ветви-поставки), которые не вошли в подсети. Это как раз те поставки, которые оказались «разорваны» при разделении на подсети. В данном примере эта матрица имеет вид:

$$A_p = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

Если эту матрицу рассматривать как  $(I - A_p)$ , то добавляются единицы на главной диагонали, а не диагональные элементы становятся отрицательными.

Рассмотрим возможный путь доказательства. Наиболее удобно рассматривать сходимость алгоритма через разложение обратной матрицы в сумму ряда (5.6). В качестве суммы ряда представлена матрица  $A$ , как указанная выше сумма двух матриц.

$$\begin{aligned} (I - A)^{-1} &= I + A + A^2 + A^3 + \dots = I + (A_s + A_p) + (A_s + A_p)^2 + (A_s + A_p)^3 + \dots = \\ &= I + A_s + A_p + A_s^2 + 2 A_s A_p + A_p^2 + A_s^3 + 3 A_s^2 A_p + 3 A_s A_p^2 + A_p^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.50)$$

Полученную сумму ряда до члена третьей степени надо сравнить с тем, что получается в процессе выполнения алгоритма расчета межотраслевого баланса по частям. Этот алгоритм в принятых обозначениях можно записать следующим образом.

#### 1. Расчет подсетей.

$$X_s = (I - A_s)^{-1} y = (I + A_s + A_s^2 + A_s^3 + \dots) y. \quad (5.51)$$

2. Расчет сети пересечений с воздействиями от результатов расчета подсетей (через те отрасли, которые относятся к сети пересечений).

$$X_p = (I - A_p)^{-1} y_p = (I - A_p)^{-1} X_s = (I + A_p + A_p^2 + A_p^3 + \dots) (I + A_s + A_s^2 + A_s^3 + \dots) y, \quad (5.52)$$

где среди выпусков отдельных подсистем  $X_s$  берутся значения только тех отраслей, которые имеют отношение к сети пересечений.

3. Обратное воздействие от сети пересечений на подсети имеет вид разности между откликом в сети пересечений и воздействием на нее со стороны подсетей.

$$\begin{aligned} y_s^p &= X_p - y_p = (I - A_p)^{-1} X_s - X_s = ((I - A_p)^{-1} - I) X_s = \\ &= (I + A_p + A_p^2 + A_p^3 + \dots) A_p (I + A_s + A_s^2 + A_s^3 + \dots) y = K y \end{aligned} \quad (5.53)$$

Здесь через  $K$  обозначен коэффициент при  $y$ , который преобразует исходное воздействие в подсистемах (спрос) в обратное воздействие на подсистемы со стороны сети разорванных ветвей (отраслей, поставок и ресурсов).

4. Расчет воздействия сети пересечений на подсети дает приращения выпусков отраслей, которые представляют собой результат воздействия разделенных подсетей друг на друга через сеть пересечений.

$${}^1 X_b = (I - A_s)^{-1} {}^1 y_s^p = (I + A_s + A_s^2 + A_s^3 + \dots) K y \quad (5.54)$$

Полные выпуски в отраслях подсетей на этапе 1 примут вид следующий.



$$\begin{aligned}
 {}^1X_b &= X_s + {}^1X_s = (I + A_s + A_s^2 + A_s^3 + \dots) (I + K) y = \\
 &= (I - A_s)^{-1} ((I - A_s)^{-1} A_p (I - A_p)^{-1}) y
 \end{aligned}
 \tag{5.55}$$

Далее можно показать, что при раскрытии скобок члены в (5.55) соответствуют членам в (5.50), с учетом последующих членов разложения, а также итераций алгоритма. Разность между выпусками в подсетях и выпусками с учетом приращений от сети пересечений – условие сходимости алгоритма.

$$\begin{aligned}
 {}^1d &= {}^1X_b - X_b = {}^1X_b - X_s \\
 &= (I + A_s + A_s^2 + A_s^3 + \dots) y - (I + A_s + A_s^2 + A_s^3 + \dots) (I + K) y = K y.
 \end{aligned}$$

Далее можно показать, что последующие итерации, приводят к вычислению очередных членов степенного ряда, причем это ряд по степеням введенного выше показателя  $K$ . При этом сам показатель  $K$  является произведением двух степенных рядов, каждый из которых заведомо сходится. В основе этих степенных рядов матрицы, норма которых меньше матрицы, по которой сходимость доказана. Эти матрицы также представляют по сути задачи баланса, но меньшей размерности, чем исходная система отраслей и поставок.

Построенная сетевая модель сама служит доказательством сходимости алгоритма расчета по частям задачи межотраслевого баланса. Дело в том, что рассмотренный «простой» алгоритм является частным случаем алгоритма расчета сети по частям. Точность расчета сетей при изменении структуры (благодаря инварианту двойственных сетей), в том числе при разделении на независимые подсети, была показана в главе 3.

**Сетевая модель взаимодействия потоков продуктов и денежных средств.** Полный алгоритм расчета сети, сетевой модели межотраслевого баланса, необходим для расчета не только потоков продуктов, но и пропорций потоков денежных средств. Речь идет о пропорциях, поскольку денежные потоки измеряются с точностью до стоимости денежной единицы (в энергетическом эквиваленте), точно так, как потенциал измеряется не абсолютно, а относительно некоторой точки (принимаемой за нулевое значение).

Сеть позволяет рассчитать не только комбинации контурных и узловых токов, которые благодаря своей двойственности представляют потоки продуктов. Сеть также позволяет рассчитать напряжения на всех ветвях, как от источников замкнутых путей (источники напряжения), так и от источников разомкнутых путей (источники тока). Источники напряжения рассчитываются в процессе приведения комбинации токов к значениям потоков продуктов. По каждой ветви существует также разность потенциалов, соответствующая проходящим токам. Полученные виды напряжений, имеющих разный структурный смысл, как воздействия, так и отклики, должны соответствовать разным показателям денежно-кредитной системы в части обеспечения производственных процессов.

В этой связи возникает вопрос о существовании метрических характеристик в экономической системе. Их роль могут играть не только коэффициенты прямых затрат, которые устанавливают меру взаимодействия производств, отраслей друг с другом. Это могут быть также энергетические эквиваленты между спросом и производством, предложением. В сети денежных потоков роль метрики играют ставки процентов за привлечение и размещение денежных средств.

Таким образом, в каждой ветви сетевой модели межотраслевого баланса потоки энергии представляют как воздействия (источники тока и напряжения), так и отклики (напряжения и токи). В сети потоки продуктов представляют только токи (отклики на источники двух видов). Напряжения (ковариантные компоненты вектора) не используются. В исходной постановке задачи баланса нет величин, которым соответствуют напряжения. Т.е. сетевая модель сама генерирует величины, которые дают новое знание о системе.

Расчет по частям задачи баланса производства по такой сети, с применением параллельных вычислений, обеспечивает многократное снижение объема вычислений. Для этих целей модель первоначально и разрабатывалась. Оказалось, что ковариантные компоненты потока энергии (напряжения) могут рассматриваться как пропорции в распределении финансовых воздействий (например, оборотные средства), которые должны распределяться в системе производства для обеспечения заданного выпуска.

Это дает подход к решению задачи объединенного материально-финансового баланса, которая не решена и в настоящее время (Коссов, 1966). Для современной экономической системы, с ее огромными рынками капитала, многократно превосходящими выпуск реального продукта, данная модель имеет ограниченное применение. Вместе с тем такой подход обеспечивает расчеты вариантов развития производственно-финансовых систем в интересах управления устойчивым развитием. Далее рассмотрим пути создания более сложных сетевых моделей баланса потоков продуктов и денежных средств.

Выполним расчет примера сети баланса по полному алгоритму. А именно, рассчитаем сетевую модель как физическую систему, как электрическую сеть с полным набором токов и напряжений от внешних источников и внутренних источников по формулам (5.22–5.27).

Для такого расчета задачи баланса потоков продуктов и денежных средств рассмотрим сетевую модель из трех отраслей, связывающих их поставок и ресурсов. Эта сетевая модель представлена на рисунке 5.16, где нумерация ветвей дает их более удобное расположение в подматрицах замкнутых и разомкнутых путей.

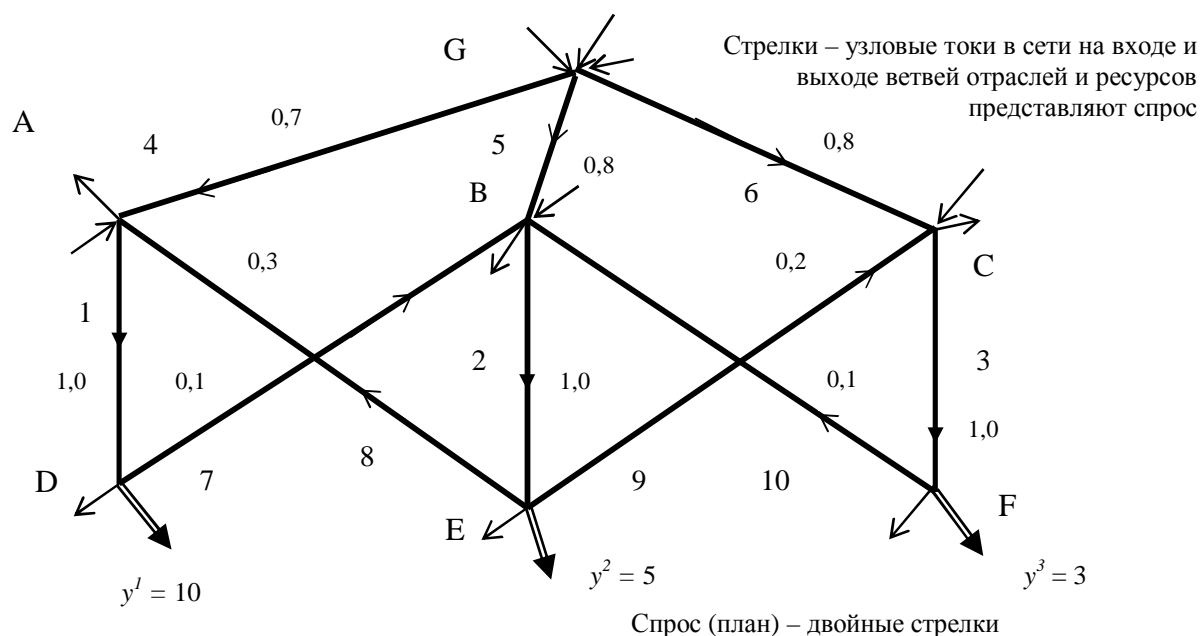


Рис. 5.16. Структура сети потоков продуктов в отраслях  
Стрелки представляют спрос и узловые токи модели

Матрица преобразования прямого базиса путей данной сети, если ветви 1-6 определяют разомкнутые пути, а ветви 7-10 определяют замкнутые пути, имеет вид:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1`	1										j
2`		1									j
3`			1								j
4`				1							j
5`					1						j
6`						1					j
7`	1			1	-1		1				m
8`		1		-1	1			1			m
9`		1			1	-1			1		m
10`			1		-1	1				1	m

Контуры в этой сети выбраны как естественные пути от ресурса через отрасль, поставку и как противодействие другому ресурсу. Т.е. поставки из других отраслей снижают необходимость потребления ресурсов самой отраслью (регионом). Обратная матрица преобразования прямого базиса путей имеет вид:

	1`	2`	3`	4`	5`	6`	7`	8`	9`	10`	
1	1										
2		1									
3			1								
4				1							
5					1						
6						1					
7	-1			-1	1		1				
8		-1		1	-1			1			
9		-1			-1	1			1		
10			-1		1	-1				1	

$C^{-1} = A_t =$

$j_{A_t}$

Матрица преобразования путей взаимного базиса ортогональная, т.е. обратная и транспонированная к исходной матрице преобразования путей  $A = C^{-1}_t$ .

$$A = C^{-1}_t = \underline{C} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1'	1						-1				$j$	$\underline{m}$
2'		1						-1	-1		$j$	$\underline{m}$
3'			1							-1	$j$	$\underline{m}$
4'				1			-1	1			$j$	$\underline{m}$
5'					1		1	-1	-1	1	$j$	$\underline{m}$
6'						1			1	-1	$j$	$\underline{m}$
7'							1				$m$	$\underline{j}$
8'								1			$m$	$\underline{j}$
9'									1		$m$	$\underline{j}$
10'										1	$m$	$\underline{j}$

Нулевой этап расчета (выпуски отраслей равны спросу). Узловая сеть. Для этого расчета применяется подматрица преобразования открытых путей матрицы взаимного базиса (или замкнутых путей двойственной сети). Эта подматрица имеет вид:

$${}^j A =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1'	1						-1				$j$	
2'		1						-1	-1		$j$	
3'			1							-1	$j$	
4'				1			-1	1			$j$	
5'					1		1	-1	-1	1	$j$	
6'						1			1	-1	$j$	

Расчет сети производим по обычным формулам решения сети из главы 2:

контурной сети – используя (2.70):  ${}^m d_c = {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C {}^m d^0$ ,

а узловой сети по формуле (2.72):  ${}^j d^c = {}^j A_t ({}^j A Y {}^j A_t)^{-1} {}^j A {}^j d_0$ ,

где для простоты опущены все текущие индексы.

В соответствии со схемой зададим вектор источников узлового (открытого) воздействия, который должен иметь указанные значения на ветвях отраслей, и равные им значения в ветвях ресурсов, чтобы обеспечить компенсацию в узлах входа отраслей.

$$I^a = y^a =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10	5	3	10	5	3	0	0	0	0

Дело в том, что спрос в экономике задан только на выходе отраслей, а источник тока в сети задают на входе ветви отрасли, и на выходе из нее. Можно считать, что источники заданы на выходе ветвей отраслей, как спрос, и на входе ветвей ресурсов, как требование к природе по поставке ресурсов. Однако это противоречит тому, что источники заданы в свободных ветвях. В каждой ветви поток внешнего источника поступает на узел входа, а покидает в узле выхода. Если других ветвей нет, а их нельзя заранее предположить, то получится, что поток поступает, допустим, на вход, а покидает неизвестно где. Таким образом, топология, свойства сети диктуют характер расположения источников в данной

сетевой модели. Наличие в сети двойного числа источников приводит к удвоению мощности сети свободных ветвей, по сравнению с тем, как если бы источники были расположены только в ветвях отраслей. Вместе с тем это удвоение числа источников приводит к удвоению мощности свободных ветвей, что может иметь экономический смысл.

Матрица проводимостей свободных ветвей состоит из коэффициентов прямых затрат всех ветвей, они расположены вдоль главной диагонали. Матрица сопротивлений  $Z_0 = Y_0^{-1}$  для расчета контурной части сети является обратной к ней. Они имеют вид, соответственно:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2		1								
3			1							
4				0,7						
5					0,8					
6						0,8				
7							0,1			
8								0,3		
9									0,2	
10										0,1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2		1								
3			1							
4				10/7						
5					10/7					
6						10/8				
7							10/1			
8								10/3		
9									10/2	
10										10/1

Отклики в свободных ветвях, с учетом значений обратных проводимостей, равны:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$jE^0_a =$	10	5	3	14,2857	6,25	3,75	0	0	0	0

Умножая ковариантные отклики-напряжения по каждой ветви на контравариантные воздействия-токи, получим квадрат величины вектора потока энергии. Это рассеиваемая мощность в разомкнутых путях свободных ветвей сети потоков продуктов:  $jP_0 = 319,3571$ .

Данная мощность характеризует поток энергии в разомкнутых ветвях сети, не соединенных друг с другом. При соединении ветвей отраслей, поставок и ресурсов структурой их связей мощность в узловой сети сетевой модели уменьшится (на величину мощности в двойственной сети). Это нехорошо. В реальной системе хозяйства при наложении связей мощность, поток энергии, наоборот, возрастает благодаря специализации и разделению труда. В сетевой модели такое увеличение реальной мощности отражается с помощью контурных величин, которые моделируют роль хозяйственных связей.

Теперь проведем *расчет связанной узловой сети*. Выполняя перемножения матриц в скобках формулы расчета узловой сети, т.е., умножая последовательно  $jA Y^jA_t$ , получим:

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	0	0	0,1	-0,1	0
2	0	1,5	0	-0,3	0,5	-0,2
3	0	0	1,1	0	-0,1	0,1
4	0,1	-0,3	0	1,1	-0,4	0
5	-0,1	0,5	-0,1	-0,4	1,5	-0,3
6	0	-0,2	0,1	0	-0,3	1,1

Обратная матрица имеет вид  $(jA Y^jA_t)^{-1}$ :

$$({}^jA Y {}^jA_t)^{-1} =$$

	1	2	3	4	5	6
1	0,9206	-0,0315	0,0042	-0,0724	0,0546	0,0088
2	-0,0315	0,7753	-0,0268	0,1387	-0,2080	0,0867
3	0,0042	-0,0268	0,9211	0,0141	0,0599	-0,0723
4	-0,0724	0,1387	0,0141	1,0430	0,2463	0,0911
5	0,0546	-0,2080	0,0599	0,2463	0,8468	0,1877
6	0,0088	0,0867	-0,0723	0,0911	0,1877	0,9826

Полученную матрицу умножим на  ${}^jA$  справа и слева, получим  $Z_c = {}^jA_t ({}^jA Y {}^jA_t)^{-1} {}^jA$ :

$$Z_c =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,9206	-0,0315	0,0042	-0,0724	0,0546	0,0088	-0,7936	-0,0955	-0,0143	0,0417
2	-0,0315	0,7753	-0,0268	0,1387	-0,2080	0,0867	-0,3152	-0,4286	-0,4806	-0,2679
3	0,0042	-0,0268	0,9211	0,0141	0,0599	-0,0723	0,0417	-0,0190	-0,1054	-0,7889
4	-0,0724	0,1387	0,0141	1,0430	0,2463	0,0911	-0,7244	0,6581	-0,2938	0,1411
5	0,0546	-0,2080	0,0599	0,2463	0,8468	0,1877	0,5460	-0,3926	-0,4511	0,5992
6	0,0088	0,0867	-0,0723	0,0911	0,1877	0,9826	0,0878	-0,1833	0,7082	-0,7227
7	-0,7936	-0,3152	0,0417	-0,7244	0,5460	0,0878	2,0640	-0,9552	-0,1430	0,4165
8	-0,0955	-0,4286	-0,0190	0,6581	-0,3926	-0,1833	-0,9552	1,4793	0,6379	-0,1903
9	-0,0143	-0,4806	-0,1054	-0,2938	-0,4511	0,7082	-0,1430	0,6379	1,6400	-1,0540
10	0,0417	-0,2679	-0,7889	0,1411	0,5992	-0,7227	0,4165	-0,1903	-1,0540	2,1108

Получили матрицу решения, умножение которой на вектор воздействия дает отклики на ветвях связанной сети, в данном случае это напряжения, ковариантные величины. Для экономии места запишем этот результат в виде строки:

$$E_a^c =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	8,6363	4,0876	2,8949	11,9462	6,9455	5,1015	-13,6370	0,9131	-5,9316	-1,0509

Умножение метрической матрицы свободных ветвей на ковариантный вектор отклика дает контравариантные отклики на ветвях сети, в данном случае это токи. Для экономии места запишем этот результат также в виде строки:

$$I_c^a =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	8,6363	4,0876	2,8949	8,3624	5,5564	4,0812	-1,3637	0,2739	-1,1863	-0,1051

Проверка полученных значений токов по ЗКТ показывает, что в узлах входа отраслей сумма входящих токов равна сумме выходящих (воздействия компенсируют друг друга). В узлах выхода отраслей сумма входящих и выходящих токов равна спросу (воздействию). В узле  $G$  сумма входящих токов равна сумме спросов отраслей:

$$\text{Узел } G: 8,362 + 5,556 + 4,081 = 17,999 = 18 = 10 + 5 + 3.$$

Аналогично проверка полученных значений напряжений проводится умножением матрицы  ${}^mC$  на  $E_a^c$ ; получаем нули по каждому контуру. Умножение ковариантного вектора отклика на контравариантные отклики дает квадрат величины вектора потока энергии, или мощность в разомкнутых путях  ${}^jP_c$  данной сети, рассматриваемой как открытая система, связанная с природой и рынком:  ${}^jP_c = 284,9803$ .

Отсюда получим, что мощность в контурной сети  ${}^mP_c$ , источники в ветвях которой имеют такую же мощность, как в узловой сети, а также в двойственной сети  ${}^jP_c$  равна:

$${}^m P_c = {}^j P_c = {}^j P_0 - {}^j P_c = 319,3571 - 284,9803 = 34,3768.$$

Таким образом, первая часть задачи полностью решена для данной узловой сети.

*Контурная сеть.* Расчет контурной части сети отраслей начинается с получения значений источников напряжения, создающих такие контурные токи, которые в сумме с узловыми токами приведут решение к нулевому этапу расчета баланса, т.е. когда выпуски отраслей равны спросу (плану), а поставки еще не начали осуществляться. Для этого получим такое распределение контурных токов в ветвях сети, чтобы сумма контурных и узловых токов в ветвях отраслей и ресурсов была равна заданным источникам, т.е. спросу, а сумма токов в поставках была равна нулю.

Для реализации этого условия из вектора воздействий узловой сети вычитаем вектор откликов в ветвях, т.е.  ${}^j I^a - {}^j I_c^a = {}^m i_c^a$ . Получим *токи откликов в контурной сети*:

$${}^m i_c^a = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1,364 & 0,912 & 0,105 & 1,638 & -0,556 & -1,081 & 1,364 & -0,274 & 1,186 & 0,105 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Умножение матрицы *сопротивления* ветвей на полученные таким образом контурные токи *в ветвях* дает напряжения откликов на ветвях  ${}^m e_a^c$ .

$${}^m e_a^c = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1,364 & 0,912 & 0,105 & 2,34 & -0,695 & -1,351 & 13,637 & -0,913 & 5,93 & 1,051 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Сумма этих напряжений по любому контуру дает то значение источника напряжения в этом контуре, которое обеспечит заданное распределение токов в сети. Для выбранного базиса контуров получим источники воздействия *в замкнутой части сети*. По свойствам топологии структуры сети их можно расположить, например, в ветвях поставок.

$${}^m e_a^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,036 & -3,036 & 7,498 & 0,5 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

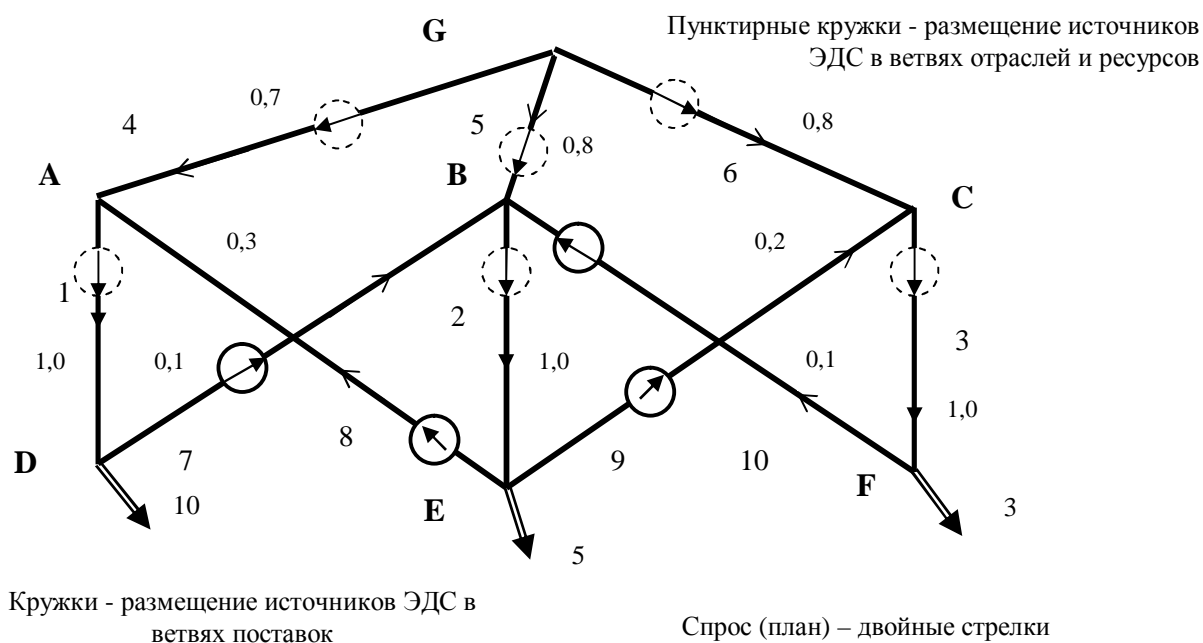


Рис. 5.17. Схема контурной части сетевой модели потоков продуктов  
Кружки представляют два варианта размещения источников ЭДС, которые дают одинаковое распределение потоков продуктов, соответствующее нулевому этапу расчета

Рассчитаем матрицу сопротивлений для контуров, обратим ее, умножим слева и справа на матрицу преобразования – получим матрицу решения. Умножая матрицу решения на источники напряжения, получим отклики на ветвях. Они должны совпасть с теми, которые уже были получены, а затем использованы для расчета источников напряжения. Матрицу решения  ${}^m Y_c$  получим по формуле  ${}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C$ .

Выполняя перемножения матриц в скобках формулы расчета узловой сети, т.е., умножая последовательно  ${}^m Z = {}^m C Z {}^m C_t$ , получим матрицу сопротивлений для контуров:

$${}^m Z = {}^m C Z {}^m C_t =$$

	7	8	9	10
7	13,6786	-2,6786	-1,25	1,25
8	-2,6786	7,0116	2,25	-1,25
9	-1,25	2,25	8,5	-2,5
10	1,25	-1,25	-2,5	13,5

Обратная матрица имеет вид  $({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} =$

$${}^m Z^{-1} = ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} =$$

	7	8	9	10
7	0,0794	0,0287	0,0029	-0,0042
8	0,0287	0,1669	-0,0383	0,0057
9	0,0029	-0,0383	0,1344	0,0211
10	-0,0042	0,0057	0,0211	0,0789

Матрицу  ${}^m Z^{-1}$  умножим на  ${}^m C$  справа и слева, получим матрицу решения контурной сети, которую можно использовать для дальнейших расчетов  ${}^m Y_c = {}^m C_t ({}^m C Z {}^m C_t)^{-1} {}^m C$ :



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0794	0,0315	-0,0042	0,0507	-0,0437	-0,0070	0,0794	0,0287	0,0029	-0,0042
2	0,0315	0,2247	0,0268	-0,0971	0,1664	-0,0693	0,0315	0,1286	0,0961	0,0268
3	-0,0042	0,0268	0,0789	-0,0099	-0,0479	0,0578	-0,0042	0,0057	0,0211	0,0789
4	0,0507	-0,0971	-0,0099	0,1889	-0,1379	-0,0510	0,0507	-0,1382	0,0411	-0,0099
5	-0,0437	0,1664	-0,0479	-0,1379	0,2580	-0,1201	-0,0437	0,0942	0,0722	-0,0479
6	-0,0070	-0,0693	0,0578	-0,0510	-0,1201	0,1711	-0,0070	0,0440	-0,1133	0,0578
7	0,0794	0,0315	-0,0042	0,0507	-0,0437	-0,0070	0,0794	0,0287	0,0029	-0,0042
8	0,0287	0,1286	0,0057	-0,1382	0,0942	0,0440	0,0287	0,1669	-0,0383	0,0057
9	0,0029	0,0961	0,0211	0,0411	0,0722	-0,1133	0,0029	-0,0383	0,1344	0,0211
10	-0,0042	0,0268	0,0789	-0,0099	-0,0479	0,0578	-0,0042	0,0057	0,0211	0,0789

Умножение матрицы решения на ковариантный вектор воздействия (источники напряжения) дает отклики на ветвях сети, в данном случае это токи, контравариантные величины. Для экономии места запишем этот результат в виде строки:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
${}^m t_c^a =$	1,3637	0,9122	0,1050	1,6376	-0,5566	-1,0810	1,3637	-0,2739	1,1861	0,1050

Можно видеть, что они совпадают с теми, которые получены как дополнения узловых токов до значений потоков продуктов на нулевом этапе расчета баланса. Очевидно, что умножение метрической матрицы свободных ветвей на эти токи дает ковариантные отклики на ветвях сети, в данном случае это напряжения, которые мы уже получили.

Можно выбрать другой базис контуров. Контурные токи в ветвях должны дополнить токи в узловой сети до таких значений, которые уже были в свободных ветвях. То есть, контурная сеть должна дополнить узловую сеть в соответствии с инвариантом двойственности «по горизонтали». Такие инварианты рассмотрены в главе 4. Для этого открытые и замкнутые источники в каждой ветви должны обладать равной мощностью. Следовательно, значения источников ЭДС в каждой ветви должны равняться узловому току, деленному на проводимость в этой ветви. Тогда получим следующий вектор источников напряжения, которые расположатся в ветвях отраслей и ресурсов, а не в ветвях поставок, но отклики на них в ветвях получим такие же.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
${}^m e_a^0 =$	10	5	3	14,2857	6,25	3,75	0	0	0	0

При умножении матрицы решения на этот вектор воздействия получим вектор токов отклика в ветвях сети, которые в сумме с узловыми токами дадут токи в свободных ветвях.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
${}^m t_c^a =$	1,3637	0,9124	0,1051	1,6376	-0,5564	-1,0812	1,3637	-0,2739	1,1863	0,1051

Отличие этих контурных токов в ветвях от токов, полученных ранее, определяется только точностью расчета. Напряжения откликов в ветвях здесь принимают значения:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
${}^m e_a^c =$	1,3637	0,9124	0,1051	2,3395	-0,6955	-1,3515	13,6370	-0,9131	5,9316	1,0509

Отличие этих напряжений в ветвях от напряжений, полученных ранее, также определяется только точностью расчета. Это не оказывает влияния на результат расчета мощности в *связанной* контурной сети. Перемножение векторов тока и напряжения дает квадрат величины вектора потока энергии, или мощность в замкнутых путях  ${}^m P_c$  связанной контурной сети;  ${}^m P_c = 34,3769$ . Мощность в свободных ветвях, как показано ниже, различна.

Таким образом, получили не только подтверждение двойственного инварианта, но и пример возможности создать в сети одинаковое распределение токов и напряжений при различных способах задания источников напряжений в свободных ветвях.

*Применение контурной сети для расчета поставок.* Это принципиальный момент для моделирования живой системы хозяйства, способной накапливать свободную энергию, с помощью неживой сети, когда энергия только рассеивается при прохождении потока энергии. Для этого *организуется взаимодействие двух подпространств путей* в пространстве сети – замкнутых путей и разомкнутых путей. До этого два типа путей были независимые, ортогональные. Их взаимодействие состояло только в том, что замкнутые пути превращались в разомкнутые пути, при разрывании связей. Или, наоборот, разомкнутые пути превращались в замкнутые пути при соединении, слиянии узлов. Теперь потоки отклика в открытой сети используются для создания воздействия в замкнутой сети. Это возможно как раз благодаря тому, что переменные в ортогональных подпространствах не зависят друг от друга, а компоненты внешних и внутренних векторов могут возникать в каждой ветви одновременно, и не оказывают влияния друг на друга.

Возможность двойственного взаимодействия потоков в замкнутых и разомкнутых путях предоставляет структурный метод исследования и конструирования механизмов преобразования, в том числе, увеличения потоков энергии в системе, обладающей свойствами живого вещества. Этот механизм создает главный признак живого вещества и жизни в целом – способность увеличивать свободную энергию системы. Образуется обратная связь, когда отклики в открытой системе создают воздействия в замкнутой системе, а те, в свою очередь, увеличивают отклики в открытой системе, и так далее. В результате растут суммарные потоки в системе, одновременно открытой и замкнутой.

Матрица сопротивлений контуров сети получена выше. Умножаем ее на те источники ЭДС в контурах, которые получают на каждом этапе и расположены в поставках в соответствии со структурой сетевой модели. Полученные контурные токи в сумме с полученной ранее суммой токов представляют потоки продуктов на данном этапе расчета. Изменение разности между суммой токов, полученных на данном этапе, и на предыдущем этапе характеризует сходимость алгоритма к балансу потоков продуктов. То есть, когда

отрасли выпускают продукты в таком количестве, которые обеспечивают спрос, а также поставки в другие отрасли при необходимом потреблении ресурсов.

На первом этапе расчета необходимо создать такие источники напряжения, которые обеспечат контурные токи в сети, равные потокам поставок для выпуска *спроса*. Сюда входят потоки поставок, необходимые для выпуска спроса, соответствующие приращения выпусков отраслей и ресурсов. Потоки ресурсов возрастают или уменьшаются, но сумма приращений равна нулю, поскольку они сходятся в один узел. Эти токи в ветвях сетевой модели соответствуют результату вычисления потоков продуктов для первого члена степенного ряда.

Токи в контурах должны равняться поставкам, которые вычисляются как выпуск отрасли (на первом этапе это спрос), умноженный на коэффициент прямых затрат. На следующих этапах токи в контурах определяются приращением выпусков в отраслях. Эти приращения уменьшаются, поскольку сумма коэффициентов прямых затрат всех поставок в отрасль меньше (и даже много меньше) единицы. Таким образом, необходимо получить токи в контурах, которые соответствуют потокам поставок на первом этапе расчета баланса. Тогда их сумма на входе отраслей должна дать приращение выпуска, равное сумме этих поставок. А величина ресурса на входе должна измениться так, чтобы этот баланс выполнялся. Токи в контурах, определяемых ветвями поставок, на первом этапе имеют вид:

$$m_i^{a^*} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7^* & 8^* & 9^* & 10^* \\ \hline 0,5 & 3,0 & 0,6 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

Токам в контурах соответствуют напряжения в контурах. В каждой ветви, входящей в контур, току соответствует напряжение на ветви, пропорциональное сопротивлению. Сумма напряжений на ветвях контура равна сумме источников ЭДС в контуре. В данном случае предполагаем, что источник один, и он расположен в ветви поставки. Структура сетевой модели допускает такую возможность. Прделав эти вычисления с помощью матрицы преобразования и матрицы сопротивлений, получим значения вектора источников напряжения в контурах для первого этапа.

$$m e_a^J = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7^* & 8^* & 9^* & 10^* \\ \hline -1,3215 & 20,4205 & 9,975 & 2,125 \\ \hline \end{array}$$

Повторяя вычисления с новыми приращениями поставок, получим значения контурных токов и суммарных токов для следующих этапов. Изменение разности между значениями суммарных токов для данного и предыдущего этапов расчета показывает сходимость алгоритма. Эти результаты представлены в таблице 5.2, где показана сумма узловых и контурных токов (представляющих потоки продуктов) в ветвях на каждом этапе расчета, а также изменение этой суммы при переходе от одного этапа к следующему.

Таблица 5.2

**Сумма узловых и контурных токов в ветвях и их приращения по этапам расчета**

Ветви	Сумма узловых и контурных токов в ветвях					Приращения суммы токов по этапам			
	Этап 0	Этапы 0-1	Этапы 0-2	Этапы 0-3	Этапы 0-4	Этап 1 - 0	Этап 2 - 1	Этап 3 - 2	Этап 4 - 3
1 отрасль	10,000	10,500	10,860	10,8847	10,9027	0,500	0,360	0,025	0,018
2 отрасль	5,000	8,600	8,850	9,0302	9,0422	3,600	0,250	0,180	0,012
3 отрасль	3,000	3,500	3,860	3,885	3,903	0,500	0,360	0,025	0,018
4 ресурс	10,000	7,500	7,710	7,6266	7,6366	-2,500	0,210	-0,083	0,01
5 ресурс	5,000	7,599	7,129	7,2594	7,2354	2,600	-0,470	0,130	-0,024
6 ресурс	3,000	2,900	3,160	3,113	3,126	-0,100	0,260	-0,047	0,013
7 поставка	0,000	0,500	0,860	0,8847	0,9027	0,500	0,360	0,025	0,018
8 поставка	0,000	3,000	3,150	3,2581	3,2651	3,000	0,150	0,108	0,007
9 поставка	0,000	0,600	0,700	0,7721	0,7771	0,600	0,100	0,072	0,005
10 поставка	0,000	0,500	0,860	0,885	0,903	0,500	0,360	0,025	0,018

Быстрое уменьшение значений приращений в правых четырех столбцах таблицы показывает, что сумма токов в ветвях сходится к некоторым предельным значениям. Эти значения должны представлять потоки продуктов в сбалансированной сети отраслей, поставок и ресурсов, т.е. в системе производства.

Результаты расчета токов в сетевой модели, представлены в таблице 5.3, где показаны токи в ветвях на каждом этапе, а также сравнение суммы токов в сети и потоков продуктов в задаче баланса. Сумма контурных и узловых токов на нулевом этапе дает значения спроса в ветвях отраслей и ресурсов, нули в поставках. Следующие этапы расчета дают токи, которые представляют потоки продуктов в ветвях, возникающие при взаимных требованиях отраслей. Это соответствует результатам расчета очередных членов степенного ряда. Далее дана сумма токов за четыре этапа расчета. Затем даны точные значения потоков продуктов, полученные при расчете самой задачи баланса. В последнем столбце – разность между суммой токов в модели и потоками продуктов в отраслях, поставках и ресурсах.

Таблица 5.3

**Результаты расчета сетевой модели баланса продуктов**

Сумма токов представляет потоки продуктов в отраслях, поставках и ресурсах

Ветви	Токи в ветвях						Сумма узловых и контурных токов за этапы 0-4	Точный расчет потоков продуктов	Отклонения токов в ветвях от потоков продуктов
	Нулевой этап		Этап 1	Этап 2	Этап 3	Этап 4			
	Узловая сеть	Контурная сеть	Контурная сеть	Контурная сеть	Контурная сеть	Контурная сеть			
1 отрасль	8,6363	1,3637	0,500	0,360	0,025	0,018	10,9027	10,9053	-0,0026
2 отрасль	4,0876	0,9124	3,600	0,250	0,180	0,012	9,0422	9,0526	-0,0104
3 отрасль	2,8949	0,1051	0,500	0,360	0,025	0,018	3,903	3,9053	-0,0023
4 ресурс	8,3624	1,6376	-2,500	0,210	-0,083	0,010	7,6366	7,6337	0,00289
5 ресурс	5,5564	-0,5564	2,600	-0,470	0,130	-0,024	7,2354	7,2421	-0,00668
6 ресурс	4,0812	-1,0812	-0,100	0,260	-0,047	0,013	3,126	3,1242	0,00176
7 поставка	-1,3637	1,3637	0,500	0,360	0,025	0,018	0,9027	0,9053	-0,00256
8 поставка	0,2739	-0,2739	3,000	0,150	0,108	0,007	3,2651	3,2716	-0,00649
9 поставка	-1,1863	1,1863	0,600	0,100	0,072	0,005	0,7771	0,7811	-0,00396
10 поставка	-0,1051	0,1051	0,500	0,360	0,025	0,018	0,903	0,9053	-0,00226

Отклонение суммы контурных и узловых токов в сетевой модели от потоков продуктов в сети хозяйства, которые получены в результате расчета задачи баланса, за 4 этапа вышло на уровень заданной точности вычислений. Это показывает, что сетевая модель в данной предметной области правильно представляет систему связанных отраслей.

В таблице 5.4 представлены значения источников напряжения в контурах и на ветвях сети по этапам расчета. Сумма напряжений показывает пропорции распределения полных воздействий (денежных средств) в отраслях, поставках и ресурсах.

Таблица 5.4

**Напряжения в ветвях отраслей, поставок и ресурсов по этапам расчета**

Ветви	Напряжения в ветвях и контурах сети						Сумма контурных напряжений за 4 этапа	Сумма узловых и контурных напряжений за этапы 0-4	Сумма контурных токов за 4 этапа
	Нулевой этап		Этап 1	Этап 2	Этап 3	Этап 4			
	Узловая сеть, $E_{\alpha}^c$	Контурная сеть, ${}^m E_{\alpha}^c$	Контурная сеть	Контурная сеть	Контурная сеть	Контурная сеть			
1 отрасль	8,6363	1,3637	0,500	0,360	0,025	0,018	0,903	10,903	0,903
2 отрасль	4,0876	0,9124	3,600	0,250	0,180	0,012	4,042	9,042	4,042
3 отрасль	2,8949	0,1051	0,500	0,360	0,025	0,018	0,903	3,903	0,903
4 ресурс	11,9462	2,3395	-3,572	0,300	-0,119	0,015	-3,376	10,910	-2,363
5 ресурс	6,9455	-0,6955	3,250	-0,588	0,162	-0,029	2,795	9,045	2,236
6 ресурс	5,1015	-1,3515	-0,125	0,325	-0,059	0,016	0,157	3,907	0,126
7 поставка	-13,6370	13,6370	5,000	3,600	0,250	0,180	9,030	9,030	0,903
8 поставка	0,9131	-0,9131	10,000	0,500	0,360	0,025	10,884	10,884	3,265
9 поставка	-5,9316	5,9316	3,000	0,500	0,360	0,025	3,885	3,885	0,777
10 поставка	-1,0509	1,0509	5,000	3,600	0,250	0,180	9,030	9,030	0,903
ЭДС в контурах							Сумма ЭДС за 4 этапа		
Контур 7	0	18,036	-1,3215	4,848	-0,006	0,242	3,762	21,798	0,903
Контур 8	0	-3,036	20,4205	-0,138	0,821	-0,007	21,097	18,061	3,265
Контур 9	0	7,498	9,975	-0,163	0,761	-0,008	10,566	18,064	0,777
Контур 10	0	0,5	2,125	4,873	0,054	0,244	7,295	7,795	0,903
Мощность в сети	284,9803	34,3769	67,6495	3,46256	0,14466	0,00863	87,0786		162,5901
Мощность в свободных ветвях: $284,9803 + 34,3769 = 319,3572$							Мощность в узловой и контурной сети за этапы 0-4: 406,4358		

В столбцах таблиц суммы узловых и контурных токов и напряжений, полученные за этапы расчета 0-4, в ветвях отраслей и поставок совпадают, отличия есть только в ветвях ресурсов. В ветвях отраслей это вызвано тем, что коэффициенты метрики (сопротивления и проводимости) единичные. При наличии собственного потребления отраслей картина изменится. В ветвях поставок токи определяют контурные источники, при их построении взаимно обратные значения сопротивлений и проводимостей компенсируют друг друга.

**Мощность, рассеиваемая в сетевой модели.** Для всех этапов рассмотрим распределение мощностей в свободных ветвях и в связанной сети. Сделаем расчет этих мощностей в узловой сети, контурной сети (нулевой этап), а также мощности в контурных сетях по итерациям и суммарное значение полной мощности. Результаты части расчетов показаны в последней строке таблицы 5.4. Кроме того, расчет мощностей и их изменений далее будет сделан для двойственных сетей.

*Мощность, рассеиваемая в сети свободных ветвей.* В таблице 5.5 представлены токи, напряжения и рассеиваемая мощность в сети свободных ветвей при исходном (открытом) воздействии, а также при компенсирующем (замкнутом) воздействии на нулевом этапе. Представлены токи, напряжения и мощность для замкнутых воздействий, которые возникают на этапах расчета, когда происходит обмен поставками между отраслями.

Таблица 5.5

**Воздействия, отклики и мощность в свободных ветвях сетевой модели**

Ветви	Нулевой этап						Этапы 1-4		Контурная сеть, все этапы	
	Узловая сеть		Контурная сеть		Контурная сеть		Контурная сеть			
	Токи (спрос)	Напряжения (отклик)	Источник (ЭДС в отраслях, ресурсах)	Токи (отклик)	Источник (ЭДС – ветви-поставки)	Токи (отклик)	Источник (ЭДС – поставки)	Токи (отклик)	Напряжения	Токи
1 отрасль	10	10	10	10	0	0	0	0	0	0
2 отрасль	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0
3 отрасль	3	3	3	3	0	0	0	0	0	0
4 ресурс	10	14,286	14,286	10	0	0	0	0	0	0
5 ресурс	5	6,25	6,25	5	0	0	0	0	0	0
6 ресурс	3	3,75	3,75	3	0	0	0	0	0	0
7 поставка	0	0	0	0	18,036	1,8036	3,762	0,3762	21,798	2,1798
8 поставка	0	0	0	0	-3,036	-0,9108	21,097	6,3291	18,061	5,4183
9 поставка	0	0	0	0	7,498	1,4996	10,566	2,1132	18,064	3,6128
10 поставка	0	0	0	0	0,5	0,05	7,295	0,7295	7,795	0,7795
Мощность	319,3571		319,3571			46,5639		162,59		216,713

Предположим, что свободные ветви узловой сети не связаны друг с другом и образуют разомкнутые пути. Источниками являются внешние воздействия. Аналогично, пусть свободные ветви контурной сети не связаны друг с другом и образуют замкнутые пути. Источниками являются внутренние воздействия. В свободных ветвях источники токи и напряжения отклика одновременно действовать не могут, поскольку каждая свободная ветвь сама по себе либо замкнутая, либо разомкнутая. Но для каждой ветви есть двойственная, которая, наоборот, либо разомкнутая, либо замкнутая. По этой причине потоки и, соответственно, мощности, которые рассеиваются в свободных контурной и узловой сетях, располагаются либо в данном пространстве, либо в двойственном пространстве.

Таким образом, для свободных ветвей можно собрать вместе либо внешние источники, либо внутренние. Внешние источники и отклики уже представлены в двух первых столбцах таблицы 5.5. В следующих парах столбцов представлены отклики на внутренние источники нулевого этапа и следующих этапов расчета, причем так, как если бы уже получены потоки продуктов в окончательном виде, а затем ветви снова разъединены. При этом предполагается, что все внутренние источники расположены в поставках.

Заметим, что если на этапе 0 контурные источники расположить в отраслях и ресурсах, то это контурная сеть, двойственная к узловой сети. В этом случае, мощности в *каждой* свободной открытой ветви, рассеиваемая узловым источником, и в свободной замкнутой

ветви, рассеиваемая контурным источником, равны друг другу. Сумма рассеиваемых мощностей контурных и узловых источников в *совокупности* ветвей связанной сети постоянная, т.е. подчиняется инварианту мощности «по горизонтали».

Если на этапе 0 контурные источники расположены в поставках, то эта контурная сеть не двойственная к узловой сети, где источники расположены в отраслях и ресурсах. Мощности в свободных ветвях от контурных и узловых источников различные.

В последних столбцах таблицы 5.5 представлены отклики и мощность от суммы внутренних источников этапа 0 и четырех этапов расчета. Мощность является квадратичной функцией, поэтому мощность суммы двух векторов источников в свободных ветвях имеет значение больше, чем для тех же источников по отдельности. Когда контурные источники действуют в свободных ветвях совместно, то происходит усиление мощности по сравнению с тем, как если бы они действовали по отдельности. Например, если источники расположены в поставках, то на нулевом этапе они дадут мощность, равную 46,56, а на этапах 1–4 они дадут мощность, равную 162,59; их сумма равна  $46,56 + 162,59 = 209,15$ . Если же все эти источники действуют совместно (правые столбцы таблицы 5.5), то мощность равна 216,715.

*Мощность, рассеиваемая в связанной сети.* Аналогичная ситуация с контурными источниками происходит и в связанной сети. При этом внешние и внутренние источники не оказывают влияния друг на друга и на рассеиваемую мощность в силу ортогональности замкнутых и разомкнутых путей (раздел 4.1.3).

Токи и напряжения для расчета мощности в связанной сетевой модели, а также мощности в подсетях замкнутых и разомкнутых путей представлены в таблице 5.6.

Таблица 5.6

**Воздействия, отклики и мощность в ветвях связанной сетевой модели**

Ветви	Нулевой этап				Этапы 1-4		Этапы 0-4		Все сети, все этапы, отклики в ветвях	
	Узловая сеть		Контурная сеть		Контурная сеть		Контурная сеть		Напряжения	Токи
	Токи (отклик)	Напряжения (отклик)	Напряжения (отклик)	Токи (отклик)	Напряжения (отклик)	Токи (отклик)	Напряжения (отклик)	Токи (отклик)		
1 отрасль	8,6363	8,6363	1,3637	1,3637	0,903	0,903	2,2667	2,2667	10,903	10,903
2 отрасль	4,0876	4,0876	0,9124	0,9124	4,042	4,042	4,9544	4,9544	9,042	9,042
3 отрасль	2,8949	2,8949	0,1051	0,1051	0,903	0,903	1,0081	1,0081	3,903	3,903
4 ресурс	8,3624	11,9462	2,3395	1,6376	-3,376	-2,363	-1,0365	-0,7254	10,910	7,637
5 ресурс	5,5564	6,9455	-0,6955	-0,5564	2,795	2,236	2,0995	1,6796	9,045	7,236
6 ресурс	4,0812	5,1015	-1,3515	-1,0812	0,157	0,126	-1,1945	-0,9552	3,907	3,126
7 поставка	-1,3637	-13,6370	13,6370	1,3637	9,030	0,903	22,667	2,2667	9,030	0,903
8 поставка	0,2739	0,9131	-0,9131	-0,2739	10,884	3,265	9,9709	2,9911	10,884	3,265
9 поставка	-1,1863	-5,9316	5,9316	1,1863	3,885	0,777	9,8166	1,9633	3,885	0,777
10 поставка	-0,1051	-1,0509	1,0509	0,1051	9,030	0,903	10,0809	1,0081	9,030	0,903
Мощность	284,9803 + 34,3769 = 319,3571				87,0786		146,7582		431,712	

Мощность внешних источников в связанных ветвях (разомкнутые пути) равна сумме произведений токов и напряжений первых двух столбцов таблицы, т.е. равна 284,9803.

Мощность внутренних источников в связанной сети, действующих в замкнутых путях (на этапе 0) равна сумме произведений токов и напряжений следующей пары столбцов, т.е. 34,3769. На нулевом этапе сумма мощности в узловой сети и мощности в контурной сети равна  $284,9803 + 34,3769 = 319,3571$ , т.е. равна мощности сети свободных ветвей.

В последних столбцах представлены отклики и мощность от суммы внешних и внутренних источников этапа 0 и четырех этапов расчета. Мощность является квадратичной функцией, поэтому мощность суммы двух векторов источников в свободных ветвях имеет значение больше, чем для тех же источников по отдельности.

Мощность, рассеиваемая в сети, при сложении откликов от контурных источников возрастает с  $34,3769 + 87,0786 = 121,4555$  (если их рассматривать по отдельности), до 146,7582, когда они включены вместе (расчет по сумме токов и напряжений на ветвях). Это происходит потому, что это квадратичная функция. Однако при одновременном действии узловых и контурных источников мощность есть аддитивная функция в силу ортогональности замкнутых и разомкнутых путей. Это показано в разделе 4.1.3.

Сумма мощности в узловой сети и мощности всей совокупности источников в контурной сети равна  $284,9803 + 146,7582 = 431,7385$ . Это равно мощности, полученной как сумма произведений контурных и узловых откликов в ветвях от всех источников в сети, при заданной структуре и величине спроса, которые получены на всех этапах расчета, т.е. равно 431,712 (с учетом точности вычислений).

Вместе с тем структурная мощность, которая накапливается по этапам в контурах *связанной* сети, предполагает возрастание мощности источников в *свободных* ветвях. Это означает, что в полной сетевой модели, которая представляет окончательное распределение потоков продуктов, суммарная мощность источников больше, чем мощность первоначальных источников, представляющих только конечный спрос. Очевидно, что компенсирующие источники на нулевом этапе правильнее располагать в поставках (и затем их постепенно наращивать), поскольку поставки представляют структуру связей в системе производства продуктов.

Таким образом, на нулевом этапе не происходит возрастания мощности. Внешние и внутренние источники на этом этапе друг друга дополняют, но не усиливают. Возрастание мощности возникает на этапах расчета поставок, когда отрасли начинают обмениваться продукцией в рамках специализации и разделения труда. Усиление мощности обеспечивает структура, которая создается хозяйственными связями.

Мощность быстро уменьшается по мере вычисления «волн» поставок, очередных членов степенного ряда, однако за 4 этапа здесь в сумме накапливается, как можно видеть,



87,0786. В силу того, что связей не много, а их коэффициенты невелики, структурная мощность оказалась значительно меньше мощности производства для обеспечения спроса.

Сетевая модель потоков продуктов и денежных средств, благодаря соединению процессов и структуры, предоставляет скрытый механизм того, как работает социально-экономическая система в качестве усилителя мощности.

Надо только найти экономический эквивалент понятия мощности. Возможно, что это можно отождествить с прибылью, под которую выдаются кредиты.

Произведем расчет мощности, которая возникает в контурной сети (в отраслях, поставках и ресурсах) на каждой итерации при вычислении потоков поставок.

При этом мощность, вызванная самим спросом, должна быть равна половине мощности в свободных ветвях, поскольку определялась спросом, представленным токами (внешними источниками) в узлах выхода отраслей, т.е. она должна быть равна  $319,3572/2 = 159,6786$ .

В любом случае это мощность самого производства для обеспечения спроса, как если бы ремесленные производства выпускали конечную продукцию сами – от добычи ресурсов до продажи товаров и услуг конечным потребителям. Здесь не учитываются потоки товарообмена, заданные структурой хозяйственных связей, которые представлены поставками, увеличивающими выпуски и меняющими ресурсы.

**Токи и напряжения в ветвях сетевой модели.** Совокупность токов соответствует потокам продуктов в системе производства. На рис. 5.18 представлены отклики на воздействия (спрос) в сетевой модели в виде ковариантных компонент вектора (токов):

- отклики на внешнее воздействие (спрос) – токи в разомкнутых путях
- отклики в замкнутых путях, компенсирующие узловое воздействие, приводящие суммарные токи в сети к нулевому этапу расчета баланса потоков продуктов
- отклики в замкнутых путях, моделирующие спрос со стороны отраслей на поставки продукции друг друга.

Все эти отклики отражают различные аспекты хозяйственной деятельности.

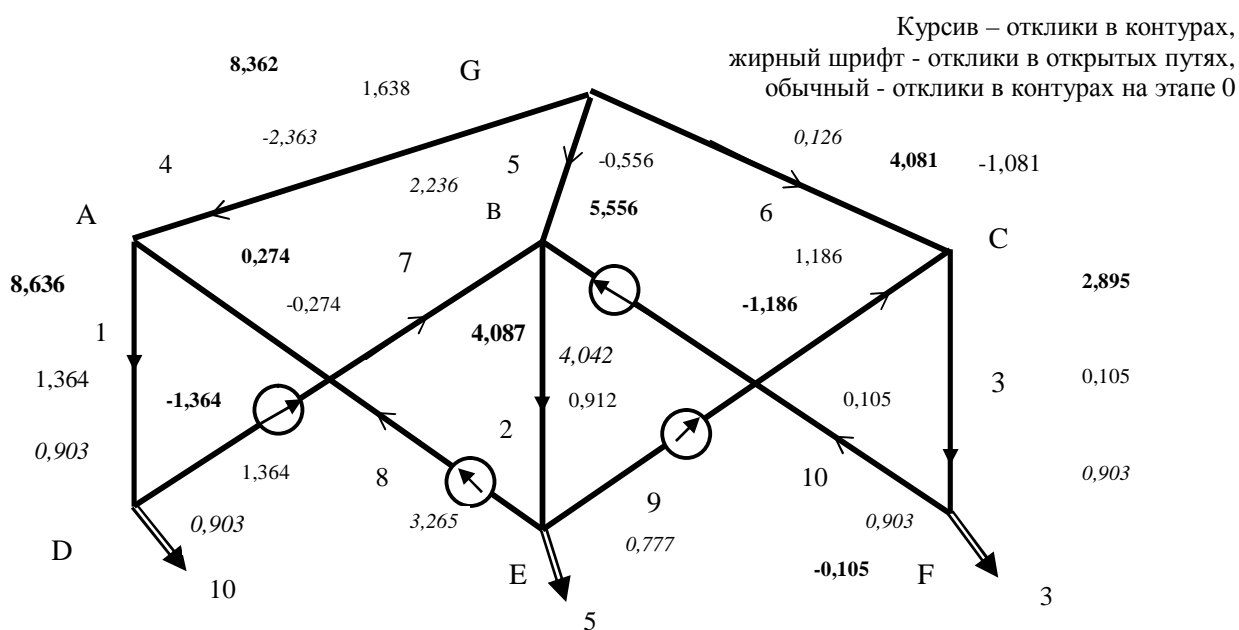


Рис. 5.18. Результаты расчета потоков продуктов (токи) в сетевой модели

Аналогичную картину следует рассмотреть для напряжений, а также для полных токов и напряжений в сетевой модели после завершения расчетов, т.е. после достижения баланса потоков продуктов в отраслях, поставках и ресурсах. Особый интерес представляет распределение напряжений, поскольку они должны быть пропорциональны (с точностью до курсов валют и скорости оборота денег) распределению финансовых потоков, которые обеспечивают работу данной системы производства. По-видимому, речь может идти о распределении оборотных средств. Вопросы получения прибыли, создания прибавочной стоимости, кредитования, инвестирования в обновление производства и т.д. в данной модели не рассматриваются. На рис. 5.19 представлено распределение напряжений в ветвях, сложившееся по результатам расчета нулевого этапа (внешние воздействия, спрос и внутренние, компенсирующие воздействия), а также по результатам расчетов внутренних воздействий последующих этапов.

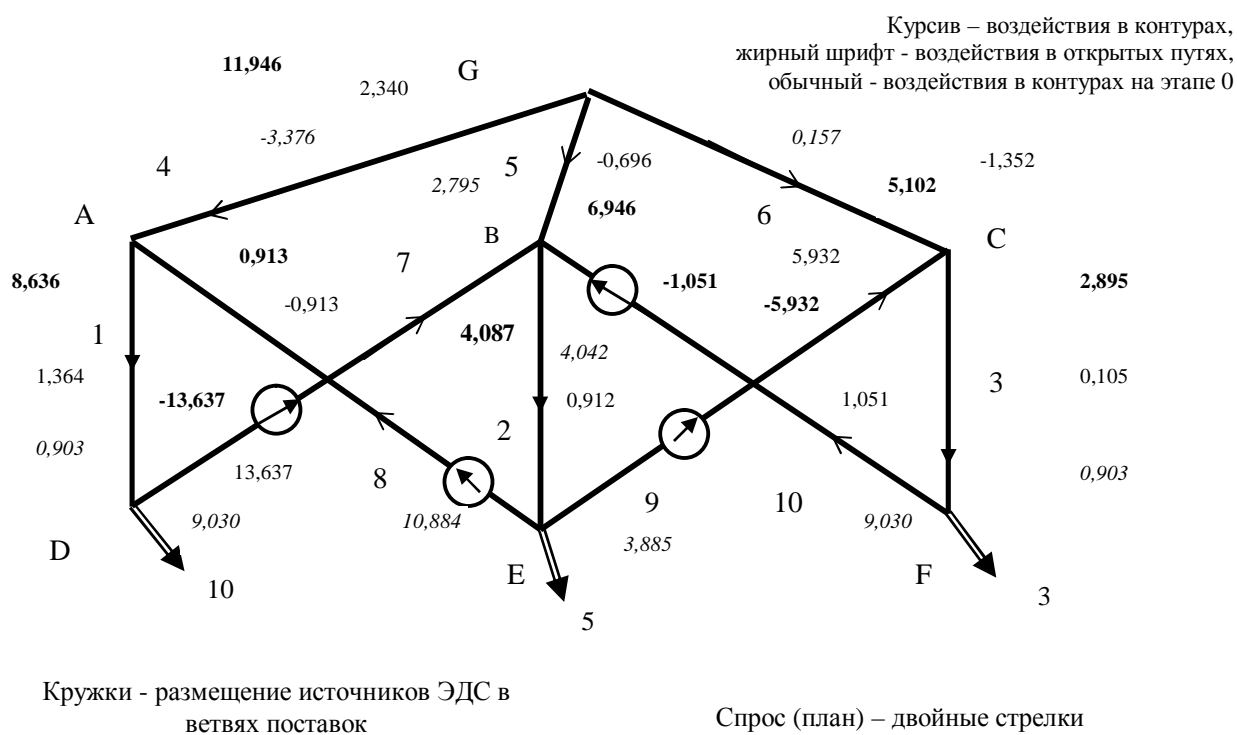


Рис. 5.19. Результаты расчета воздействий (напряжения) в сетевой модели

Каким образом можно сопоставить значения напряжений разных типов в сетевой модели и значения денежных потоков в реальной системе производства?

Для анализа распределения напряжений, их сопоставления с финансовыми показателями, необходимо рассмотреть модель с реальными данными, например, производства и распределения ВВП.

**Сетевые модели баланса и электромагнитные аналогии.** Рассмотренная модель межотраслевого баланса отражает простейшие процессы в экономике, которые соответствуют стационарным потокам в условиях стабильных цен. Такая модель может представить состояние хозяйства, и его возможности по обеспечению потребностей населения при заданном уровне спроса (определенном ценностями и идеалами социальных групп в настоящее время). Для моделирования инновационной экономики, когда постоянно происходит структурная перестройка, возникают новые отрасли, в условиях изменения структуры цен, нужна модель более высокого класса. Она должна отражать изменения в потоках продуктов при изменении цен, а также изменения в ценах при изменении потоков продуктов. И обеспечить расчет состояния и перспектив таких изменений. Например, влияние снижения производства нефти на динамику мировых цен, или снижение цен на компьютеры в условиях насыщения рынка. Или изменение стоимости в долларах: нефти, золота, серебра, евро – при уменьшении стоимости самой валюты США.

Математический метод, который связывает взаимное влияние изменения физических величин, определяющих разные физические явления – это уравнения электромагнитного поля Максвелла. Они были получены на основе сетевой модели, которая сложилась в результате анализа опытов Фарадея. В работе Максвелла «О физических силовых линиях», опубликованной в 1861 году (Максвелл, 1954 с. 143) приводится следующая наглядная картина электромагнитных процессов, которая представлена здесь на рис. 5.16 слева.

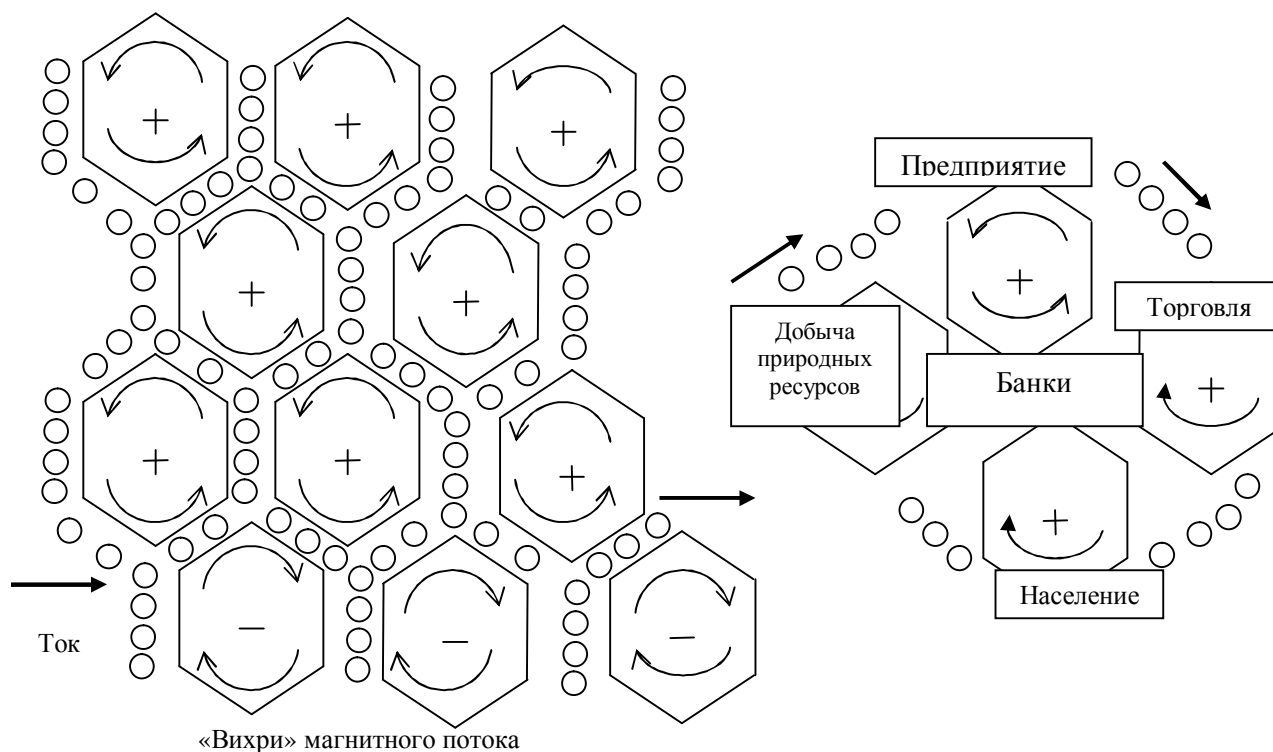


Рис. 5.20. Аналогии сетевой модели электромагнитного поля Максвелла (слева) и сетевой модели товарно-денежного оборота в экономике (справа)

Слева маленькие кружки представляют поток электрического тока, который поступает в среду и покидает ее по направлению стрелок. Воздействием является электродвижущая сила, изменение (возрастание или убывание) которой приводит в движение потоки энергии. Шестиугольники представляют вихри (магнитного потока), которые закручиваются в направлении по часовой стрелке, или против часовой стрелки, постепенно передают энергию вращения соседним вихрям. А те, своим вращением, заставляют двигаться другие носители электрического тока. При снятии нагрузки вихри своей инерцией поддерживают ток, сопротивляясь его мгновенному затуханию.

Если воздействием является изменение (возрастание или убывание) магнитного поля, то откликом является поток электрической энергии, ток. Переходный процесс постепенно распространяется в среде. При снятии нагрузки ток, в виде движения зарядов, поддерживает магнитное поле, сопротивляясь его мгновенному затуханию.

Аналогом данной сетевой модели является общая схема товарно-денежных потоков в системе хозяйства, представленная на рис. 5.1. Потоки денежных средств обозначены там шестиугольниками, пунктиром. Этот процесс показан схематично на рис. 5.16 справа, где кружки представляют движение продуктов между хозяйствующими субъектами, а шестиугольники представляют оборот кредитно-денежных средств через расчетные, депозитные или кредитные счета в банках.

Изменение финансирования (предоставление кредита, выделение средств бюджета) приводит к возникновению потока продуктов в результате производственной деятельности. Изменение продуктов (появление новых продуктов в результате инновационной деятельности) приводит к возникновению, увеличению финансирования. Все новые продукты всеобщего спроса, возникшие в результате научно-технической деятельности, (телефония, электрические машины, автомобили, авиация, химическая промышленность, компьютеры) притягивали финансирование в эти новые отрасли. Это возникает потому, что здесь возникает высокая норма прибыли за счет спроса на редкий продукт. Заметим, что общество должно быть готово к осознанию необходимости этого продукта.

Отличие состоит в том, что электромагнитное поле рассеивает (теряет) потоки энергии (неживая система). Система хозяйства еще и увеличивает потоки свободной энергии (живая система). Привлечение потоков капиталов в новые отрасли постепенно делает новые продукты обычными, получившими широкое применение. Первоначально высокая норма прибыли здесь снижается до средней нормы прибыли в системе воспроизводства. Экономика плавно растет до следующего скачка.

Одним из не осознанных до сих пор инвариантов в этой области является значение темпа роста отдельных государств и мировой экономики в целом. Один процент – почти кризис; десять и более процентов – экономическое чудо, таящее в себе опасность спада. От трех до пяти процентов в течение длительного периода – похоже на устойчивое развитие. Можно просто сказать, что инвариант в четыре процента задан нам условиями окружающей среды. Для научного анализа необходимо сетевое моделирование процессов и структуры социально-экономического комплекса на основе измеримых величин.

## 5.2. Анализ результатов деятельности банков и предприятий

Сетевая модель применяется для анализа результатов, а также прогнозирования деятельности банков и промышленных предприятий на основе расчета потоков продуктов и денежных средств. Денежные потоки не зависят друг от друга, когда они вложены в независимые каналы (активы). Например, если сумма денежных средств (в наличной или безналичной форме) вложена в ценные бумаги, то она не взаимодействует с суммами денежных средств, которые вложены в недвижимость, участвуют в платежах и т.д. Потоки продуктов зависят друг от друга в пределах технологических цепочек, когда поставки согласуются по месту, времени, количеству и качеству.

### 5.2.1. Потоки денежных средств в банках

Потоки продуктов как замкнуты (через взаимные поставки), так и разомкнуты через природные ресурсы и потребителей и соответствуют подсети разомкнутых путей. Потоки денежных средств имеют характер замкнутых путей и соответствуют контурной подсети. Эти потоки циркулируют в обществе, не имея контакта с окружающей средой. Природа создавала ресурсы от начала мира и не использовала денежной сферы. Потоки денежных средств асинхронны: банк, предприятие, торговая фирма, производят платежи, вложения денежных средств отдельными суммами в разные моменты времени и на разные сроки. Прибыль от разных сумм поступает в разные даты, но в совокупности эти поступления составляют поток прибыли за определенный период. Объем этого потока определяет эффективность деятельности предприятия или кредитной организации.

Предприятие характеризуют потоки двух видов: продуктов (поставки плюс ресурсы, цикл производства и отпуск продукции потребителям) и денежных средств (поступает плата за отгруженную продукцию, дебиторская задолженность, затраты на производство, оплата поставок и привлеченных кредитов, кредиторская задолженность). Пути потоков продуктов и потоков денег не совпадают, они образуют разные сети.

Сеть денежных потоков двойственна к сети потоков продуктов. Движение потоков денежных средств (наличные и безналичные деньги, ценные бумаги и т.д.) происходит в сфере финансов. Ее основу составляют банки, страховые, инвестиционные и финансовые компании – узлы сети денежных потоков.

Схема движения потоков денежных средств в банке (кредитной организации) показана на рис. 5.21. Банк располагает собственными средствами, которые составляют его капитал. Банк аналогичен трансформатору, который преобразует напряжение на входе в другое напряжение на выходе. В банке образуется несколько циклов, как на входе, так и на выходе. Таким образом, банк работает как трансформатор на нескольких частотах, определяемых скоростью оборота денег по разным каналам.

Банк привлекает (покупает) денежные средства от населения, предприятий, государства, других банков на определенные сроки. За использование средств он платит владельцам. Банк размещает (продает) средства: кредиты заемщикам, инвестиции в ценные бумаги и др.; за это платят банку. Часть средств резервирует на случай потерь. По истечении срока средства возвращают банку с процентами (составляющими доход); это одна группа циклов. Банк возвращает привлеченные средства с процентами (расходы); это другая группа циклов, по которым совершают оборот привлеченные денежные средства.

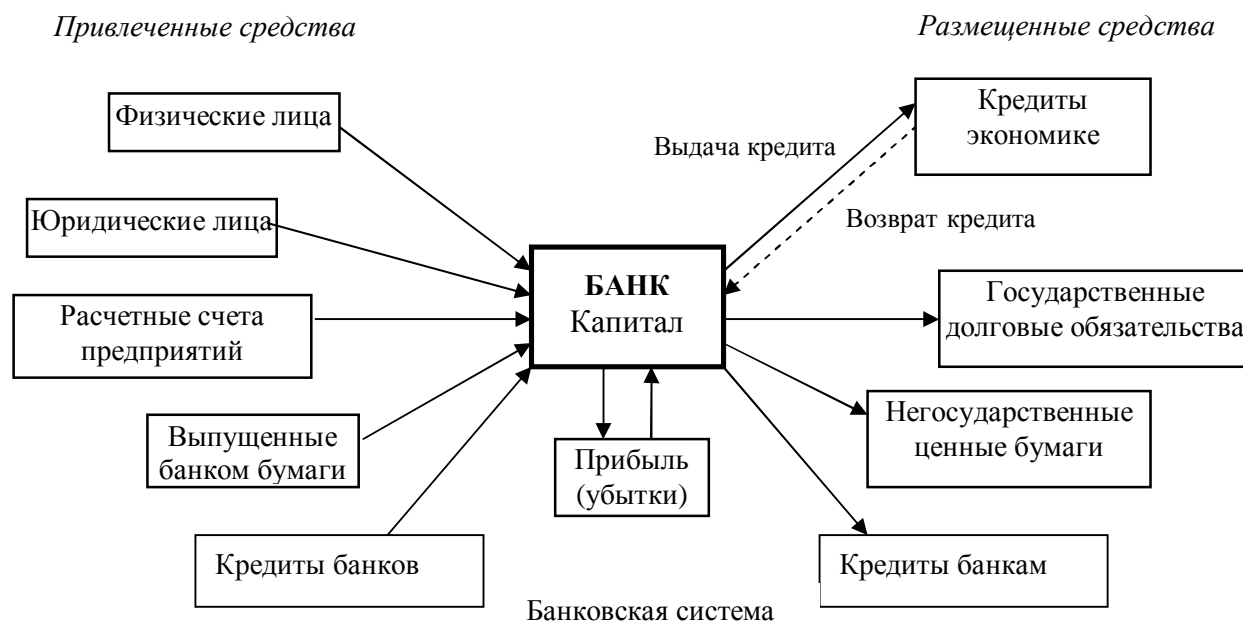


Рис. 5.21. Схема движения потоков денежных средств в банке

Разность между доходами и расходами составляет прибыль. Анализ состояния и динамики развития банков, групп банков, банковской системы в целом представляет практический интерес для клиентов, партнеров и конкурентов в условиях рыночной экономики. На сегодня в России сложилась двухуровневая банковская система. На верхнем уровне располагается Центральный банк Российской Федерации (Банк России). Он регулирует денежное обращение, единую денежно-кредитную политику страны, организует расчетно-кассовое обслуживание, контролирует деятельность банков и других кредитных организаций, которые составляют нижний уровень.

При денежном обращении происходит движение денег в качестве средств обращения и платежа, что обеспечивает обмен продуктов (товаров и услуг). Пути потоков денежных средств замкнуты. Они начинаются и заканчиваются в банках. Это аналогично силовым линиям магнитного потока, которые также всегда замкнуты. Материальные средства

извлекают из окружающей среды (добыча ресурсов), превращают в потоки продуктов, обменивая на деньги в процессе производства и потребления, а затем возвращают также в окружающую среду в виде отходов. Пути потоков продуктов как замкнуты, так и разомкнуты. Они похожи на электрические силовые линии, которые начинаются и заканчиваются на зарядах. Денежное обращение в финансовой сети обеспечивает продвижение продуктов в сети производства и потребления. Сети потоков продуктов и денежных средств постоянно пересекаются, но не совпадают. Они совпадают лишь в том, что деньги сами есть товар, который можно покупать и продавать (на определенное время). Именно это делают банки и другие финансовые компании.

Движение денежных средств в одном банке показано на рис. 5.21. По нескольким каналам (средства и депозиты юридических и физических лиц, кредиты других банков, выпущенные ценные бумаги) в банк поступают привлеченные средства (с отличиями в датах поступления, сроках привлечения средств, цене – ставке привлечения и т.д.). За вычетом резервов, остальные средства размещаются по разным каналам (также с отличиями по датам, срокам и ставкам). Превышение доходов от размещения над расходами по привлечению дает прибыль. Банки связаны со сферой реального производства и между собой. Схема движения потоков денежных средств в банковской системе, их связь с реальным сектором, составляющая модель финансовой сети показана на рис. 5.22.

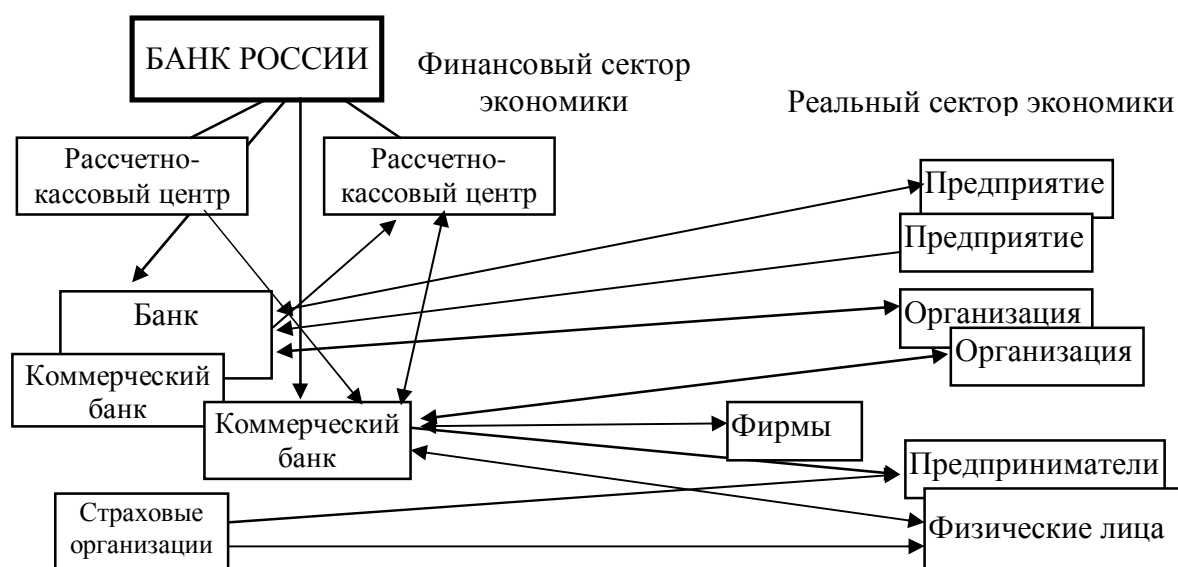


Рис. 5.22. Схема потоков денежных средств в экономике

Предприятия, организации и население (юридические и физические лица) проводят расчеты через банки, вкладывают средства, получают ссуды и т.д. Банки предоставляют ссуды, как реальному сектору, так и другим банкам. Это межбанковские кредиты полученные (кредиты других банков, КДБ), и предоставленные (МБК). Финансовая система образует сложную сеть, в которой текут потоки разных типов по разным путям. Пути



проходят по отдельным ветвям, где поток одного типа движется в одном направлении. В системе общественного воспроизводства продуктов (товаров и услуг) банк (по физической аналогии) играет роль трансформатора, который собирает (покупает) денежные средства и затем размещает (продает) их туда, где ожидается наибольшая прибыль.

Модель потоков денежных средств соответствует финансовой подсети сетевой модели баланса потоков продуктов (раздел 5.1). Банк – это часть экономики, которая не только рассеивает, но и накапливает потоки энергии (в денежном эквиваленте) в результате трансформации потоков денежных средств в наличной и безналичной форме. Прибыль или убыток банка характеризуют его способность работать в качестве усилителя мощности.

### 5.2.2. Измеримые показатели и отчетность банков

Системой координат для измерения материальных и денежных средств является бухгалтерский учет. В рамках учета отображается состояние и движение денежных и материальных средств и их источников. Основой учета является единая система счетов, которые сведены в нормативный документ – «План счетов бухгалтерского учета в банках РФ». Отдельный *счет* вводится для каждого вида средств (активов) и каждого вида источников средств (пассивов). Например, до 01.02.1998 старый План счетов, СПС состоял из 25 разделов балансовых счетов (счета первого порядка) и 10 разделов внебалансовых счетов (Андросов, 1995). Не были разделены средства в рублях и в иностранной валюте.

В настоящее время действует новый План счетов, НПС, определяемый «Правилами бухгалтерского учета в кредитных организациях (КО), расположенных на территории Российской Федерации» (*Положение Банка России №205-П*). В НПС по каждому счету (виду банковской деятельности) представлены суммы денежных средств в рублях, в иностранной валюте (в рублевом эквиваленте), а также их сумма. Счета сведены в 7 разделов (Капитал и фонды, Денежные средства и драгоценные металлы, Межбанковские операции, Операции с клиентами, Операции с ценными бумагами, Средства и имущество, Результаты деятельности). В этих разделах трехзначные счета первого порядка определяют вид деятельности. Например, счет 455 означает «Кредиты, предоставленные физическим лицам». Добавление еще двух знаков детализирует смысловое содержание счета. Такой пятизначный счет и называется счетом второго порядка. Например, счет 45505 означает «Кредиты, предоставленные физическим лицам» на срок от 181 дня до 1 года. По нему проходят все кредиты, предоставленные физическим лицам от полугода до года, составляя денежный поток в банковской сети. Счета представляют, по сути, оси «системы координат» многомерного пространства, каждое измерение которого (например, счет первого порядка) является независимым направлением потоков денежных средств. Формат описания таких измерений представлен в отчетности оборотно-сальдовой ведомостью, которая имеет вид:

№№ счета	Входящие остатки			Обороты по активам			Обороты по пассивам			Исходящие остатки		
	Рубли	Валюта	Сумма	Рубли	Валюта	Сумма	Рубли	Валюта	Сумма	Рубли	Валюта	Сумма
10203												
20202												

Это финансовый отчет за месяц. Исходящие остатки предыдущего месяца равны входящим остаткам последующего месяца, что обеспечивает непрерывность учета денежных потоков во времени. Эти значения показывают суммы средств на счетах на эти даты, характеризуя состояние банка на данный момент времени. Потоки денежных средств отражены оборотами в течение месяца. Они показывают, какие средства приходили на счета банка извне, а какие покидали его, и в каком количестве. Обороты, в сочетании со счетами банков, предприятий и организаций, откуда пришли, и куда перечислены средства, обеспечивают расчеты в сети денежных потоков, сопоставляя их с потоками продуктов в сети реального сектора. Это обеспечивает анализ, прогнозирование и управление. Сумма по счету есть значение потока денег по данному измерению, ветви денежной сети.

Счета исключают или вводят по мере необходимости отражать изменения в социально-экономической системе. Например, в 1998-2002 гг. Банк России своими Указаниями ввел в План счетов бухгалтерского учета в КО РФ ряд изменений: исключил некоторые счета, ввел новые счета, изменил формулировки ряда счетов. Эти изменения сгруппированы и представлены в Положении от 5.12.2002 № 205-П «О правилах ведения бухгалтерского учета в кредитных организациях, расположенных на территории Российской Федерации».

В 2003-2006 гг. внесены очередные изменения и дополнения в Положение Банка России от 5 декабря 2002 года № 205-П «О правилах ведения бухгалтерского учета в кредитных организациях, расположенных на территории Российской Федерации». В результате некоторые счета исключены, содержание других изменилось. Введен целый ряд новых счетов. Эти изменения отражены в указаниях Банка России. В Положении Банка России, которое начинает действие с 2008 года, № 302-П, отражен следующий комплекс изменений в правилах ведения бухгалтерского учета. С точки зрения сетевых моделей, эти изменения являются изменениями системы координат, в которых представлены потоки денежных средств. Если каждый счет рассматривать как ветвь, то введение или исключение счетов соответствует структурным преобразованиям в сети денежных потоков.

Разработанная на основе сетевой модели методика анализа деятельности банков применяется для расчетов состояния и динамики развития банков в информационно-аналитической системе «Банки и финансы». Данная методика информационного агентства «Мобиле» рассматривает потоки денежных средств как объективно существующие величины, измеримые в действующей системе отчетности. Потоки денежных средств

образуют в банке пути-циклы: привлекаемые средства, размещаемые средства. Кроме того, существуют резервы на возможные потери по ссудам и ценным бумагам, фонды, материальные активы и т.д. Привлеченные средства поступают в банк (и банк платит за пользование ресурсами), размещаются в активы (и банк получает плату за предоставленные средства, например, проценты по ссудам). Разность между доходами и расходами составляет прибыль (или убытки). Резервные средства прибыли не дают.

Многообразие видов денежных средств не позволяет оценивать и сравнивать банки по какой-либо одной группе показателей. Валюта баланса характеризует всю сумму средств банка, поэтому этот показатель на первом месте. Собственные средства составляют «ядро» банка. Привлеченные средства – это оболочка. Сумма обязательств и капитал составляют сумму пассивов, которая является источником средств, «причиной» и определяет кредитный потенциал, который можно рассматривать как «следствие». В этой связи сумма пассивов выбрана для ранжирования банков в основных таблицах бюллетеня «Банки и финансы».

Состав и объемы привлеченных и размещенных средств характеризуют специализацию банка, обеспеченность ресурсами для поддержания ликвидности. Прибыль (убытки) как балансовая (накопленная с начала отчетного года), так и потоки за отдельные месяцы, а также их динамика показывают эффективность работы средств банка.

Расчет показателей производится по действующей на данный момент системе бухгалтерской отчетности, которая играет роль «системы координат» для потоков денежных средств. В настоящее время такой системой координат является План счетов бухгалтерского учета в кредитных организациях Российской Федерации, введенный в действие с 1.02.1998, а также упомянутые выше изменения и дополнения к нему, внесенные в соответствии с развитием процессов в реальном секторе и финансовой системе.

Основной задачей методики является группировка счетов в однородные показатели денежных средств, представляющие такие измеримые величины, которые в наименьшей степени зависят от системы финансовой отчетности, используемой в настоящее время. В этом смысле указанные показатели аналогичны тензорам в геометрии и теории систем, реальная величина которых не зависит от системы координат, в которой представлены их компоненты.

На балансовых счетах отображаются средства и источники средств, определяющие текущее состояние банка. Учет ведется по *системе двойной записи*, когда каждая операция по перемещению средств отражается списанием средств с одного счета и записью на другой счет. Это обеспечивает непрерывность учета и сохранение информации о движении потоков денежных и материальных средств.

Счет состоит из двух сторон. Левая сторона называется «дебетом», туда вносятся все наличные поступления по данному счету. Правая – «кредитом», туда заносятся поступившие или причитающиеся к уплате суммы. Счета отличаются порядками, по степени детализации. Все операции делятся на группы счетов первого порядка. Каждая группа состоит из счетов второго порядка, их несколько сотен. Счета второго порядка могут иметь подсчета третьего и четвертого порядка. Например (в «системе координат» СПС), счет 10 – фонды банка, содержит счета второго порядка: 010 – уставный фонд банка, 012 – специальные фонды, ... 019 – переоценка валютных ценностей и т.д.

Состояние средств банка на момент времени (дату) отражает *бухгалтерский баланс* – сводная таблица системы показателей. Баланс состоит из двух частей – актива и пассива. Пассив баланса отражает источники средств, актив – состав, размещение и использование средств. Баланс представляет собой роспись состояния счетов по дебету (актив) и кредиту (пассив) и состоит в том, что *сумма активов равна сумме пассивов*. На счетах отражено движение всех денежных и материальных средств. Привлеченные средства отражаются на пассивных счетах баланса. Это расчетные и ссудные счета ведомств и предприятий, кредиты, полученные от других банков и т.д.

Размещенные средства отражают на активных счетах баланса. Это выданные ссуды, приобретенные ценные бумаги, другие вложения, которые приносят банку прибыль. Каждый показатель баланса – это комбинация ряда счетов второго порядка.

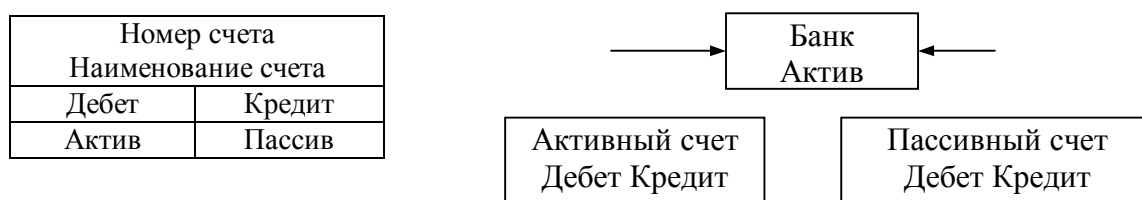


Рис. 5.23. Вид счета и движение денежных средств по пассивным и активным счетам при проведении операций банка

В силу его формы счет называется «Т-образным». В столбце дебета записывают поступающие на счет средства, в столбце кредита – списываемые со счета. Все показатели источников средств банка (пассивы) и размещения средств банка (активы) получают как комбинации дебетов и кредитов соответствующих счетов бухгалтерского баланса.

Если с точки зрения математической модели считать, что банк играет роль трансформатора, то счета в его отчетности играют роль ветвей. По своей физической сути счета-ветви указывают пути движения денежных средств. Дебет – это узел входа такой ветви, кредит – узел выхода. Сальдо (разность дебета и кредита) показывает количество денежных средств, которые в данный момент находятся в этой ветви. Поскольку в каждом

банке на каждый момент времени может работать несколько сот счетов-ветвей (при детализации счетов второго порядка – значительно больше), то целесообразно объединять их в экономически однородные группы – показатели, которые представляют те или иные стороны деятельности банка.

Расчет каждого показателя включает суммы и разности тех счетов, по которым проходят операции данного вида. Методы расчета, а, следовательно, измерения, меняются по мере усложнения деятельности банков. Например, собственные средства, капитал, СК, при расчете по СПС включали в себя дебиты и кредиты следующих счетов (*Инструкция*, 1996):

$$\begin{aligned} \text{СК} = & 010\text{к} + 011\text{к} + 012\text{к} + 016\text{к} + 018\text{к} + 019\text{к} - 019\text{д} - 034\text{д} - 950\text{д} - 951\text{д} + \\ & + 960\text{к} + 969\text{к} - 970\text{д} - 971\text{д} - 979\text{д} + 980\text{к} - 980\text{д} + 981\text{к} - 981\text{д}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Здесь буква «д» означает дебет счета (поступление денег), а «к» – кредит (списание денег со счета). При расчете по НПС тот же показатель имеет другую, более сложную форму расчета. Такая форма определяется требованиями к надежности банка, в том числе международными требованиями, которые сформулированы в документах Базельского комитета. Собственные средства банка здесь определяются как:

- уставный капитал – средства акционеров (участников), в том числе зарегистрированные обыкновенные акции и доли, зарегистрированные привилегированные акции за вычетом незарегистрированного уставного капитала неакционерных банков;
- эмиссионный доход;
- фонды банка и прибыль, оставленная в распоряжении КО, разница между уставным капиталом КО и ее собственными средствами (капиталом);
- переоценка основных средств;
  - нераспределенная прибыль – для прибыльных КО;
  - или прибыль (убыток) за отчетный период – для убыточных КО;
- вычитаются собственные акции (доли), выкупленные у акционеров (участников);
- вычитаются расходы и риски, влияющие на собственные средства.

Расчет собственных средств (капитала) банка (СК) осуществляется по формуле.

$$\begin{aligned} \text{СК}_{2002} = & 102 + 103 + 104 - 105 + 106 + 107 + (50111 + 50609 + 61306 + 61308 - \text{код} \\ & 8917 \text{ код } 8943 \text{ код } 8948 \text{ код } 8949 \text{ код } 8965 \text{ код } 8967 + (\text{код } 8968 \text{ код } 8969) \text{ код } 8970 \text{ код } 8971 \\ & \text{код } 8934 \text{ код } 50605 \text{ код } 50705 \text{ код } 50805 \text{ код } 601\text{A} \text{ код } 60201 + 60105 + \text{код } 8915. \end{aligned} \quad (5.57)$$

В 2003–2007 гг. действует Положение Банка России № 215-П от 17 марта 2003 года (с последующими дополнениями), которое устанавливает методику определения собственных средств (капитала) кредитных организаций. Документ конкретизирует процедуру предъявления к кредитным организациям требования о корректировке капитала и определяет действия Банка России при выявлении фактов формирования источников собственных средств с использованием инвесторами ненадлежащих активов.

Это пример изменения методов расчета, «измерения» показателя по мере изменения представлений о его роли в деятельности хозяйствующего субъекта, в данном случае банка.

Формулы расчета по счетам второго порядка показателей, которые используются для анализа состояния банков, представлены в бюллетене «Банки и финансы» в разделе «Методика анализа деятельности банков». Это обеспечивает возможность определения соответствия выбора показателей и сетевой модели, а также публикации сделанных изменений. Расчет некоторых показателей включает в себя десятки и сотни счетов.

Ежемесячно производится расчет более 160 показателей, состав которых меняется в зависимости от ситуации в банковской системе России. Первые 30 и последние из числа показателей представлены в таблице, где они расположены по алфавиту обозначений в базе данных. При необходимости расчет показателей производится отдельно в рублях и в иностранной валюте. Эти показатели позволяют рассмотреть не только состояние отдельных показателей деятельности каждого из 1200 банков России, но и обороты в течение месяца по основным потокам денежных средств, что обеспечивает возможность анализа всей системы, или отдельных подсистем как сетевой модели.

#### Перечень и обозначения показателей, рассчитываемых в ИАС «Банки и финансы»

№ пп	Обозначение		Название показателя
	в базе данных	в тексте	
1.	AKKR_A	АККР_А	Требования по аккредитивам
2.	AKKR_P	АККР_П	Обязательства по аккредитивам
3.	BP	БП	Балансовая прибыль
4.	CA	ЧА	Чистые активы
5.	CAB	САБ	Суммарные активы банка САБ = ЧА – ФОР ЦБ
6.	CA_VAL	ЧА-Вал	Валютные активы – валютная составляющая чистых активов
7.	CP	ЧП	Чистая прибыль
8.	DAC	ДАК	Доходы от акций
9.	DBP	ДБП	Доходы будущих периодов
10.	DCB	ДЦБ	Доходы от ценных бумаг
11.	DCBG	ДЦБГ	Доходы от операций с государственными долговыми обязательствами (ГДО)
12.	DCBM	ДЦБМ	Доходы от долговых обязательств органов местного самоуправления
13.	DK	ДК	Проценты, за предоставленные кредиты
14.	DB_3_12	ДБ_3_12	Депозиты банков от 3 до 12 месяцев
15.	DB_12	ДБ_12	Депозиты банков свыше 1 года
16.	DP_90	ДП_90	Депозиты предприятий до 3 месяцев
17.	DP_3_12	ДП_3_12	Депозиты предприятий 3 мес.-1 год
18.	DP_12	ДП_12	Депозиты предприятий свыше 1 года
19.	DPRS1	ДПРС1	Депозиты нерезидентов до 3 мес.
20.	DPRS2	ДПРС2	Депозиты нерезидентов 3 мес.-1 год
21.	DPRS3	ДПРС3	Депозиты нерезидентов свыше года
22.	DUB	ДИВ	Доходы от операций с иностранной валютой
23.	DUB1	ДИВ1	Доходы по операциям с иностранной валютой
24.	DUB2	ДИВ2	Доходы от переоценки иностранной валюты
25.	GDO	ГДО	Долговые обязательства государственные и органов местного самоуправления
26.	GDOI	ГДОИ	Иностранные долговые обязательства
27.	KDB	КДБ	Кредиты других банков
28.	KDB_30	КДБ - 30	Кредиты других банков до 30 дней
29.	KDBN1	КДБН1	Кредиты банков нерезидентов до 3 мес.
30.	KDBN2	КДБН2	Кредиты банков нерезидентов от 3 мес. - до 1 года
...	...	...	...
150.	VDFL	ВДФЛ	Депозиты физических лиц свыше 30 дней
151.	VDFL_30	ВДФЛ-30	Депозиты физических лиц до 30 дней
152.	VDFL_90	ВДФЛ_90	Депозиты физических лиц до 3 месяцев

153	VDFL_3_12	ВДФЛ_3_12	Депозиты физических лиц на срок от 3 месяцев до 12 месяцев
154	VDFL_12	ВДФЛ_12	Депозиты физических лиц свыше 1 года
155	VDFL_S	ВДФЛ_С	Сберегательные сертификаты
156	VDUL	ВДЮЛ	Депозиты юридических лиц
157	VDUL_30	ВДЮЛ - 30	Депозиты юридических лиц до 30 дней
158	VEB	ВЕБ	Векселя банков
159	VEKS_U	ВЕКС_У	Учтенные векселя
160	VEP	ВЕП	Векселя предприятий
161	VEP_LONG	ДВЕП	Векселя предприятий свыше 1 года

Таким образом, рассмотрены особенности построения измеримых показателей на примере анализа деятельности банков. Показаны пути перехода от реальных баз данных отчетности (изменяемой с течением времени по составу и структуре), к измеримым величинам, которые необходимы для создания информационно-аналитических систем управления устойчивым развитием. Такие преобразования должны замыкать потоки информации от хозяйствующих субъектов к системам управления с учетом динамики изменения содержания хозяйственной деятельности, форм отчетности, методов управления.

### 5.2.3. Методика анализа деятельности банков и предприятий

Для анализа результатов деятельности банков разработана методика обработки их балансов по счетам второго порядка с целью формирования наиболее важных для оценки банка показателей. Полученные показатели для контроля суммируются и сопоставляются с банковской статистикой. Эта система обеспечивает количественную оценку состояния и динамики изменения параметров потоков денежных средств в сети банков на основе ежемесячной отчетности. Результаты такого анализа по банкам Москвы и банкам других регионов России ежемесячно публикуются, начиная с 1995 г., в бюллетене «Банки и финансы» (с ежемесячным пополнением по электронным каналам связи). Издаются также продукты в электронной форме. Например, информационно-аналитическая система «Банки и финансы», разработанная в 2000 году по заказу Банка России, содержит более 160 показателей всех банков за каждый месяц, начиная с января 1998 года. Обработка и анализ показателей деятельности банков основаны на методике анализа сети денежных потоков, которая рассмотрена ниже. Источники информации: материалы Банка России, Росстата, балансы банков, отчеты о прибылях и убытках.

*Цель* состоит в получении объективной информации о деятельности банков и банковской системы в целом в различных секторах финансового рынка. Такой подход требует анализа, оценки динамики *многих* показателей, а не приведение к *одному* показателю, как в рейтингах. Задача также состоит в том, чтобы динамические показатели деятельности банков, потоков денежных средств, представить в табличной форме, позволяющей сравнивать банки в каждый момент времени и на каждом отрезке времени, по наиболее представительным показателям.

Исходная информация делится на объемные, управляющие и общие показатели, описывающие основные стороны деятельности банка.

*Объемные* показатели характеризуют состояние самого банка. Они получаются как сумма определенных счетов баланса на определенную дату. Это активы, капитал, счета в банках, кредиты (предприятиям, банкам, населению), вложения в ценные бумаги; средства клиентов на расчетных счетах и депозитах, уставный капитал, прибыль (убыток) и т.д.

*Управляющие показатели* (индикаторы финансового рынка): ставка рефинансирования ЦБ РФ, курсы валют, учетные цены драгоценных металлов, ставки привлечения и размещения средств, курсы ценных бумаг, биржевые индексы и т.д.

*Макроэкономические показатели* (индикаторы): денежная база, денежная масса, международные резервы, нормативы резервных отчислений, средние ставки по депозитам и кредитам, цены на товары экспорта, динамика индекса цен и т.д. Общим является также перечень тех операций, которые обеспечивают доход банка. Приоритеты банков по секторам финансового рынка зависят от их специализации и от доходности операций.

Наиболее информативны объемные показатели, которые отражают динамику результатов деятельности самого банка. Управляющие и общие показатели представляют условия деятельности банка. Объемные показатели характеризуют параметры денежных потоков, а управляющие играют роль метрики, которая устанавливает пропорции преобразования потоков денег.

Объемные показатели делятся на сумму средств, пассивы, активы и прибыли/убытки. *Сумма средств*, которыми располагает банк – это сумма активов, равная сумме пассивов, имеет общее название «валюта баланса». *Активы* делятся на работающие и неработающие. Работающие активы – ссуды, МБК, операции с валютой, вложения в ценные бумаги, другие операции, которые могут приносить банку прибыль. Неработающие активы включают в себя ликвидные активы, основные средства (здания, техника и др.), а также прочие, которые порой скрывают убытки. *Пассивы*: собственные средства (капитал), уставный фонд, сумма обязательств и обязательства до востребования, срочные вклады физических и юридических лиц, кредиты других банков. Они отличаются стоимостью денег по каждому каналу, а также их качеством – в какой степени эти средства может использовать банк на том или ином промежутке времени. За собственные средства платить не надо. Обязательства до востребования обходятся банку дешевле, но возрастает риск при их размещении в активах на длительные сроки. Вклады на длительные сроки обходятся дороже (выше процентные ставки), но меньше риска, что их отзовут клиенты.



Прибыль или убытки: накопленные с начала года – балансовая прибыль, прибыль за промежуток времени (месяц), чистая прибыль (за вычетом расходов). В балансе прибыль относится к пассивам, убытки – к активам.

Расчет каждого показателя проводится по счетам второго порядка. Это позволяет проводить общий анализ работы банка, определяя динамику его положения в банковской системе, эффективность работы средств банка, приоритетные направления размещения и привлечения средств по их доле в сумме активов, степень риска – по обеспеченности вложений капиталом и ликвидными активами (т.е. легко мобилизуемыми средствами). Более глубокий анализ требует детальных расшифровок счетов.

Банк получает потоки платежей за размещенные, вложенные средства в зависимости от сроков, суммы и условий. Разность между доходами от размещения и расходами по привлечению средств составляет прибыль банка (или убыток). Для анализа результатов деятельности банка однородные по экономическому смыслу счета группируют в показатели, характеризующие основные стороны деятельности банка. Доли привлеченных и размещенных средств в сумме активов и обязательств, эффективность работы по каждому каналу, направлению пассивов и активов, и банка в целом отражают потоки прибыли на рубль вложений в единицу времени. Например, межбанковские кредиты (МБК), отражающие взаимодействие банков, по СПС имели вид:

$$\text{МБК} = 054\text{д} + 056\text{д} + 615\text{д} + 822\text{д}; \quad (5.58)$$

вклады и депозиты юридических лиц срочные (ВДЮЛ):

$$\begin{aligned} \text{ВДЮЛ} = & 736\text{к} + 737\text{к} + 738\text{к} + 739\text{к} + 741\text{к} + 742\text{к} + 743\text{к} + 744\text{к} + 745\text{к} + \\ & + 746\text{к} + 747\text{к} + 748\text{к} + 749\text{к} + 750\text{к} + 751\text{к} + 824\text{к}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Прочие неработающие активы (ПНА) характеризуют «балласт» банка. В них порой скрывают убытки. У некоторых банков в ПНА находятся немалые средства. Расчет ПНА:

$$\begin{aligned} \text{ПНА} = & 57\text{д} + 58\text{д} + 626\text{д} + 627\text{д} + 628\text{д} + 662\text{д} + 681\text{д} + 808\text{д} + 816\text{д} + \\ & + 829\text{д} + 890\text{д} + 893\text{д} + 904\text{д} + 905\text{д} + 941\text{д} + 15\text{д}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Кредиты экономике состоят из суммы и разности более 130 счетов, а обязательства до востребования – более 220 счетов и т.д.

При переходе на новый План счетов (НПС), начиная с финансовой отчетности на 01.02.1998, изменились группировки счетов, которые составляют показатели деятельности банков. Но это не изменило величины самих денежных средств, подобно тому, как не меняется длина вектора при изменении системы координат. Роль системы координат играют старый или новый План счетов. Преобразование представления показателей счетами при переходе на НПС было обеспечено применением тензорного метода для анализа деятельности банков. Инвариантный характер выбранных показателей позволил сохранить

непрерывность динамических рядов, поскольку реальные денежные средства не изменяются при изменении «системы координат», представленной разными формами отчетности.

По новому Плану счетов (НПС) представленный выше показатель межбанковских кредитов МБК принимает следующий вид, отражая те же средства, что и по старому Плану счетов в (5.58):

$$\begin{aligned} \text{МБК (НПС)} = & 32001 + 32002 + 32003 + 32004 + 32005 + 32006 + 32007 \\ & + 32008 + 32009 + 32101 + 32102 + 32103 + 32104 + 32105 + 32106 + 32107 + 32108 + \\ & + 32109 + 32401 + 32402. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Объективные измеримые показатели оказались аналогичны векторам, величина которых не зависит от системы координат.

Методика анализа результатов деятельности банков, основанная на расчете финансовых потоков, разработана и применяется с 1995 г. для определения состояния и динамики развития банков России, анализа банковской системы России в целом. Создана информационно-аналитическая система «Банки и финансы», в которой ежемесячно производится расчет около 200 показателей по базе данных отчетности банков России, накопленной с 1994 года. Результаты используются для производства информационных продуктов в печатной форме (бюллетень «Банки и финансы», 400 стр., 1 раз в 2 месяца, и ежемесячное приложение к нему «Деятельность банков России»). Результаты расчета и анализа показателей деятельности банков Москвы и банков регионов России на каждый месяц и в динамике за 5 месяцев представлены в таблицах. Представлено 50 основных показателей деятельности (собственных средств, пассивов, активов и прибыли/убытков) каждого банка. Издаются продукты электронной форме (2 версии на CD содержат 50 и 70 различных показателей за очередной годовой период; ИАС «Банки и финансы» содержит 160 показателей, начиная с 1.02.1998 по настоящее время, разработана по заказу Банка России).

Выбор показателей определен моделью описания банка как элемента сети денежных потоков в финансовой системе. Для этого необходимо знать общие объемы (поток) средств, которые через него проходят; из каких источников поступают средства (их объемы и динамика изменений); куда вкладывают средства (потоки вложений и их динамика); наличие и объемы резервов, страхующих рисковые вложения на случай потерь, объемы неработающих средств (балласт, скрытые потери), эффективность (рентабельность) вложений, которые дают банку доход для выплаты премий (процентов) за пользование чужими средствами, собственную прибыль банка. Изменение этих показателей от месяца к месяцу дает представление о результатах деятельности банка и его перспективах.

Динамика изменения показателей банка относительно других банков показывает перспективы его развития. Наиболее корректно это показывают изменения доли каждого

показателя в сумме по всем банкам. Доли получаем делением показателя банка на сумму этого показателя по России из банковской статистики. Это определяет место банка в банковской системе. Если доля со временем растет, то банк улучшает свое положение по данному показателю, если падает – то теряет.

Результаты анализа, позволяющие сравнить банки между собой, представлены в виде таблиц. Показатели таблиц отражают особенности поведения банка в сети финансовых потоков. Сами таблицы построены на основе запросов к базе данных показателей, которые рассчитаны на основе балансов банков. Это позволяет получать ответы на запросы по состоянию каждого банка в любом разрезе, допускаемом полученными данными.

Значения показателей показывают объемы различных денежных средств в структуре банка, пропорции изменения потоков средств по разным путям-каналам, поток прибыли или убытков. Прибыль показывает способность банка, к накоплению, а значит способность к выживанию. Убытки ведут к потере капитала (величины, гарантирующей вложения денежных средств, которые обеспечивают движение потоков энергии в экономической системе), а затем банкротству банка, его ликвидации как элемента финансовой сети. Информационные таблицы на первое число каждого месяца дают значения основных показателей, разделенных на пассивы, активы и прибыли/убытки. Например, таблица показателей пассивов на 1.08.2006 имеет вид.

Таблица 5.7.

#### Основные показатели деятельности банков на 1.08.2006 (тыс. руб.)

№ пп	Название банка	Валюта баланса (сумма активов)	Сумма пассивов	Пассивы			
				Капитал	Сумма обязательств	Обязательства до востребования	Вклады физических лиц
1.	Сбербанк	6 470 188 032	2 973 085 772	317 451 395	2 655 634 377	711 570 193	1 586 752 837
2.	Газпромбанк	739 303 792	589 653 502	46 484 524	543 168 978	187 271 716	28 326 222

Сумма пассивов равна сумме капитала и суммарных обязательств:

$$СП = СК + СО. \quad (5.62)$$

Суммарные обязательства равны сумме обязательств до востребования, ОВ, депозитов юридических лиц, ВДЮЛ, вкладов физических лиц, ВДФЛ, кредитов, полученных от других банков, КДБ и ценных бумаг, выпущенных банком, ВЦБ, т.е.:

$$СО = ОВ + ВДЮЛ + ВДФЛ + КДБ + ВЦБ. \quad (5.63)$$

Сумма пассивов лучше показывает источники средств банка, чем валюта баланса, которую банки порой «раздувают», включая в нее, например, межфилиальные обороты. В пассивах представлены источники собственных и привлеченных средств. Отдельно представлены активы и прибыли/убытки. Активы делятся на работающие (РА), которые приносят банку доход, неработающие и ликвидные. В работающие активы входят кредиты (ссуды) экономике, КЭ – предприятиям и населению, кредиты другим банкам (МБК),

вложения в государственные (ГДО) и негосударственные (НДО) долговые обязательства. Неработающие активы делятся на основные средства (ОС), прочие (ПНА) и ликвидные активы (ЛА). Прибыль – балансовая, накопленная с начала года, чистая – за вычетом расходов, а также поток прибыли за каждый месяц.

Таблица 5.7 (продолжение).

**Основные показатели деятельности банков на 1.08.2006 (тыс. руб.)**

№ пп	Название банка	Активы							Прибыль		
		Неработающие активы			Работающие активы				БП	ЧП	МП за июль
ЛА	ОС	ПНА	КЭ	МБК	ГДО	НЦБ					
1.	Сбербанк	440 625 926	134 942 626	3 354 207 584	2 206 860 097	16 446 560	347 361 794	174 072 057	63 772 351	50 746 714	13 791 988
2.	Газпромбанк	233 739 593	2 442 865	122 052 352	248 369 398	112 830 011	5 381 135	46 651 473	15 189 190	10 404 102	1 609 970

Каждый из этих показателей соответствует одной из характеристик потока денежных средств, которые банк покупает у вкладчиков и продает заемщикам. Отличия разных каналов, финансовых инструментов, состоят в стоимости денег, способах их предоставления и оплаты. Сами механизмы оборота денежных средств одинаковы – покупка дешевле и продажа дороже с получением прибыли. Деятельность банка при постоянных убытках приводит к снижению капитала ниже нормативы, отзыву лицензии, и ликвидации.

На основе метода двойственных сетей и модели баланса разработана методика анализа производственной и финансовой деятельности предприятий. В предприятии две сети – продуктов и денег. Финансовый оборот деятельности предприятия обеспечивает основной, производственный цикл. Поставки сырья и поставок на входе, вместе с энергоресурсами (электричество, вода, тепло, газ) и рабочей силой обеспечивают выпуск продукции, которая на выходе отгружается потребителям. Эти потоки связывают предприятия в производственную сеть, представленную моделью межотраслевого баланса. Навстречу движутся потоки денежных средств, отгруженная продукция отражается дебиторской задолженностью, затраты на производство характеризуют производственный процесс, долги поставщикам и финансовым институтам отражает кредиторская задолженность.

Данная методика применялась для анализа деятельности предприятий, отраслей в журнале «Промышленность России» (с 2000 г. «Наука и промышленность России»). Показатели деятельности предприятий представлены таблицами, аналогичными приведенным выше. Производство представлено объемами (поток) выпуска основных видов продукции за каждый месяц, а финансовые показатели даны динамикой (по кварталам) затрат на производство, денежных средств, включая капитал, дебиторской задолженности и кредиторской задолженности.

За 1997–1998 гг. были представлены обзоры производственной и финансовой деятельности нефтедобычи и нефтепереработки, черной металлургии, автозаводов и шинных заводов России, лесотехнического комплекса, производства электроламп, кабельной

промышленности – на основе запросов к базе данных промышленных предприятий (Петров, Плошкин, 1998). Прозрачность состояния предприятия является основным условием привлечения инвестиций, как отечественных, так и иностранных (Петров, 1998).

#### 5.2.4. Анализ динамики и сетевая модель рейтинга динамической стабильности

Задачей анализа является извлечение из большого объема данных отчетности тех показателей, состояние и динамика изменения которых позволяют производить оценки и принимать решения. Анализ показателей банка, например, позволяет выделить параметры, указывающие на финансовые проблемы. Уменьшение капитала показывает, что банк теряет собственные средства. Напротив, рост активов, капитала, кредитов экономике, указывает на проведение здоровой политики, которая обеспечит банку устойчивость. Анализ вложений в разные секторы (ссуды, акции, валюту, МБК, прочие операции) показывает приоритеты банка, степень его зависимости от спекулятивных операций или от долгосрочных вложений.

Аналитические таблицы обеспечивают оценку динамики основных показателей банка. В частности, пример динамики кредитов физическим лицам и предпринимателям, а также просроченной задолженности по ним, дан в таблице 5.8.

Таблица 5.8.

#### Динамика кредитов, предоставленных физическим лицам и предпринимателям, и просроченная задолженность

№ п/п	Рег. №	Название банка	Кредиты физическим лицам и предпринимателям, КЭ-Ф, и просроченная задолженность ПЗС-Ф, на дату, тыс. руб.							Изменение КЭ-Ф и ПЗС-Ф за период, %
			01.10.07	01.01.08	01.04.08	01.07.08	01.08.08	01.09.08	01.10.08	
1	1481	СБЕРБАНК РОССИИ	943 008 035 8 744 602	1 031 532 201 9 952 066	1 100 762 688 11 936 393	1 236 520 366 14 031 571	1 278 103 975 14 807 923	1 315 118 819 15 502 545	1 346 538 045 17 198 501	142,79% 196,68%
2	1623	ВТБ 24	116 495 956 719 663	158 615 934 1 003 341	192 406 755 1 670 680	239 879 210 2 355 493	257 855 862 2 524 553	277 439 193 2 794 945	298 608 156 3 087 687	256,32% 429,05%
3	2272	РОСБАНК	87 611 883 4 281 702	96 528 142 4 782 012	101 030 827 5 688 762	111 262 205 6 437 102	115 903 856 6 671 441	120 147 285 6 925 066	124 964 752 7 265 595	142,63% 169,69%
4	2289	РУССКИЙ СТАНДАРТ	145 459 859 30 854 504	107 604 624 26 373 702	99 812 084 29 166 814	98 916 110 26 885 260	99 682 825 26 224 078	105 249 470 25 296 738	106 460 802 25 903 065	73,19% 83,95%

*Распределение интересов банка.* Например, доля кредитов экономике в сумме активов показывает степень ориентации банка на реальный сектор.

Таблица 5.9.

#### Динамика долей кредитов экономике в сумме активов (валюте баланса)

№ п/п	Рег. №	Название банка	Сумма кредитов экономике на 01.10.2008	Доли кредитов экономике в валюте баланса на дату, %				
				01.06.08	01.07.08	01.08.08	01.09.08	01.10.08
1	1684	РОСТРАБАНК	465 367	76,86%	74,90%	71,87%	74,31%	76,61%
2	3063	ИТ-БАНК	428 911	77,97%	68,82%	64,78%	74,51%	74,13%
3	3458	ЖЕНСКАЯ МИКРОФИНАНСОВАЯ СЕТЬ	340 855	68,53%	68,61%	75,41%	74,13%	72,82%

Динамика наиболее важных показателей представлена фактическими значениями. В аналитических таблицах представлена динамика работающих активов, капитала, вкладов граждан, вложений в государственные ценные бумаги, а также их сопоставление с

динамикой отношений (долей) других важных показателей. Например, в таблице 5.10 дана динамика работающих активов (РА) и отношения РА к валюте баланса (РА/ВБ):

Таблица 5.10.

**Динамика работающих активов и отношения РА/ВБ**

№ п/п	Рег. №	Название банка	Валюта баланса на 01.10.2008	Работающие активы, тыс. руб. и отношение РА/ВБ, % на дату					Изменение РА и РА/ВБ за период, %
				01.06.08	01.07.08	01.08.08	01.09.08	01.10.08	
1	1481	СБЕРБАНК РОССИИ	15 361 631 819	5 090 342 608 42,00%	5 241 774 473 40,95%	5 249 323 624 38,85%	5 327 107 060 36,04%	5 488 156 528 35,73%	107,82% 85,06%
2	354	ГАЗПРОМБАНК	2 012 129 262	750 429 663 50,40%	696 843 953 47,64%	707 245 003 46,60%	788 715 401 47,13%	981 958 213 48,80%	130,85% 96,83%
3	3349	РОССЕЛЬХОЗБАНК	1 377 969 969	552 318 115 51,78%	582 073 193 51,31%	607 548 080 51,31%	641 587 187 49,14%	666 723 326 48,38%	120,71% 93,43%

Такой подход позволил выделить систему показателей для контроля деятельности банка. Ежемесячный анализ динамики их изменения показывает результаты и перспективы деятельности банка, специализацию банков, позволяет сравнить их между собой.

Динамика приоритетов в размещении средств показана в группе таблиц, где на каждую дату представлены доли ссуд, МБК, вложений в ценные бумаги в активах банка. Изменения показывают перемещение средств банка из одного сектора финансового рынка в другой. Динамика по стране, а также в разрезе регионов и отраслей обеспечивает анализ и прогноз тенденций в сопоставлении с принятыми решениями, развитием экономики.

Эффективность работы средств банка представлена рядом показателей. Основой для расчета эффективности являются балансовая прибыль (накопленная с начала года), чистая прибыль (балансовая за вычетом расходов), поток прибыли в месяц. Динамику интегральной эффективности дают отношения балансовой прибыли к сумме активов (рентабельность – поток прибыли на рубль активов за период с начала года), доля балансовой прибыли в работающих активах (поток прибыли на рубль вложенных средств). Поток прибыли в месяц на рубль вложенных средств отражает оперативную (дифференциальную) эффективность работы банка. Отчетность позволяет определить эффективность средств по отдельным видам операций: поток прибыли на рубль ссуд, МБК, вложений в ценные бумаги, операции с иностранной валютой. Параметры устойчивости задают экономические нормативы. Их состав и значения устанавливает Банк России. Например, достаточность капитала, ликвидность (способность своевременно выполнять обязательства), максимальные размеры рисков и минимальные резервы и т.д.

Таблицы показателей дают представление о потоках денежных средств по основным путям их движения в самом банке и в отношениях с другими банками и производственным сектором. Это обеспечивает анализ положения и динамики развития банка как элемента финансовой сети. Такой анализ включает в себя, прежде всего, оценку состояния и результатов деятельности самого банка.

Это позволяет выделить признаки финансовых проблем: рост или потеря капитала, падение капитала ниже уровня уставного фонда, особенно отрицательный капитал, показывают, что банк живет в долг, за счет средств акционеров и клиентов. Рост депозитов физических лиц, за счет процентов по вкладам выше рыночных, может указывать на проблемы с источниками средств. К этому же относятся: убыточная деятельность на протяжении ряда месяцев, нарушение экономических нормативов, рост доли просроченной задолженности по ссудам, низкая рентабельность и т.д. Напротив, постоянный рост доли банка в активах, кредитах экономике, рост его собственных средств, высокая эффективность – показывают, что банк динамично развивается.

Показатели в таблицах позволяют оценить направления вложений и разделить банки на группы, связанные с производством, торговыми операциями, ценными бумагами, вкладами населения, обслуживанием предприятий, госбюджета, степень эффективности работы банка по отдельным направлениям и т.д. На этой основе оценивается влияние макроэкономических решений: изменения налогового законодательства, ставки резервирования и рефинансирования, таможенных пошлин, курса рубля на положение с доходами, ликвидностью, прибылью по каждой группе. Оценка и сравнение банков по изменению *долей* в разных секторах финансового рынка, динамика рентабельности его активов, капитала, кредитов позволяют, таким образом, прогнозировать устойчивость банка при изменениях в экономике.

Таким образом, сетевой подход обеспечивает общий сравнительный анализ результатов деятельности банков и позволяет оценить перспективы их развития. Это позволяет дать количественную объективную оценку положения дел в банковской сфере и служит исходным материалом при принятии решений для клиентов банков, для самих банков, а также для управляющих и контролирующих органов, и других заинтересованных сторон, которым необходим анализ банковской деятельности. Методика и система анализа и оценки банковской деятельности в перспективе является одной из основных подсистем в информационно-аналитической системе управления устойчивым развитием социально-экономической системы. Описанная выше система анализа деятельности банков может служить эталоном для создания подсистем анализа других секторов экономики.

Вместе с тем огромные объемы информации могут не только помогать, но и мешать принятию оперативных решений. Например, в ИАС «Банки и финансы» производится расчет более 160 показателей, публикуется более 80 таблиц с набором показателей и их отношений, которые необходимы для анализа. Аналогичная ситуация складывается с информационными «портретами» промышленных предприятий. Такие значительные объемы информации затрудняют ее применение в практических целях, особенно в условиях высокой динамики

изменений в хозяйственной и социальной ситуации. Для управления и принятия решений в режиме реального времени необходимы средства обработки аналитической информации, с целью сделать ее сравнимой и обозримой.

Одним из направлений решения проблемы избыточности информации является создание методик рейтинговых оценок и их применение для принятия практических решений. Возникновение рейтингов порождено многообразием институтов мирового и регионального хозяйства, ростом не только количества субъектов хозяйствования, но и связей между ними, потребностью установления и поддержания хозяйственных отношений между странами, регионами, отраслями, секторами предпринимательства.

Показатели рейтинга в компактной и емкой форме характеризуют состояние и перспективные тенденции изменения финансовой стабильности хозяйствующих субъектов, играя роль индикаторов для принятия решений установления и поддержания деловых отношений. Текущий уровень рейтинга и динамика его изменения служит сигналом для сохранения, расширения или свертывания деловых отношений. Например, рейтинги могут использоваться для принятия решений об уровне кредитования субъектов, процентных ставок по кредитам, при определении масштабов и характера инвестиций в развитие и поддержание производства и уровня риска финансовых вложений; вообще при оценке перспективности поддержания деловых отношений. Рейтинг – это комплексная оценка состояния субъекта, которая позволяет отнести его к некоторому классу или категории.

**Рейтинг динамической финансовой стабильности.** Для оценки банков и предприятий на основе сетевой модели банка разработан и применяется *рейтинг динамической финансовой стабильности* (РДФС). Он дает двойственную оценку внутреннего состояния субъекта по сбалансированности его показателей и результаты деятельности по изменению доли в системе, причем в динамике на протяжении годового периода (*Карминский А.М., Пересецкий А.А., Петров А.Е., 2005*).

Особенности РДФС банков: открытая методика, дистанционность, ежемесячное обновление, учет динамики состояния с использованием показателей каждого месяца в течение годового периода, с постепенным «забыванием» значений на более старые даты. Двойственность: рассматривается внутреннее состояние и положение среди других банков. Выбор внутренних и внешних показателей определяет методика. Внутренние показатели характеризуют качество деятельности банка, а внешние – изменение положения банка в банковской системе России в течение года.

*Методической основой* РДФС банков является представление и анализ потоков денежных средств (собственных, привлеченных и размещенных средств, экономических результатов), как на отдельную отчетную дату, так и в динамике изменения основных



показателей в течение годового периода. Возможность ежемесячных расчетов обеспечена требованиями Банка России к отчетности кредитных организаций. Предметом деятельности кредитных организаций являются денежные средства, а не реальные продукты. Данная методика делает акцент на работу банков с реальным сектором экономики, в частности, путем введения в состав показателей кредитов на срок свыше одного года.

Расчет РДФС использует 7 внешних и 13 внутренних показателей. Внешние – доля банка в сумме показателя по всем банкам России: в капитале, сумме обязательств, обязательствах свыше года (обеспеченность долгосрочных кредитов), работающих активах, кредитах свыше года (ориентация на реальный сектор), ежемесячной прибыли, оборотах по корсчетам (в ЦБ РФ и других банках). Обороты по корсчетам показывают активность деятельности банка. Если банк имеет отрицательный капитал и убытки, то он получает свою долю в отрицательном показателе со знаком минус.

Расчет всех внешних и внутренних показателей производится суммированием (сверткой) по всем отчетным датам (т.е. по месяцам годового периода) с линейным «забыванием» более старых значений и с нормировкой на единицу по общей формуле:

$$D(P^k) = \frac{2}{13} \sum_{t=1}^{12} \frac{t}{12} \frac{P_t^k}{\sum_{j=1}^N P_t^j}. \quad (5.64)$$

где  $D(P^k)$  – долевой динамический рейтинг по данному показателю,

$P^k$  – один из выбранных внешних (или внутренних) показателей для банка  $k = 1, \dots, N$ ,

$N$  – общее количество банков в рассматриваемой группе;

$t$  – время,  $t = 1, \dots, 12$ .

Произведение внешнего и внутреннего рейтингов и есть значение РДФС, которое определяет масштаб стабильности банка в координатах «внутренняя стабильность» – «динамика положения в банковской системе». Значение РДФС – это конечный результат обработки многомерного объема аналитической информации, поступавшей на протяжении года. Динамика изменения внутренних и/или внешних показателей по каждому банку, каждой группе банков с течением времени полезна акционерам, клиентам, партнерам, инвесторам, органам государственной власти для принятия решений в интересах их собственной деятельности. Выбор показателей для оценки положения банка в банковской системе, с ориентацией на реальный сектор экономики, представлен на рис. 5.24.

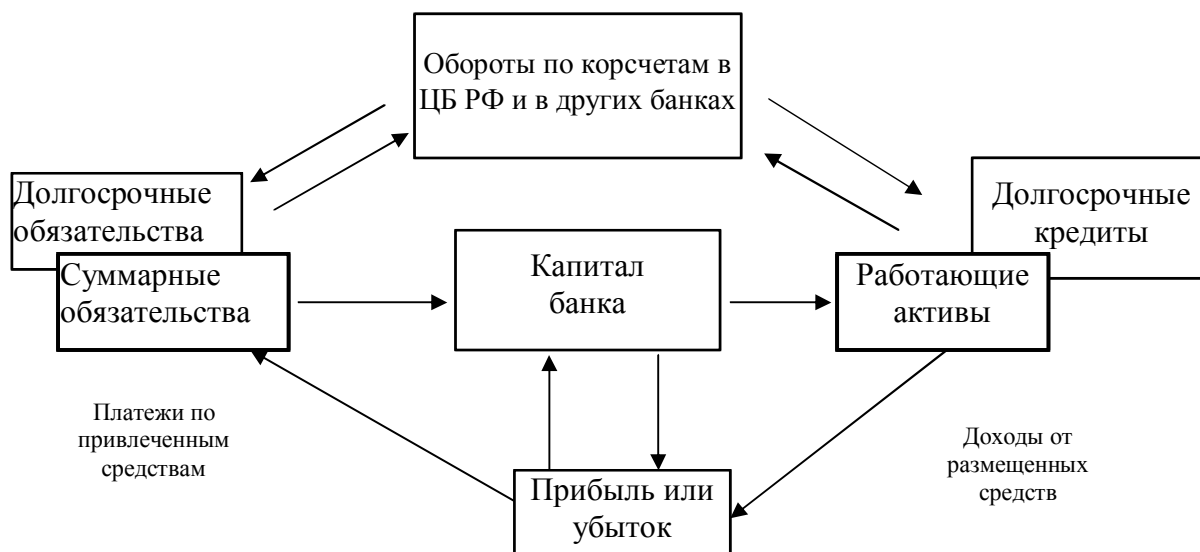


Рис. 5.24. Выбор внешних показателей для оценки доли банка в банковской системе

Внутренние показатели:

1. Достаточность капитала – обязательный экономический норматив Н1.
2. Доля долгосрочных кредитов экономике в валюте баланса – ориентация на реальный сектор.
3. Отношение работающих активов к ликвидным активам – отношение работающего потенциала к ликвидности.
4. Коэффициент ликвидности – способность выполнять обязательства.
5. Доля вкладов населения – уровень доверия частных вкладчиков.
6. Качество кредитного портфеля.
7. Доля долгосрочных пассивов в валюте баланса – качество пассивов.
8. Прибыль за месяц на средние работающие активы – эффективность вложений банка.
9. Доля суммы пассивов в валюте баланса – «воздушный фильтр».
10. Уровень активизации привлеченных средств.
11. Доля неработающих активов в валюте баланса – доля балласта в активах.
12. Отношение средств, полученных от нерезидентов к капиталу банка – уровень зависимости от привлеченных валютных средств.
13. Отношение сальдо по срочным сделкам по поставке денежных средств к капиталу – уровень зависимости от небалансовых операций.

Банки распределены по классам в соответствии с рейтинговой шкалой РДФС. Формирование рейтинговой шкалы банков производится в соответствии с расчетом значений внешнего и внутреннего рейтингов, РДФС, а также с учетом динамики изменения значений данных показателей в течение годового периода. Банки распределяются по классам в соответствии с результатами расчета внешнего ( долевого) рейтинга (обозначим ДР), внутреннего рейтинга (обозначим ВР), и РДФС банков на протяжении годового периода. Методика обеспечивает возможность расчета РДФС групп банков, выбранных по



- В2 – стабильность обеспечена, сроки обеспечения платежеспособности могут отличаться для коротких и длинных обязательств
- В1 – стабильность обеспечена при благоприятных внешних условиях

В – менее стабильные (спекулятивный, не инвестиционный уровень)

- В3 – стабильность зависит от внешних условий, возможно ухудшение
- В2 – стабильность зависит от внешних условий, может ухудшиться в ближайшей перспективе
- В1 – стабильность зависит от внешних условий, может резко ухудшиться в ближайшей перспективе, необходима внешняя поддержка

Г – проблемные

- Г3 – стабильность проблематична, необходима внешняя поддержка
- Г2 – стабильность вызывает большие сомнения
- Г1 – стабильность не обеспечена. Необходимо брать в долг и начинать сначала.

В класс А попадают банки, у которых сумма мест по группам ДР и ВР равна от 2 до 6.

В класс Б попадают банки, у которых сумма мест по группам ДР и ВР равна от 7 до 12.

В класс В попадают банки, у которых сумма мест по группам ДР и ВР равна от 13 до 18.

В класс Г попадают банки, у которых сумма мест по группам ДР и ВР больше 18.

Внутри подклассов каждого класса банки располагаются по значению РДФС.

В таблице представлены значения основных составляющих РДФС, т.е. ДР и ВР, которые определяют отнесение банков к соответствующей группе по стабильности. Значения номеров групп по ДР и ВР, в которые попадают банки по результатам расчета РДФС, используются для отнесения банка к тому или иному классу стабильности.

Таблица 5.11.

#### Определение групп по ДР и ВР для рейтинговой шкалы РДФС банков

Долевой рейтинг, ДР	Номер группы по ДР	Внутренний рейтинг, ВР	Номер группы по ВР
Больше 100	1	Больше 17	1
60-100	2	16-17	2
40-60	3	15-16	3
30-40	4	14-15	4
25-30	5	13-14	5
20-25	6	12-13	6
15-20	7	10-12	7
10-15	8	8-10	8
5-10	9	6-8	9
0-5	10	5-6	10
от -10 до 0	11	4-5	11
Меньше -10	12	Меньше 4	12

В таблице представлены значения суммы мест (номеров) в группах, полученных банком по ДР и ВР, которые определяют его отнесение к тому или иному классу стабильности. Классы, соответствующие значениям этих сумм, составляют шкалу РДФС. Данная методика позволяет получить рейтинг в традиционном символическом обозначении для

каждого банка банковской системы России. Расчет выполняется ежемесячно в автоматическом режиме, в рамках подсистемы ИАС «Банки и финансы».

Таблица 5.12.

### Рейтинговая шкала РДФС банков

Класс	Подкласс	Для попадания в подкласс, сумма мест по ДР и ВР
А	А 3	2
	А 2	3, 4
	А 1	5, 6
Б	Б 3	7, 8
	Б 2	9, 10
	Б 1	11, 12
В	В 3	13, 14
	В 2	15, 16
	В 1	17, 18
Г	Г 3	19, 20
	Г 2	21, 22
	Г 1	23, 24

Пример распределения банков по РДФС в классе А представлен в таблице 5.13.

Таблица 5.13.

### Распределение банков по классам РДФС на 1.11.2008

Расчет сделан с 1.11.2007 по 1.11.2008

№ пп	Рег. №	Название банка	Класс	Долевой рейтинг ДР	Группа по ДР	Внутренний рейтинг ВР	Группа по ВР	РДФС	Группа по РДФС
<i>Подкласс А3</i>									
1	1	ЮНИКРЕДИТ БАНК	А3	183,66	1	19,71	1	3 618,95	X
2	1623	ВТБ 24	А3	157,33	1	20,28	1	3 190,92	X
3	2748	БАНК МОСКВЫ	А3	161,79	1	19,32	1	3 125,86	X
<i>Подкласс А2</i>									
4	1000	ВТБ	А2	445,84	1	15,45	3	6 887,72	X
5	323	УРСА БАНК	А2	63,68	2	17,05	1	1 085,81	X
6	2306	АБСОЛЮТ БАНК	А2	49,07	3	18,74	1	919,83	X
7	436	БАНК "САНКТ-ПЕТЕРБУРГ"	А2	45,65	3	18,78	1	857,33	X
<i>Подкласс А1</i>									
8	1481	СБЕРБАНК РОССИИ	А1	1 917,18	1	13,67	5	26 201,47	X
9	3349	РОССЕЛЬХОЗБАНК	А1	180,45	1	14,90	4	2 688,25	X
10	3292	РАЙФАЙЗЕНБАНК	А1	118,85	1	14,55	4	1 729,39	X
11	2289	РУССКИЙ СТАНДАРТ	А1	52,43	3	16,67	2	873,83	X
12	2590	АК БАРС	А1	52,25	3	16,03	2	837,31	X
13	2056	МЕЖДУНАРОДНЫЙ ПРОМЫШЛЕННЫЙ БАНК	А1	32,32	4	16,17	2	522,58	L

Динамика распределения банков по классам РДФС показана за период с 1.07.2002, т.е. расчет начинался с середины 2001 года. Улучшение состояния банковской системы проявляется в сокращении количества банков в классе Г, а также уменьшении классов В1 и В2. Возросли количества банков в классах Б2, Б1 и В3. Появились, и постоянно присутствуют банки в классе А3. Однако переход в высокие классы происходил медленно, а сейчас начался обратный процесс. Снижение числа банков в классе А, начиная с 1.09.2007, снижение значений ИСБС-В, – это влияние мирового финансового кризиса на банковскую систему России. В 2008 году колебания происходили, в основном, вокруг уровня 8,5.

Таблица 5.14.

**Динамика распределения банков по классам РДФС, ИСБС-В за период с 1.07.2002**

Расчеты сделаны за годовой период, предшествующий каждой отчетной дате

Дата	Классы												Кол-во банков	ИСБС	ИСБС-В
	А3	А2	А1	Б3	Б2	Б1	В3	В2	В1	Г3	Г2	Г1			
01.07.2002		2	6	14	11	51	124	253	587	222	52	1	1323	4,3696	7,8163
01.10.2002		2	5	12	12	49	134	251	584	234	45	3	1331	4,3644	7,7290
01.01.2003		2	8	8	14	54	130	258	573	246	29	2	1324	4,3988	7,8471
01.07.2003	1	3	6	6	20	49	133	247	589	236	33	3	1326	4,3952	7,8106
01.01.2004		3	10	3	13	128	214	354	509	78	10	2	1324	4,9139	8,0669
01.07.2004		4	5	5	23	110	207	352	520	88	3	1	1318	4,8907	8,0562
01.01.2005		5	5	7	19	109	224	334	505	88	2		1298	4,9191	8,2436
01.07.2005	1	6	2	8	18	108	218	316	497	95	8		1277	4,8919	8,5677
01.01.2006	4	3	4	10	21	149	244	322	421	69	5		1252	5,1094	8,7760
01.07.2006	2	5	5	8	17	94	165	230	328	53			907	5,0783	8,8463
01.01.2007	2	2	11	7	12	110	189	253	347	68	1		1002	5,0679	8,6785
01.07.2007	2	5	10	4	11	108	162	228	409	69	2		1010	4,9683	8,8471
01.10.2007	2	3	9	8	13	109	164	225	400	79	3		1015	4,9635	8,4568
01.01.2008	3		11	6	14	103	161	226	378	82	5		989	4,9515	8,4836
01.04.2008	3	1	7	8	21	100	160	238	387	76	4		1005	4,9662	8,4752
01.05.2008	2	2	8	5	20	104	166	219	393	71	6		996	4,9669	8,4267
01.06.2008	3	3	6	6	19	107	171	215	379	89	7		1005	4,9572	8,5831
01.07.2008	3	3	6	7	18	113	169	225	368	94	7		1013	4,9694	8,5401
01.08.2008	3	2	6	8	19	106	161	214	386	87	6		998	4,9469	8,4753
01.09.2008	3	4	5	7	20	110	156	218	390	85	8		1006	4,9503	8,5604
01.10.2008	3	4	5	9	23	108	156	221	378	92	9		1008	4,9583	8,4576
01.11.2008	3	4	6	6	20	103	156	214	382	87	7		988	4,9433	8,7360

На основании динамики изменения состава классов рассчитывается обобщенный индекс состояния банковской системы России, ИСБС. Для расчета подклассам присваиваются веса – от 1 подклассу Г1 до 12 подклассу А3. Затем производится умножение весов на количество банков в каждом подклассе и суммирование всех результатов на соответствующую отчетную дату. Для нормировки результат делится на общее количество банков, по которым производился расчет в каждый данный момент. Таким образом, значения ИСБС могут изменяться от 1 до 12.

При расчете взвешенного индекса состояния банковской системы (ИСБС-В) каждый банк умножается на долю в сумме пассивов всей банковской системы России, т.е. на отношение СП(банка) / СП(БС РФ), на последнюю отчетную дату. В ИСБС-В также производится нормировка на единицу.

В своем классе банк умножается на вес данного класса как доля, т.е. занимаемая им часть в банковской системе России. Крупные банки придают больше веса своему классу. Это показывает реальное влияние банка на состояние банковской системы в целом. В каждом классе представлены взвешенные доли суммы пассивов всех банков данного класса РДФС.

На 1 ноября 2008 года значение ИСБС-В составляет 8,7360 (для 988 банков) при максимальном значении, равном 12,00. Динамика ИСБС-В показывает, что состояние банковской системы России, после роста в 2002-2005 гг., начало снижаться в 2006-2007 гг. После заметного спада в конце 2007 года, в 2008 г. ИСБС-В колеблется на уровне середины 2005 года. Всплески на начало года связаны с тем, что банки в это время показывают прибыль. Это стало заметно с 2004 года.



Рис. 5.26. Динамика индекса состояния банковской системы России

На сегодня не существует аналогов ИСБС, ИСБС-В, т.е. показателей, которые способны одним числом охарактеризовать в динамике состояние целого сектора социально-экономической системы. РФФС может использоваться для оценки групп банков, выделенных по территориальному, отраслевому или иному признакам. Применялся, в частности, для расчета РФФС банковских систем федеральных округов РФ.

На диаграмме представлена динамика финансового результата (прибыль минус убытки) банков Москвы по ссудам, ценным бумагам и иностранной валюте по отдельным кварталам, начиная с 1.10.2002.

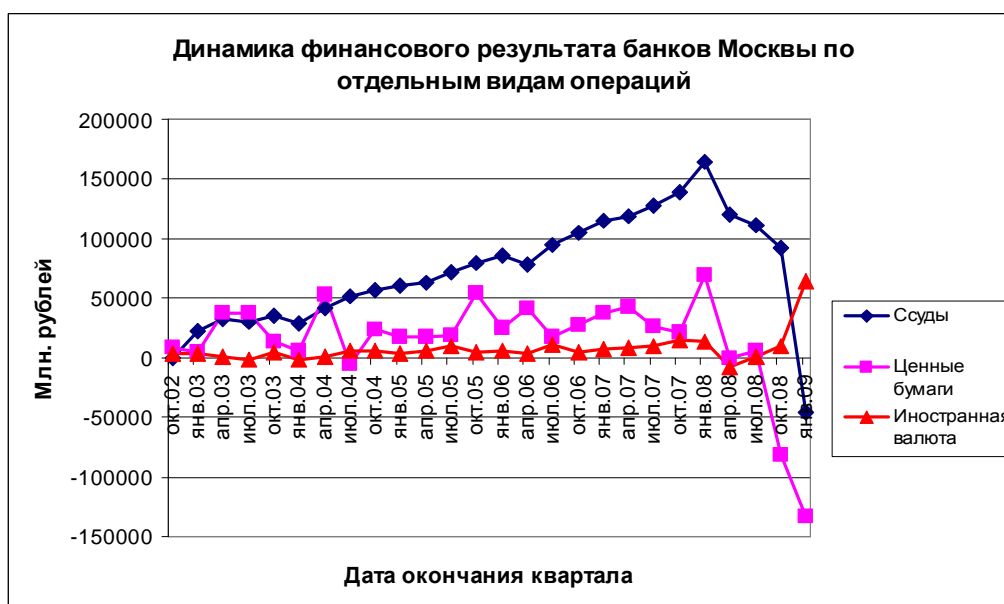


Рис. 5.26. Динамика прибыли и убытков банков Москвы

Прежде были отмечены убытки от операций по ценным бумагам во втором квартале 2004 г. В условиях развития кризиса, начавшегося в 2007 году, наблюдается перелом

тенденций по прибыли и убыткам. В 2008 году, после длительного роста началось снижение прибыли по ссудам, которое перешло в убытки в 4 квартале. Операции по ценным бумагам демонстрируют нарастающие убытки. Вместе с тем операции с иностранной валютой показали всплеск прибыли в 4 квартале. Это подтверждает опасения, что средства, предоставленные государством для поддержки банковской системы, были направлены на операции с иностранной валютой, а не на кредитование реального сектора.

Данная система разработки и производства информационных продуктов различного уровня и назначения, по сути, является составной частью информационно-аналитической системы управления устойчивым развитием, а также может рассматриваться как эталонная модель для создания систем управления другими секторами хозяйства.



### **5.3. Сетевая модель массообмена при нефтепереработке**

В рамках разработки подсистемы оперативного прогнозирования пожароопасных ситуаций (ОПСС) в АСУ ТП объектов нефтепереработки построена сетевая модель массообмена при нефтепереработке с целью расчета изменений параметров процессов при изменении структуры и выработки управляющих воздействий для вывода системы из предаварийного режима, ликвидации аварии.

Рост интенсификации нефтеперерабатывающих производств делает необходимым автоматизацию систем управления технологическими процессами. В этой связи возрастает оснащение потенциально опасных установок для нефтепереработки автоматизированными системами управления технологическими процессами на базе средств микропроцессорной техники (программируемые контроллеры, управляющие ЭВМ и др.). Актуальность проблемы обусловлена ростом интенсивности производства, при которой действия персонала могут не соответствовать выводу системы из предаварийной или аварийной ситуации. Особую важность приобретают ситуации, при которых изменяется структура системы, например, при выходе из строя отдельных элементов, подсистем, а критические показатели могут превысить предельно допустимые значения.

Разрывание связей, разрушение каналов распространения потоков продуктов происходит вследствие превышения критических показателей технологических параметров (температура, давление, напряжение и т.д.) на время, достаточное для разрушения. Необходимы расчеты, оценка, наблюдение и сравнение значений критически важных показателей с допустимыми значениями. Или контроль превышения предельно допустимых значений (ПДЗ) в течение промежутка времени, которое может привести к аварии. Или контроль нарушений и аварий, при котором аварийный участок отключается от основного процесса с целью минимизировать количество вышедшего из системы, из-под контроля продукта, ликвидировать пожароопасную ситуацию.

Сетевая модель представляет процессы и структуру связей элементов системы. При выходе из строя элементов или подсистем, расчет сети проверяет соответствие параметров ПДЗ. Это позволяет определить набор управляющих воздействий по выводу системы из предаварийной ситуации и возвращении ее в штатный режим, что особенно важно для систем, в состав которых входят пожароопасные установки и технологии: нефтедобычи и газодобычи, переработки и транспортировки нефти и газа, нефтеперегонные заводы.

#### **5.3.1. Особенности физического процесса ректификации**

Процесс переработки нефти состоит в разделении исходной смеси на компоненты с различными свойствами, например, с различной температурой кипения. Физические процессы разделения смеси компонент состоят в осуществлении однократного испарения

(ОИ) или однократной конденсации, за счет чего пар обогащается низкокипящим компонентом (НКК), а жидкость – высококипящим компонентом (ВКК) (Молоканов, 1980). При испарении или конденсации можно получить желаемые составы паровой и жидкой фаз.

Для повышения выхода продуктов используется ректификация – процесс разделения жидких смесей на отдельные компоненты или их смеси (фракции), обусловленные взаимодействием потоков пара и жидкости. Суть его в том, что при взаимодействии неравновесных паровой и жидкой фаз в процессе массообмена и теплообмена система приходит в состояние равновесия. При этом компоненты в фазах перераспределяются и вновь образованные паровая и жидкая фазы отличаются по составу от вступивших в контакт. Пары обогатятся НКК, а жидкость – ВКК. При заданном давлении температура вступающих в контакт паров должна быть выше, чем у жидкости. После контакта температуры обеих фаз выравниваются. После многократного контакта неравновесных потоков паровой и жидкой фаз их составы можно изменить в желаемой степени.

Процесс ректификации проводят в ректификационных колоннах, заполненных контактными устройствами – тарелками, насадками и т.д. В среднюю часть колонны поступает сырье, нагретое до температуры  $t_f$ . В колонне происходит процесс однократного испарения (ОИ) сырья, в результате образуются пары  $G_f$  и жидкость  $g_f$ , которые находятся в равновесии. Для обеспечения процесса ректификации в верхней части колонны отводят тепло  $Q_d$ , а в нижней части подводят тепло  $Q_b$ . В верхней части колонны наименьшая температура, а в нижней части – наибольшая. Давление по всей колонне постоянное. При конденсации паров в верхней части колонны образуется поток жидкости (орошения, флегмы), перетекающий с тарелки на тарелку. Подвод теплового воздействия  $Q_b$  в нижней части колонны обеспечивает испарение жидкости и образование парового потока.

На любой тарелке колонны происходит контакт между парами, поднимающимися на эту тарелку, и жидкостью, стекающей на эту же тарелку. При контакте встречных потоков состав фаз изменяется, и пары обогащаются НКК, а жидкость ВКК. Затем жидкость поступает на более низкую тарелку, а пары поднимаются на более высокую тарелку и каждая из фаз вступает в новое взаимодействие. В нижней части колонны (исчерпывающая секция) производится отбор ВКК, а в верхней части колонны (концентрационная секция) – НКК. Таким образом, процесс ректификации определяется балансом двух типов – баланс тепла и материальный баланс потоков продуктов (в виде жидкой фазы и паровой фазы), а также по компонентам смеси. Это важно для сложных колонн, где число отбираемых продуктов больше двух. В простой колонне осуществляется разделение сырья на два продукта.

Сетевая модель используется для расчета новых откликов при изменении структуры и воздействий, их сопоставление с ПДЗ. Известно, что основное количество пожаров и

загораний (более 80%, В.А. Александров, 1985) связано непосредственно с ведением технологического процесса нефтепереработки. При этом около половины пожаров возникает внутри технологических аппаратов.

Для оперативного прогнозирования пожароопасных ситуаций (ОППС) проводится сбор и мониторинг значений технологических параметров нефтепереработки. На основе получаемой информации производится расчет и анализ возможных превышений ПДЗ пожароопасных факторов технологического процесса, оценка опасности выхода из нормального режима в предпожарный, расчет величины и продолжительности изменения управляющих факторов для возвращения системы в нормальный режим. *Действующие системы управления не обеспечивали расчеты изменений параметров при изменении структуры, системное влияние таких изменений.*

Задачи применения сетевой модели объектов нефтепереработки:

- контроль показаний датчиков для определения превышения ПДЗ откликов на отдельных элементах системы;
- расчет и анализ последствий развития ситуации в плане перехода процессов в предпожарный или аварийный режимы;
- расчет и анализ результатов применения управляющих воздействий для возвращения системы в нормальный режим;
- изменение (увеличение) управляющих воздействий для достижения результата вплоть до остановки технологического процесса;
- при переходе в аварийный режим – применение средств тушения пожара.

Для предупреждения возникновения пожароопасных ситуаций на этапах проектирования объектов нефтепереработки, расчета и анализа причин превышения ПДЗ, определения наиболее опасных режимов и участков проводится расчет вариантов:

- поведения системы при изменении процессов, отключении или подключении подсистем;
- превышения ПДЗ или резкого падения значений параметров (свидетельствующих о разрушении конструкций) в системе;
- методик перевода системы из предаварийной ситуации в нормальный режим,
- минимизации ущерба при возникновении аварийных ситуаций, оптимизации применения средств контроля, предупреждения и ликвидации пожароопасных ситуаций.

Наиболее существенными для анализа и прогноза пожароопасной ситуации на объектах нефтепереработки являются два режима, при которых меняются либо параметры процессов, либо структура связей. В первом случае возможны изменения воздействий (давлений, потоков реагентов или исходных компонент, температуры); соответствующие изменения откликов в путях прохождения продуктов; структура связей элементов системы не

нарушается. Во втором случае значения источников воздействия постоянны, а изменения значений откликов происходят за счет изменения структуры – подключении или отключении путей продуктов (новых технологических цепочек), выхода из строя ветвей или подсистем, закрытии или открывании кранов; также возможны аварии, при разрушении отдельных путей потоков или подсистем.

Результатами изменений указанных типов может быть изменение состояния системы, т.е. всей сети потоков нефтепродуктов и переход ее от нормального режима работы к предпожарному режиму и затем к пожарному (аварийному).

Анализ показателей пожарной опасности процесса экстракции показывает, что предпожарный режим характеризуется тремя группами параметров: технологического процесса, внешней среды, технологического оборудования. Выход значений этих параметров в область предпожарного режима может возникнуть вследствие воздействий внешней среды, поломок конструкций, выхода из строя оборудования или вследствие ошибочных действий персонала. Причины выхода значений параметров в область предпожарного режима различны и непредсказуемы. Вместе с тем механизмы управления, которые включают факторы воздействия с целью приведения значений параметров в штатный режим, известны и определяются конструкцией установки и возможностями системы управления.

Причины возникновения пожара: превышение давления; превышение температуры смеси (особенно на участке нагрева); превышение уровня подачи смеси, превышении ПДЗ одного или нескольких компонентов смеси. При отклонении показателей датчиков контроля выше предельно допустимых значений возможны следующие действия:

- возврат системы в нормальный режим с помощью штатных воздействий без остановки производственного процесса;
- управляющие воздействия с остановкой производственного процесса с целью предотвратить возгорание или разрушение системы. Для этого в аппараты подаются инертные среды, производится сброс продукта в аварийные емкости и т.д.

Для принятия управляющего решения необходим ручной или автоматический контроль состояния и динамики развития нештатной ситуации с целью оценки степени ее опасности. Остановка процесса связана с потерями производимого продукта. Недооценка опасности и продолжение процесса при аварии приводит к увеличению разрушений и большим трудностям при ликвидации последствий. В аварийном режиме необходимо остановить технологический производственный процесс.

Нефть поступает из резервуаров складирования на входе (куда подается путем транспортировки по трубопроводам или транспортными средствами); конечные продукты поступают на склад хранения готовой продукции (в резервуары, трубопроводы).

Для создания сетевой модели потоков продуктов в процессе нефтепереработки необходимо привести уравнения описания к тензорному виду. Для этого надо записать уравнения баланса между всеми потоками на входе, выходе сети и в процессе переработки. Построение сетевой модели НПЗ соответствует тензорной технологии (глава 1):

- запись уравнений описания движения потока в одном элементе сети;
- описание графа соединения элементов в сети технологии нефтепереработки;
- описание баланса потоков нефтепродуктов в узлах технологической цепочки;
- построение матриц преобразования при изменении структуры сети;
- получение уравнений преобразования при изменении структуры сети.

### 5.3.2. Аналогии параметров массообмена и сети

Для установления аналогий между понятиями массообмена при ректификации и сетевой модели, рассмотрим переход веществ из одной фазы в другую. При переработке нефти в бензин, масло, дизтопливо, другие продукты, потоками являются продукты, преобразуемые в ходе технологического процесса от сырой нефти в конечные продукты.

Воздействия: изменения температуры, давления, скорости потока, химические воздействия и т.д. Отклики на воздействия: потоки нефти на входе и потоки конечных продуктов переработки на выходе. Потоки продуктов преобразуются под действием изменения температуры и концентрации. Элементами сети являются ветви, в которых происходит разделение смеси. Подключение или отключение элементов, в зависимости от особенностей технологии, или в результате аварий изменяет значения параметров, обладающих свойствами разрушения, приводит, например, к превышению ПДЗ давления.

Процесс ректификации – прохождение потоков разделяемых фаз по сети, структура которой задана тарелками, насадками связанных ректификационных колонн, в которых экстрагируются продукты нефтепереработки. Экстракторы – неделимое звено технологической цепочки – могут рассматриваться как отдельные ветви сетевой модели процесса нефтепереработки.

*К технологическим пожароопасным параметрам процесса относятся:* давление, температура, уровень, расход, соотношение компонент реагентов, скорость вращения. Можно установить соответствие между показателями процесса нефтепереработки и сети.

При контакте потоков двух смесей (фаз, обозначим их  $G$  и  $L$ ), которые состоят из нескольких веществ с различной концентрацией, возможен переход компонент из одной фазы в другую. Обозначим в фазе  $L$ , с массой  $l$ , массы компонент через  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , а в фазе  $G$ , с массой  $g$ , массы компонент – через  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . Массовые доли (массовые концентрации) обозначим соответственно через:

$$x_1 = l_1/l, x_2 = l_2/l, \dots, x_n = l_n/l, u_1 = g_1/g, u_2 = g_2/g, \dots, u_n = g_n/g. \quad (5.65)$$

Сумма концентраций компонент в каждой фазе естественно равна единице.

Перенос вещества между фазами обусловлен *разностью концентраций компонента* в отсутствии равновесия. В процессе нефтепереработки разность температур жидкости и пара вызывает движение компонент из одной фазы в другую, поскольку нарушает равновесие. При движении потока перенос вещества компонент в каждой фазе складывается из переноса к границе раздела фаз и переноса из одной фазы в другую через границу раздела.

Перенос вещества из ядра (основная часть потока данной фазы) к границе раздела фаз обусловлен главным образом *конвективной диффузией* (в результате движения частиц данной фазы) к поверхности фазового контакта  $dF$ .

Перенос вещества через пограничные слои фаз (жидкости и пара), примыкающие к границе раздела фаз, вызывается главным образом *молекулярной диффузией*, т.е. движением молекул через слой данной фазы. Процесс молекулярной диффузии определяется законом Фика, аналогичным закону теплопроводности. При этом количество вещества  $M$ , диффундирующего через слой (состоящий из пограничного слоя жидкости  $dG$  и пограничного слоя пара  $dL$ ) в единицу времени, пропорционально поверхности слоя  $dF$  и градиенту концентраций  $x_i/dn$ :

$$dM = -D x_i/dn dF, \quad (5.66)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии (количество вещества, перешедшего в единицу времени через единицу поверхности при градиенте концентраций, равном единице).

Движущей силой процесса, *воздействием* здесь является градиент концентраций пропорциональный толщине слоя раздела. Он определяется неравновесностью концентраций компонент в двух фазах в процессе ректификации, определяется концентрациями НКК в паре и ВКК в жидкости, а также разностью температур двух фаз, которая задана нагреванием в нижней части колонны и охлаждением в верхней части. *Откликом* является поток вещества через границу раздела. *Мера инерции* движения потока – коэффициент диффузии  $D$ .

Итак, скорость переноса вещества  $dM$  из одной фазы в другую пропорциональна движущей силе процесса  $U$ , характеризующей степень отклонения системы от состояния равновесия, (градиент температуры, градиент концентрации) и поверхности раздела  $dF$  (определяется площадью тарелок, на которых происходит контакт двух фаз на протяжении всей колонны). В общем виде уравнение массопередачи:

$$dM = K U dF, \quad (5.67)$$

где  $K$  – коэффициент массопередачи. В уравнениях конвективной диффузии и массопередачи размерности коэффициентов массопередачи и массотдачи одинаковы.

Коэффициенты диффузии, массопередачи и массотдачи характеризуют фазовые сопротивления массопереносу из фазы  $L$  в фазу  $G$ . Их связывают соотношения аддитивности,

которые определяют материальный баланс массопередачи: общее сопротивление массопереносу между фазами равно сумме фазовых сопротивлений массопереносу. Эти соотношения имеют вид:

$$1/K_x = 1/b_y + m/b_y; \quad 1/K_y = 1/b_x + 1/m b_x.$$

Таким образом, имеются соотношения между величинами сопротивления, параметров метрики при переносе компонентов между фазами.

В состоянии равновесия между фазами  $G$  и  $L$  (скорости переходов из одной фазы в другую выравниваются) между концентрациями любого компонента смеси в обеих фазах есть зависимость, определяемая параметрами вещества и процесса (давление, температура). Если фактическая концентрация компонента в фазе  $G$  больше равновесной, то данный компонент будет переходить из фазы  $G$  в фазу  $L$ , и наоборот если фактическая концентрация компонента в фазе  $L$  больше равновесной, то данный компонент будет переходить из фазы  $L$  в фазу  $G$ . В процессе ректификации происходит массопередача в двух направлениях – из пара в жидкость НКК, а из жидкости в пар – ВКК. В нижней части колонны происходит отбор смеси, обогащенной ВКК, а в верхней – происходит отбор смеси, обогащенной НКК. В среднюю часть поступает неразделенная смесь, насыщенная как НКК, так и ВКК.

Общая схема движения потоков промежуточных продуктов в процессе ректификации представлена элементами сети на рис. 5.26. Стрелки показывают направления движения потоков продуктов от питательной секции к участкам нагрева в концентрационной секции и охлаждения в отгонной секции колонны. Круги обозначают воздействия в виде вбрасывания в питательной части колонны, источника нагрева в нижней части и охлаждения в верхней части. Жирные стрелки показывают точки поступления и отвода продуктов, которые играют роль источников тока. Аналогично можно представить конструктивные управляющие и передающие элементы при детализации технологического процесса. Показаны потоки обмена между фазами жидкости и пара ВКК и НКК при движении в колонне. Ректификационная колонна овалом изображена слева.

Наклонные линии обозначают движение жидкости по тарелкам в колонне сверху вниз, а пара снизу вверх. Горизонтальные линии обозначают движение НКК из жидкости в пар, а ВКК из пара в жидкость. Как поток пара, так и поток жидкости, вообще говоря, должны представляться двумя параллельными линиями, одна из которых описывает поток движения НКК, а другая — ВКК.

Разность температур пара и жидкости задает градиент температуры, который представлен контурным источником воздействия (ковариантная компонента). Этот градиент выводит компоненты из состояния равновесия и является движущей силой данного процесса.

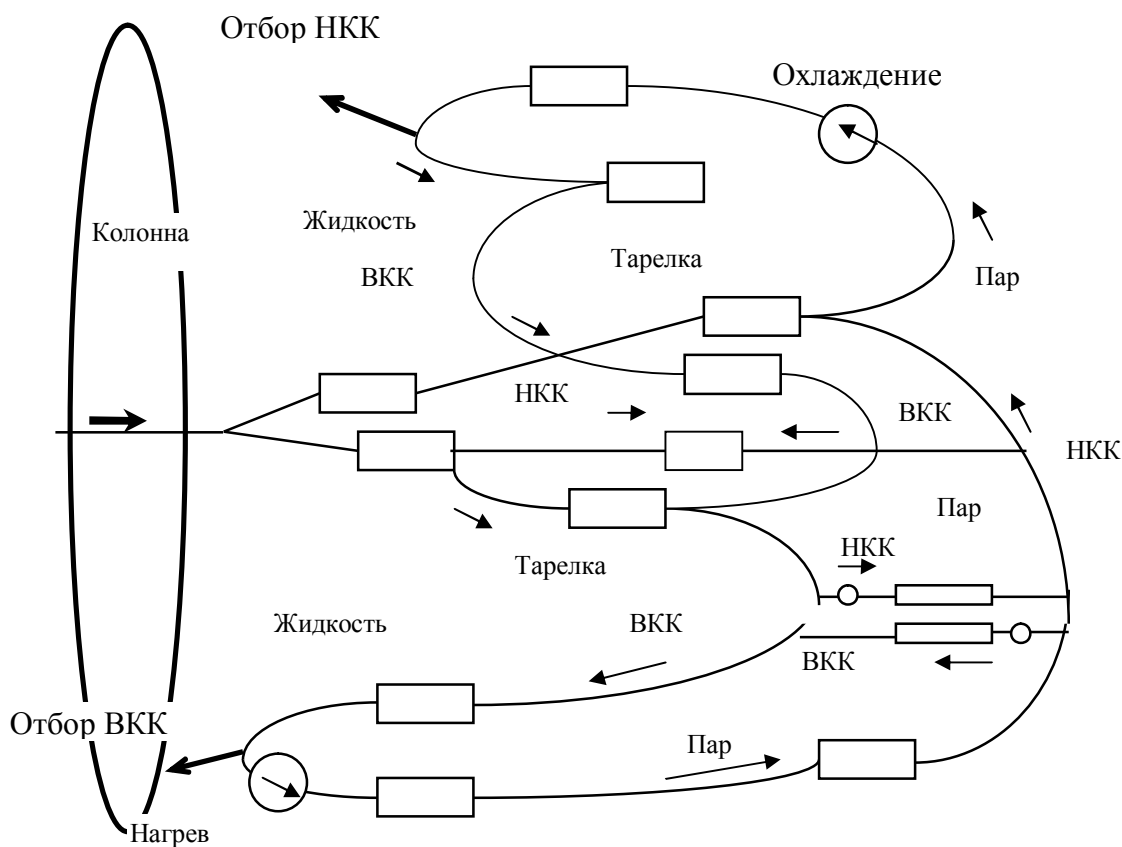


Рис. 5.26. Сетевая схема обмена ВКК и НКК между жидкостью и паром в процессе ректификации в колонне при прохождении тарелок

### 5.3.3. Тепловой и материальный баланс колонны

Процесс ректификации характеризует баланс двух типов – баланс тепла и материальный баланс потоков продуктов (в виде жидкой фазы и паровой фазы) по каждому компоненту смеси. Разделение по каждой компоненте существенно для сложных колонн, где число отбираемых продуктов (с помощью дополнительных боковых погонов) больше двух.

В случае многих компонентов каждой из них должна соответствовать своя линия потока, причем каждая из них может иметь массообмен с каждой из других линий, оказывая свое парциальное давление, причем фазовое сопротивление имеет свой коэффициент диффузии. Таким образом, движение потоков в колонне образует достаточно сложную структуру, которая включает также боковые погоны отбора промежуточных продуктов.

*Материальный баланс* для бинарной смеси обычно составляют для потоков низкокипящего компонента (НКК). При установившемся режиме работы колонны массы потоков не меняются, следовательно, для всей колонны материальный баланс имеет вид:

$$F = D + W,$$

где  $F$ ,  $D$  и  $W$  – соответственно количества сырья, дистиллята и остатка. Для НКК получим:

$$F x_F = D y_D + W x_W.$$

Заменив  $W = F - D$  и преобразуя, получим, что относительный отбор ректификата



$$e = D/F = (x_F - x_W) / (y_D - x_W).$$

Тогда относительный отбор остатка, равный  $I - e$ , составит

$$I - e = W/F = I - D/F = (y_D - x_F) / (y_D - x_W).$$

Эти соотношения показывают связь потоков в колонне и соответствующих концентраций НКК в продуктах. Значение отбора ректификата определяет узловое воздействие в верхней части колонны. Аналогичный баланс можно составить для ВКК. Это необходимо для полного описания потоков в колонне и приведения описания потоков к тензорному виду. Узловым воздействием для этого баланса будет отбор остатка ВКК в нижней части колонны.

Таким образом, материальный баланс потоков компонент в колонне определяет узловую подсистему сети, причем между параметрами массообмена и сети можно установить аналогии. Роль воздействия играют разности концентраций компонента, как между фазами, так и между фактическими и равновесными концентрациями каждого компонента в каждой фазе (пар и жидкость). Равновесные концентрации зависят от температуры, следовательно, по мере изменения температуры от нижней до верхней части колонны скорости перехода компонент между фазами изменяется. Таким образом, на узловую часть сети, связанную с материальными потоками, накладывается влияние контурной части сети, связанной с потоками тепловой энергии в установке.

Роль токов отклика на входе и выходе колонны играют количества сырья  $F$ , дистиллята  $D$ , и остатка  $W$  в единицу времени. Внутри колонны, в процессе ректификации, токи представлены движением НКК и ВКК – переход между фазами жидкости и пара на тарелках и совместный переход компонент в смесях от тарелки к тарелке.

Роль сопротивлений на ветвях, представляющих потоки продуктов в колонне и обмена веществом между паром и жидкостью играют фазовые сопротивления массопереносу, которые, как показано выше, определяются коэффициентами: диффузии –  $K_D$ , массоотдачи –  $K_b$  и массопередачи –  $K_p$ . Как показано выше, эти сопротивления сопоставимы друг с другом по физической размерности и аддитивны.

**Тепловой баланс** потоков компонент в колонне определяет в модели контурную подсистему сети. Эти контуры состояются потоками испарения НКК и конденсации ВКК на каждой тарелке и вызваны разностью температур двух фаз, с которыми они поступают на каждую тарелку.

Тепловой баланс ректификационной колонны определяется обменом энергии в виде тепла между контактирующими фазами. Важное для безопасности условие – все подведенное в колонну тепло: с сырьем  $Q_F$ , и в нижнюю часть колонны  $Q_b$  должно быть полностью отведено из колонны (включая потери в окружающую среду) парами ректификата

$Q_D$ , жидким остатком  $Q_W$  и потоком хладагента в верхней части колонны  $Q_d$ . Тепловой баланс для этих показателей имеет вид:

$$Q_F + Q_b = Q_D + Q_W + Q_d.$$

Отдельные слагаемые теплового баланса определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} Q_F &= F(1 - e) i_{mF}^{жс} + F e i_{mF}^n; \\ Q_b &= G(i_{mW}^n - i_{mW}^{жс}) = G q_{ucn}; \quad Q_d = g(i_{md}^n - i_{md}) = g q_{ucn}; \\ Q_D &= D i_{md}^n; \quad Q_W = W i_{mW}^{жс}. \end{aligned}$$

Эти уравнения преобразуем к виду уравнений материального баланса. Для этого вместо  $W$  подставим выражение из уравнения материального баланса, равное  $F - D$  и объединим члены уравнений, относящиеся к потокам верха и низа колонны.

$$Q_F = (D i_{md}^n + Q_d) + (W i_{mW}^{жс} - Q_b).$$

Обозначив приведенные энтальпии потоков ректификата и остатка соответственно

$$i_D^* = i_{md}^n + Q_d/D, \quad i_W^* = i_{mW}^n - Q_b/D,$$

получим соотношения, аналогичные закону Ома по тепловым потокам.

С учетом приведенных энтальпий уравнение теплового баланса колонны:

$$Q_F = D i_D^* + W i_W^*.$$

Подставляя сюда значения количества остатка  $W$  и тепла, поступающего с сырьем, получим уравнения, которые аналогичны уравнениям материального баланса и включают в себя материальные потоки и энтальпии.

$$\begin{aligned} e &= D/F = (i_F - i_W^*) / (i_D^* - i_W^*), \\ 1 - e &= W/F = 1 - D/F = (i_D^* - i_F) / (i_D^* - i_W^*). \end{aligned}$$

Роль *источников воздействия* контурной подсети в тепловом балансе играют разности температуры компонента как между фазами на тарелках, так и нагрев жидкости в нижней части колонны и охлаждение фаз колонны (пар и жидкость) в верхней части. Равновесные концентрации компонент зависят от температуры, и по мере изменения температуры от нижней до верхней части колонны, меняются скорости перехода компонент между фазами. Итак, нагревание и охлаждение создают разность температур, *тепловой потенциал*, который накладывается на узловую подсеть (потоки материи), и представляет собой влияние контурной части, связанной с потоками тепловой энергии в установке.

Роль *напряжений отклика* на тарелках колонны, представляемых ветвями сети, играют разности температур между фазами жидкости и пара на каждой тарелке и (при необходимости) учет теплотерь при переходе между тарелками. Эти напряжения измеряются энтальпиями (термодинамический потенциал), которые представлены в уравнениях теплового баланса. Токами отклика являются потоки ректификата и остатка, что связывает между собой уравнения материального баланса и теплового баланса.

Разности температур определяются как количеством тепла в единицу времени, подаваемого в нижней части колонны, так и отбираемого при охлаждении в верхней части колонны. Внутри колонны *напряжения* представлены градиентом температуры, который выводит компоненты фаз жидкости и пара на тарелках из состояния равновесия.

Роль сопротивлений тепловому потоку на ветвях, представляющих потоки продуктов в колонне и обмена веществом между паром и жидкостью, играют коэффициенты теплопередачи (тепловые емкости) компонент. Эти показатели сопоставимы друг с другом по физической размерности и аддитивны.

На рис. 5.27 представлена сетевая схема обмена компонентами между фазами на одной тарелке. Слева две линии изображают поток жидкой смеси ВКК и НКК сверху вниз, справа две линии изображают поток паровой смеси ВКК и НКК снизу вверх. Поток ВКК изображен жирными линиями, поток НКК – тонкими. Тарелка изображена схематически снизу.

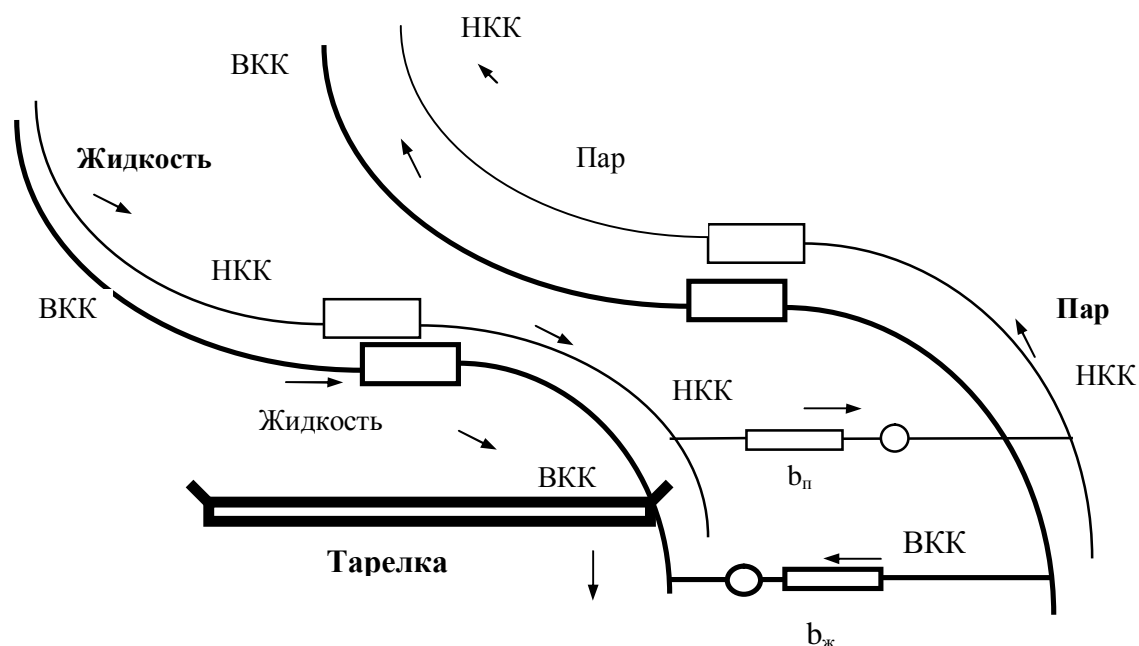


Рис. 5.27. Сетевая схема обмена ВКК и НКК между жидкостью и паром при массообмене на одной тарелке

На этой схеме горизонтальные линии с кружками изображают неравновесный переход НКК из жидкой фазы в парообразную, а ВКК из парообразной – в жидкую. Кружки – эквивалентные источники напряжения в образуемой контурной сети – представляют разность температур фаз, которая является движущей силой процесса. Сами потоки фаз движутся под действием нагрева в нижней части и охлаждения в верхней части, как было показано на предыдущем рисунке. Нагрев и охлаждение, как отмечалось, играют роль узловых источников тока. Коэффициенты массоотдачи  $b_n$  и  $b_ж$  играют роль взаимных сопротивлений между ветвями основных потоков фаз.

Таким образом, процесс ректификации можно рассматривать как прохождение потоков разделяемых фаз по сети, структура которой задана тарелками, насадками связанных ректификационных колонн. В зависимости от детальности анализа, в качестве ветвей можно выбрать отдельные тарелки или потоки каждой фазы (пара и жидкости) через тарелки и между тарелками.

Можно представить структуру связей потоков более детально с учетом изменения температуры и концентраций компонент в фазах по мере перехода от тарелки к тарелке вдоль колонны. Кроме того, при необходимости можно учесть движение компонент из ядра фазы к границе раздела фаз, как это рассмотрено выше. Это усложнит структуру и расчеты, но сделает анализ более подробным. При таком изображении структуры связей потоков предполагается, что движением компонент между фазами пара и жидкости при переходе от тарелки до тарелки можно пренебречь и рассматривать эти пути как связи между ветвями сети без сопротивлений.

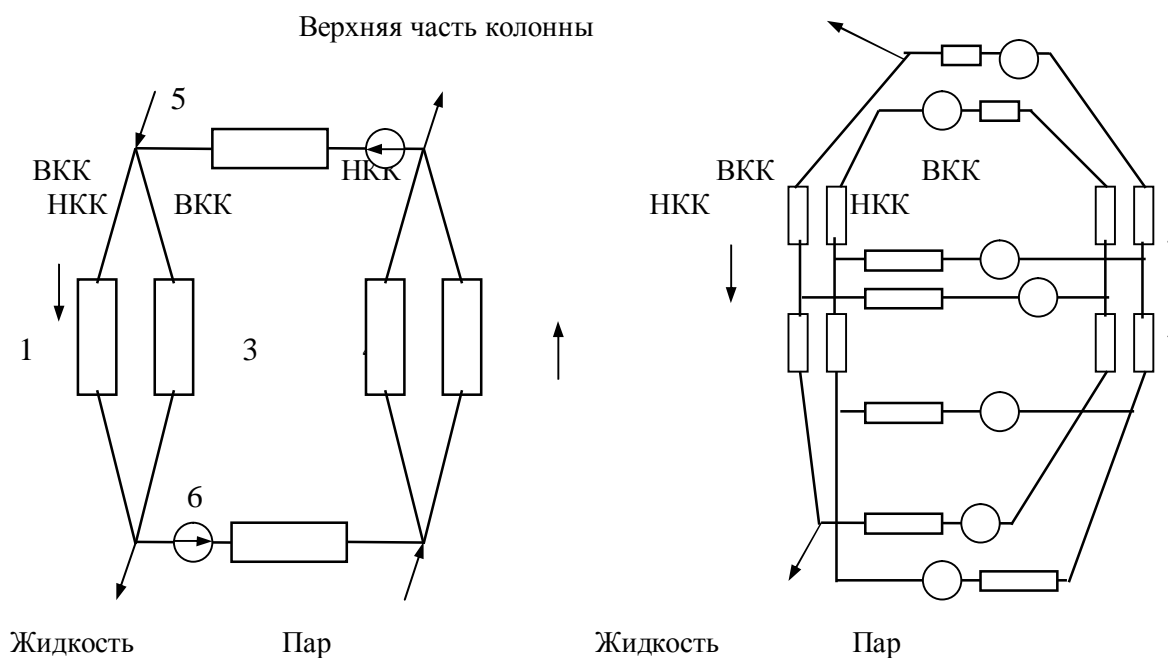
#### **5.3.4. Сетевая модель процесса ректификации для анализа пожароопасных ситуаций**

Представленная на рис. 5.26 схема связи потоков, по сути, определяет структуру одной ячейки, подсистемы сети. Даже при таком минимальном представлении она должна состоять из 6 ветвей, которые образуют как замкнутые пути, так и разомкнутые пути. Рассмотрим возникающие при этом матрицы преобразования.

Схему сети можно представить двояко. С одной стороны, жидкость и пар образуют два встречных, но единых потока. Только на тарелках они разделяются на потоки фракций-компонент, которые взаимодействуют друг с другом, связывая потоки пара и жидкости, как показано на рис. 5.27. Сетевой недостаток такой структуры в том, что внутренние циклы в каждой фазе физически приводят к возникновению контурного тока отдельно внутри жидкости и внутри пара. Это покажет неявную циркуляцию между НКК и ВКК в каждой из фаз. В реальности такой циркуляции может не быть – компоненты независимы. Однако такая циркуляция может быть, если учесть химические преобразования компонент друг в друга под действием давления и температуры. Эквивалентной схеме на рис. 5.28.a соответствуют свои матрицы преобразования для контурной и узловой подсетей.

С другой стороны, можно рассматривать два независимых цикла-потока компонент через колонну – НКК отдельно, ВКК отдельно. На тарелках они обмениваются веществом под действием разности температур и разности концентраций, которые приводят их в неравновесное состояние. Такая эквивалентная схема показана на рис. 5.28б. Эти циклы проходят независимо по всем тарелкам и в верхней части колонны подвергаются охлаждению, а в нижней – нагреву. ВКК имеют отток в нижней части, НКК – в верхней части. Такому представлению схемы связей потоков, предполагающему отсутствие

взаимодействия компонент, соответствуют другие структурные соотношения и матрицы преобразования для контурной и узловой подсетей.



а) Схема общего потока НКК и ВКК      б) Схема раздельного потока НКК и ВКК

Рис. 5.28. Схемы подсистемы сети, соответствующие одной тарелке

Для каждого из вариантов контурные источники напряжения, связывающие потоки на тарелках, одинаково имеют две составляющих – разность температур и разность концентраций вещества во фракциях, которые и вызывают процесс передачи массы из одной фазы в другую. Движущая сила процесса массообмена на тарелках имеет вид источников напряжения, обозначенных кружками, для ВКК (компонент  $x$ ):

$$e_x = dT + dx = (t_n - t_{жс}) + (x_n - x_{жс});$$

для НКК (компонент  $y$ ):

$$e_y = dT - dy = (t_n - t_{жс}) - (y_{жс} - y_n).$$

При этом разность температур способствует испарению НКК в большей степени, чем конденсации ВКК.

В сети на рис. 5.28а число ветвей  $n = 6$ , узлов  $J = 4$ , подсеть одна  $s = 1$ . Следовательно, независимых разомкнутых путей  $j = J - s = 3$  и независимых контуров  $m = n - j = 3$ . Матрица преобразования имеет вид:

	1	2	3	4	5	6
1	1		3		1	1
2		1		1	1	1
3	1	-1				
4	1					
5				-1		
6			1		1	

$C_b^a =$

Это матрица преобразования отдельных сетей в данную связанную сеть. При изменениях структуры, в том числе связанных с аварийными ситуациями, матрица преобразования принимает другой вид, в котором отражаются изменения, как путей, так и замыкания одних путей при размыкании других путей. Соответственно изменяются уравнения материального и теплового баланса, которые определяют основные величины, характеризующие работу технологического процесса в ректификационной колонне.

Последовательность этапов построения сетевой модели нефтепереработки:

- запись уравнений описания движения потока в элементе сети, например, уравнений движения под действием источников тепла в нижней части колонны или хладоагента в верхней части колонны с помощью уравнений материального и теплового баланса;
- описание схемы соединений питательной секции и тарелок для различных источников теплового воздействия;
- построение матриц преобразования при изменении структуры – изменении количества и конфигураций тарелок, где проходят промежуточные продукты в процессе переработки;
- получение уравнений преобразования решения от заданной структуры к сети, изменяемой в результате сбоев или аварийной ситуации, за время прохождения ректификата и остатка по системе сложной колонны, соединенной из простых колонн.

Переход системы из нормального в предожарный режим определяется путем сравнения новых значений откликов с ПДЗ по каждому элементу (пути, узлу). Возможные реакции зависят от уровня и продолжительности превышения ПДЗ:

1. Параметры вернулись в границы ПДЗ. Воздействия не нужны.

2. Отклики – параметры не вернулись в границы ПДЗ, но не превышают аварийных значений (требующих остановки процесса). Необходимо понизить подачу-воздействие исходных продуктов, и/или скорости прохождения технологического процесса. Производится два расчета – по изменениям параметров управления и по времени воздействия аварийных факторов.

Первый расчет – по количественным изменениям – показывает, на сколько надо уменьшить подачу реагентов, снизить давление в системе, понизить температуру, т.е. на сколько надо изменить управляющие воздействия, с тем, чтобы показатели откликов вернулись в пределы ПДЗ.

Второй расчет (по времени) должен показать, за какое время ситуация нормализуется. Он определяет время допустимого пребывания откликов выше ПДЗ при таких значениях без угрозы аварии (разрушения конструкций или возгорания внутри системы). Если время больше допустимого, то производится расчет уменьшения подачи продуктов (вплоть до

остановки технологического процесса) при которых превышения ПДЗ будут ликвидированы за приемлемое время по каждому элементу.

3. Отклики превысили аварийные значения по одному или нескольким элементам. Это значит, что через некоторое расчетное время произойдет (или уже произошло) разрушение системы (потокопроводов) избыточным давлением или возгорание вследствие превышения температурного режима с последующим разрушением. Реакция управления – снижение уровня подачи продуктов, вплоть до отключения и остановки технологического процесса.

4. Ситуация перешла в аварийный режим – с развитием пожара в системе и/или разрушением конструкций – проводников продуктов. Включение средств ликвидации аварии: введение инертных сред, сброс продуктов в аварийные емкости и т.д. Контроль датчиков может показать разрушение, требующее отключения отдельных подсистем, помимо остановки технологического процесса – при резком падении давления в некоторых ветвях. Для контроля и управления это может стать важнее резкого повышение давления.



Управляющие факторы (Давление, температура, питающий поток)      Величины откликов в системе (Давления, температуры, потоки в элементах)

**Рис. 5.29. Схема обмена информацией при контроле технологического процесса**

Расчет откликов на воздействия производится решением уравнений нефтепереработки. Каждое значение откликов сопоставляется с показаниями датчиков давления и температуры.

Исходные значения:

- Вектор значений потоков продуктов в каждой ветви – показания датчиков и расчеты текущих значений или прогноза их ожидаемого изменения в каждой точки по результатам уже поданных в систему исходных компонент.
- Вектор значений давлений в каждой ветви – показания датчиков и расчеты текущих значений или прогноза аналогично продуктам.
- Вектор значений температуры в каждой ветви – показания датчиков.

На основе сопоставления значений в двух массивах данных (показаний датчиков и значений управляющих воздействий), синхронизированных по оси времени, производится калибровка системы по ее реакции на различные по величине и участкам приложения воздействия. Это обеспечивает создание банка данных стандартных реакций системы на воздействия. Такие воздействия используются для автоматического выведения системы в нормальный режим из часто встречающихся нештатных (предпожарных) ситуаций.

Общая схема сопоставления показаний датчиков с управляющими воздействиями показана на рис. 5.29. Эта схема является основой реализации программного обеспечения. Слева представлены управляющие факторы, которые определяют интенсивность процесса ректификации – давление, температура нагревателей и охладителей. Справа – показания датчиков, которые контролируют потоки промежуточных продуктов в процессе нефтепереработки. Внизу показан блок расчетов изменений управляющих воздействий для приведения системы в нормальный режим при превышении ПДЗ.

Сравнение показателей датчиков с ПДЗ производится через заданные промежутки времени автоматически. Если превышены ПДЗ по одному или нескольким датчикам, то эти величины подаются через блок сравнения на сетевую модель (в программной реализации). Здесь они принимаются в качестве откликов, на которые необходимо изменить источники воздействия одного или нескольких типов, которые приведут систему в нормальный режим, т.е. изменят отклики до уровня, не превышающего ПДЗ.

Изменения производятся с помощью набора действий, выбираемых в банке данных стандартных управляющих воздействий на наиболее часто встречающийся набор отклонений, либо с помощью расчета необходимого изменения воздействий (по величине и месту приложения) для нормализации ситуации за допустимое время.

### **5.3.5. Тепловой и гидродинамический баланс каталитического крекинга углеводородного сырья и регенерации закоксованного катализатора**

Разработанная сетевая модель применялась для расчета состояния реакторно-регенераторного блока реальной установки. Сетевая модель применялась для расчета потоков тепла и материалов с целью получения метода и алгоритмов расчета изменения критичных для пожароопасных ситуаций параметров в отдельных узлах и подсистемах установки. Компонентами потоков тепла и материалов в установке являются сырье,



продукты деления, воздух, пар, шлам, твердые частицы катализатора. Расчет должен показывать возможности превышения ПДЗ для отдельных узлов и подсистем реакторно-регенераторного блока установки.

Процесс осуществляется в схеме ступенчато-противоточного крекинга (СПКК) с разложением флегмы и без разложения флегмы. Материальные и тепловые потоки заданы на входе и выходе каждого узла, что позволяет определить режим его работы. Задание давления и характеристик катализатора позволяет определить объемные и линейные скорости движения газовой и твердой фазы, а также гидравлическое сопротивление узла.

Наиболее важными параметрами являются температура, поток тепла и давление. Доступны измерению значения этих и связанных с ними параметров на входе и выходе отдельных узлов. Расчет реакторно-регенераторного блока установки каталитического крекинга углеводородного сырья включает в себя расчет теплового и гидродинамического баланса отдельных узлов, которые входят в состав циркуляционного контура установки.

Реакционная часть установки каталитического крекинга состоит из узлов:

- узел захвата катализатора, который осуществляет транспорт катализатора водяным паром;
- узел ввода сырья в прямоточный реактор – испарение жидкофазного сырья,
- 2-я транспортная линия в схеме СПКК без разложения флегмы;
- прямоточный реактор – каталитический крекинг углеводородного сырья с образованием продуктов реакции;
- 2-я транспортная линия в схеме СПКК с разложением флегмы;
- узел ввода шлама в десорбер – испарение диспергированного шлама при контакте с катализатором.

#### **Расчет тепловых потоков и теплового баланса отдельных узлов.**

Полный тепловой баланс для каждого узла включает в себя 11 компонент прихода тепла и 14 компонент расхода тепла.

Расчет циркуляции катализатора по тепловому балансу регенератора. Потоки тепла в полной схеме регенератора соответствуют параметрам контурной подсети сетевой модели системы. Перечислим параметры тепловых потоков на входе и выходе регенератора.

Компоненты тепловых потоков на входе задают поступление тепла:

- с катализатором
- с коксом, образовавшимся в процессе крекинга
- с горением кокса
- с воздухом
- с адсорбцией воды
- с влагой воздуха
- с остаточным коксом
- с влагой, увлекаемой из десорбера.

Компоненты тепловых потоков на выходе определяют отбор тепла:

- с катализатором
- с воздухом и дымовыми газами
- с влагой, образующейся при горении кокса

- с влагой воздуха
- в теплообменнике
- с остаточным коксом
- влагой, увлекаемой из десорбера
- теплотери
- с инертными газами.

Тепловой баланс регенератора с общим кипящим слоем катализатора может использоваться при расчете секционированного регенератора в целом (при необходимости при детализации рассматриваются отдельные секции), а также при двухстадийной регенерации катализатора в отдельных аппаратах, входящих в состав циркуляционного контура реакторно-регенераторного блока.

Поток тепла  $Q$  равен массовому расходу  $M$ , умноженному на энтальпию  $g$  – тепловой потенциал для данной температуры.

$$Q = M g. \quad (5.68)$$

При таком расчете не учитывается массовый расход от горения кокса, поток тепла от него принимается в качестве источника воздействия, который должен обеспечивать заданную температуру на входе регенератора. Скорость циркуляции катализатора в регенераторе равна 491,636 кг/сек. или 1769,888 т/час. Расчет тепловых потоков в ккал/с производится по формуле (5.67) умножением массового расхода в кг/с на энтальпию в ккал/кг. Тепловые потоки от горения кокса и адсорбции воды измеряются непосредственно.

Таблица 5.15

Расчет теплового баланса регенератора

№	Параметры потоков тепла	Тепловые потоки ккал/с	Доля статьи, %	Массовый расход, кг/с	Температура, °С	Энтальпия, ккал/кг
<b>Приход тепла</b>						
1.	с катализатором	67034,50	63,35	491,6355	505	136,35
2.	с обр. коксом, $k_0 = 0,72\%$	898,93	0,85	3,5601	505	252,5
3.	с ост. коксом, $k_2 = 0,10\%$	124,14	0,12	0,4916	505	252,5
4.	с горением кокса	33731,95	31,88			(9475)
5.	с адсорбцией воды	1557,19	1,47			540
6.	с воздухом	1482	1,40	51,4820	120	28,8
7.	с влагой воздуха	168,62	0,16	0,2626	120	641,611
8.	с влагой из десорбера	817,84	0,77	0,9833	505	831,75
	Сумма	105815,84	100,00			
<b>Расход тепла</b>						
1.	с катализатором	91591,70	86,56	491,6355	690	186,3
2.	с ост. коксом, $k_2 = 0,10\%$	169,61	0,16	0,4916	690	345,0
3.	с дымовыми газами	9784,91	9,25	52,1584	700	187,6
4.	с влагой, образующейся при горении кокса	2707,78	2,56	2,8837	700	939
5.	с влагой воздуха	246,54	0,23	0,2626	700	939
6.	с влагой из десорбера	923,29	0,87	0,9833	700	939
7.	теплотери	392,00	0,37		700	
	Сумма	105815,84	100,00			

Пример расчета, представленный в таблице 5.15, показывает равновесный баланс тепловых потоков в регенераторе, что не приводит к перегреву или охлаждению данного узла. Поступление тепла компенсируется отводом. Снижение массовых расходов компонентов на входе может привести к нарушению теплового баланса, уменьшению тепловых потоков и понижению производительности данного узла установки.

Снижение массовых расходов компонентов на выходе, к тому же нагретых в процессе регенерации до температуры 700 градусов, приводит к накоплению тепла в установке, вызвав перегрев и повышение давления до уровней, превышающих ПДЗ. Это может привести к пожароопасной ситуации, вызванной как возможностью возгорания, так и разрушения конструкции узла регенератора.

Причинами нарушения теплового баланса могут быть изменения в структуре узла, связанные с препятствиями на пути любых компонентов, однако наиболее опасными, как видно из таблицы 5.15, являются поток катализатора, дымовые газы и влага, образующаяся при горении кокса. На долю катализатора приходится около 87% тепловых потоков на выходе, на долю дымовых газов и влаги – почти 12% тепловых потоков. Остальными компонентами можно пренебречь в первом приближении.

При возникновении препятствий на пути катализатора, которые снижают его массовый расход на 10%, в каждую секунду в регенераторе будет накапливаться 9159,2 ккал неотведенного тепла, что приведет через 10 секунд к накоплению тепла в объеме 91592 ккал, а за 100 секунд – 915917 ккал. Это почти в 10 раз превысит весь тепловой поток в узле регенератора в секунду. Такой объем несбалансированного тепла приведет к перегреву установки и возникновению предожарной ситуации с возможностью последующего возгорания.

При возникновении препятствий на пути дымовых газов и влаги накопление теплового дисбаланса будет происходить более медленно и менее заметно для системы контроля, но также может вести к возникновению аварийной ситуации.

Реакцией на такие ситуации может быть набор действий как по ограничению потоков тепла на входе, так и приведение в действие резервных каналов отведения тепла вместе с его носителями. Таблица 5.15 показывает, что 95% процентов тепла на входе приходится на поступающий катализатор и горение кокса. Таким образом, понижение поступления катализатора может сбалансировать режим по теплу, а также и по массовому расходу данного компонента. Эквивалентом снижения на 10% отвода катализатора в тепловом балансе (9159 ккал/с) является снижение на 15% поступления катализатора на входе в регенератор (это снизит входной тепловой поток на 10055 ккал/с).

Полный баланс тепла в структурной конструкции сети установки необходим для определения дисбаланса в других узлах, например, в прямоточном ректоре, где поток катализатора начнет накапливаться при ограничении его подачи в регенератор, что также приведет к дисбалансу и аварийной ситуации. И так далее по всему циклу движения катализатора в установке.

В таблице 5.16 показана динамика накопления тепла в узле регенератора при сокращении его отвода на 10%. Такое нарушение не является в полной мере структурным, поскольку не изменяет количества замкнутых и разомкнутых путей движения потоков тепла и материалов. Данный пример показывает, как изменение потока движения одного из компонент влияет на превышение ПДЗ по тепловым потокам.

Таблица 5.16.

Дисбаланс тепла в регенераторе при нарушении отвода катализатора

Время, сек.	Тепловой поток с катализатором		Снижение отвода катализатора, %	Накопление тепла в регенераторе, ккал
	на входе, ккал/с	на выходе, ккал/с		
0	67034,5	91519,7	0	0
1	67034,5	82367,7	10%	9152
5	67034,5	82367,7	10%	45796
10	67034,5	82367,7	10%	91592
15	67034,5	82367,7	10%	137388
20	67034,5	82367,7	10%	183184
25	67034,5	82367,7	10%	228890
30	67034,5	82367,7	10%	274776

Таким образом, даже при сравнительно небольшом препятствии на пути прохождения катализатора накопление тепла приводит к быстрому нарастанию дисбаланса и превышению ПДЗ. При расчете необходимо учитывать зависимости энтальпии от температуры, температуры от накопленного тепла, давления от накопления массы и т.д.

Изменить ситуацию могут только два компонента: снижение подвода тепла при горении кокса и уменьшение подачи самого катализатора в регенератор. Как следует из баланса тепла, горение кокса поставляет только треть теплового потока от уносимого катализатором, а приход тепла с катализатором – две трети от уносимого. Если горение кокса не вызывает принципиальных изменений в остальной части сети, то снижение потока массы катализатора на входе в регенератор приведет к его накоплению в узлах прямоточного реактора и транспортных путях установки. Это нарушит материальный и тепловой баланс в других частях установки. На рис. 5.30 представлена схема взаимодействия потоков тепла в реакторе и регенераторе. Тепловой баланс связан с материальным балансом, который определяется подачей сырья, катализатора и отводом продуктов переработки нефти и побочных продуктов из установки.

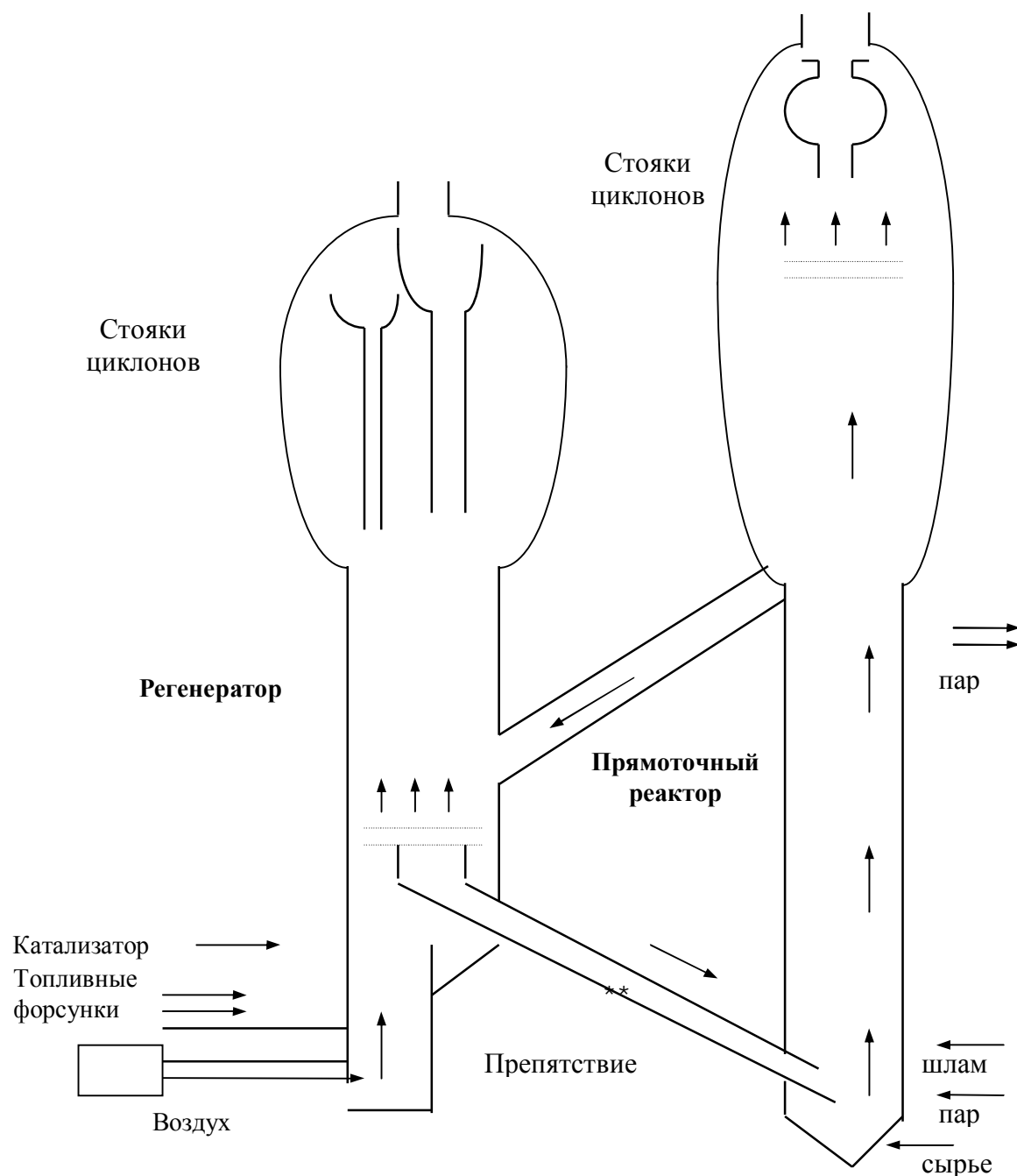


Рис. 5.30. Схема тепловых потоков в реакторе и регенераторе

Стрелки показывают направления движения потоков тепла между прямоточным реактором и регенератором. Представленные выше таблицы соответствуют возникновению препятствия при подаче катализатора из регенератора в реактор по нижнему пути.

Расчет накопления тепла и принятие решения о снижении уровня подачи катализатора является временной мерой. Одновременно проводится расчет изменения потоков тепла, материальных потоков в других частях сети с помощью преобразования значений потоков стационарного режима с помощью матриц преобразования. Реальные расчеты должны проводиться при более детальном представлении схемы потоков в конструкции с учетом

источников нагрева и охлаждения, подачи и отвода материальных потоков. На рис. 5.31 представлен график изменения накопленного тепла при сбое в канале подачи потока катализатора из регенератора в реактор.

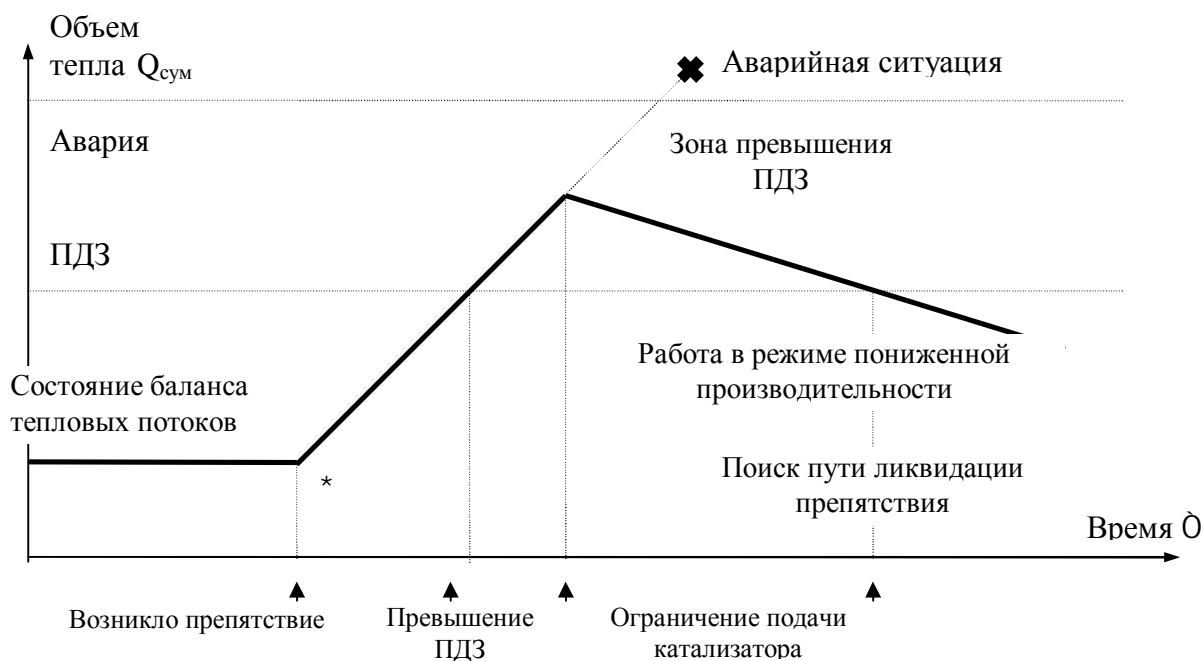


Рис. 5.31. График изменения накопленного объема тепла в регенераторе при возникновении препятствия на пути движения катализатора

Данный метод позволяет связать расчеты тепловых и материальных потоков в единую сеть потоков блока установки для комплексного оперативного анализа и контроля ПДЗ параметров. Это позволяет определить влияние нарушения баланса тепла в одних узлах на другие узлы установки.

Расчеты приведены в качестве примера для одной части установки. В дальнейшем такие расчеты, с соответствующей программной реализацией, могут быть выполнены для всей установки в целом, а также для перехода между режимами запуска, работы с переменной подачей сырья, останова (при необходимости профилактики, ликвидации аварийной ситуации и т.д.).

**Расчет тепловых потоков системы реактор-регенератор.** Расчет изменения тепловых потоков должен выполняться одновременно с расчетом изменений материальных потоков. Только суммарный поток энергии во всех ветвях и узлах установки как механической, так и тепловой, определяет уровень пожароопасности всего процесса.

Рассмотрим для начала расчет изменения параметров потоков тепла в узлах и ветвях системы реактор-регенератор с использованием сетевого метода, а затем при нарушениях в структуре путей, связанной с изменениями технологического режима или с изменениями

путей потоков тепла в конструкции установки, которые могут привести к аварийной ситуации. Для анализа и расчета необходимо построить сетевую модель, которая представляет структуру данной системы и происходящие в ней процессы. Основное уравнение процесса дано соотношением (2.1). Воздействием является массовый расход (поток массы) каждого компонента, который поступает в систему в одних узлах и покидает в других узлах (устройствах ввода-вывода). Массовый расход компонент таким образом играет роль узлового воздействия и будет представлен узловыми токами  $M \equiv I$ . Энтальпия (тепловой потенциал) играет роль проводимости  $g \equiv Y$ , определяя, сколько тепла может содержать один килограмм массы (при данной температуре). Поток тепла является откликом на воздействие и будет представлен узловым напряжением  $Q \equiv E$ , которому соответствуют вызванные им токи в ветвях сети. Эти параметры описывают баланс тепловых потоков каждой из компонент для определенной температуры.

Компонентами процесса каталитического крекинга являются:

- продукт (сырье, которое нагревается до реактора, диспергируется и переносится в реакторе, взаимодействует с катализатором и разделяется на компоненты ВКК и НКК);
- пар, который нагревает и диспергирует (дробит и смешивает) сырье и катализатор, перенося их и обеспечивая взаимодействие;
- катализатор, который очищается в регенераторе под нагревом от сгорающего кокса, поступает в реактор, взаимодействует по пути с продуктом и возвращается в регенератор;
- кокс, основной источник тепла в регенераторе, который сгорает и обеспечивает поток тепла, нагревающий катализатор;
- дымовые газы, а также влага, которые образуются при горении кокса в регенераторе и покидают его, унося часть тепла.

Все эти компоненты считаем независимыми друг от друга, т.е. протекающими в сети по отдельным путям. Для каждого существуют свои источники воздействия, узлы входа и выхода. Общим является наличие двух параметров: перенос тепловой энергии (и при отсутствии равновесия накопление/потеря с изменением температуры) и перенос массы, который характеризует массовый расход. Основными пожароопасными откликами на данные воздействия являются температура (тепловая энергия) и давление (механическая энергия), которые в сети действуют на все компоненты.

Нагрев одинаково действует на все компоненты, которые на отдельных участках все оказываются при одной температуре. Поступление компонента с других участков с другой температурой может рассматриваться как источник воздействия. Разность температур одного из компонент с другими вызывает их нагрев или охлаждение. Температура участка сообщает компонентам тепловую энергию в соответствии с их теплоемкостью, или их энтальпией.

Проведем построение сети потоков тепла в системе реактор-регенератор. Для этого сначала выделим отдельные ветви, соответствующие основным компонентам процесса. Затем соединим, свяжем их в сеть, потоки в ветвях которой должны соответствовать потокам тепла в системе. Введем обозначения параметров ветвей сети в свободном и связанном виде с выделением воздействий, откликов и проводимостей-сопротивлений, а также основные пути, связывающие компоненты в сети.

Тепловые воздействия – источники нагрева в системе: печь подогрева сырья, пар в реактор, пар в регенератор, сгорание кокса в регенераторе. Ветви нумеруются от 1 до  $n$ ; разомкнутые пути – от 1 до  $j$ ; замкнутые пути, контуры – от 1 до  $m$ , или от  $j + 1$  до  $n$ ; (поскольку  $j + m = n$ , а каждое размыкание контура создает разомкнутый путь, и наоборот).

Параметры сети из отдельных, свободных ветвей с узловыми воздействиями:

$I_0^a$  – воздействия в отдельных ветвях – узловой ток (подача сырья, пара, кокса, отвод тепла);

$Y_0^{ab}$  – проводимости отдельных ветвей (энтальпии, а также теплоемкости каждого компонента по основным путям движения тепловых потоков);

$E_0$  – отклики в отдельных ветвях – напряжения (тепловые потоки по основным путям, составляющим сетевую модель системы реактор-регенератор);

$I_{0c}^a$  – отклики в отдельных ветвях – токи;

$C_a^a$  – матрица преобразования путей свободных ветвей в пути связанной сети.

Параметры сети из связанных ветвей с узловыми воздействиями:

$I^a$  – воздействия в независимых разомкнутых путях связанной сети – узловые токи;

$Y^{ab}$  – проводимости независимых разомкнутых путей;

$E_a$  – отклики в независимых разомкнутых путях – узловые напряжения;

$I^a$  – токи-отклики в независимых разомкнутых путях;

$E_{ac}$  – узловые напряжения на отдельных ветвях соединенной сети;

$I_c^a$  – токи-отклики на отдельных ветвях соединенной сети.

Именно токи и напряжения на отдельных ветвях соединенной сети являются измеряемыми величинами, которые определяют изменения, которые могут вызвать превышение ПДЗ и привести к пожароопасной ситуации. При изменении структуры можно преобразовать отклики в заданной соединенной сети к новому соединению с помощью матрицы преобразования путей одной сети в пути другой сети. Можно провести расчет иначе – преобразованием свободных ветвей в пути сети с новой структурой. Первый вариант проще для вычислений, поскольку порядок матрицы преобразования изменяемых путей меньше, но второй вариант лучше в плане автоматизации, поскольку проще построить саму



матрицу преобразования от свободных ветвей-путей к связанным ветвям, чем матрицу преобразования между связанными сетями.

Представим основные компоненты системы отдельными ветвями с воздействиями, откликами и материальными характеристиками. Их соединение будет представлять систему, сетевую модель реактор-регенератор. К таким ветвям относятся поток сырья, превращаемый в продукты, подача пара для размельчения сырья и катализатора. Структуру связей образуют пути движения катализатора из регенератора в реактор и обратно; пути подача кокса, его сгорание и дымовые газы.

#### В реакторе

- теплоток сырья в реакторе
- теплоток пара в реакторе
- теплоток катализатора в реакторе
- теплоток потерь тепла в реакторе
- теплоток рецикла в реакторе

#### В регенераторе

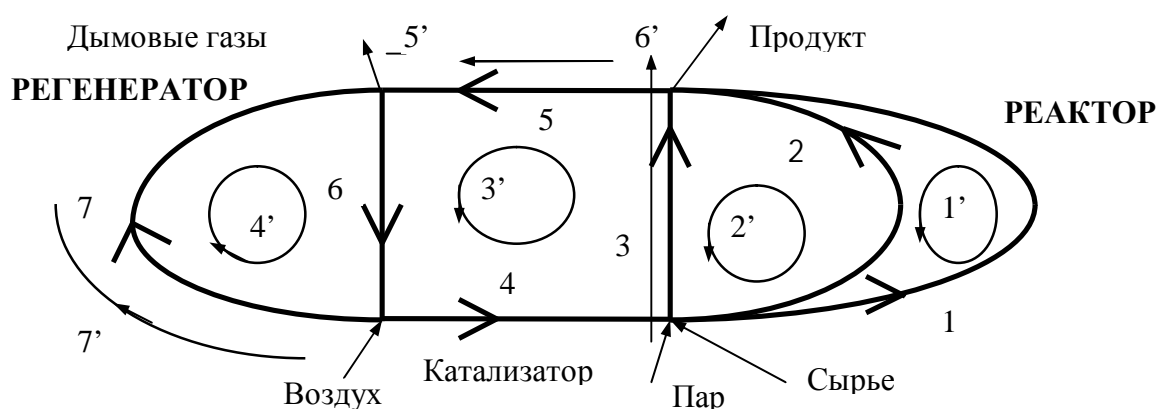
- теплоток воздуха и дымовых газов в регенераторе
- теплоток катализатора в регенераторе
- теплоток потерь тепла в регенераторе
- теплоток сгорания кокса в регенераторе

Эти девять элементов-ветвей в первом приближении описывают основные потоки тепла в системе реактор-регенератор. Каждая ветвь в отдельности представляет те потоки тепла, которые возникают только от ее собственных источников. Их величины зависят от массового переноса данного компонента и энтальпии при данной температуре. При соединении в сеть элементов (узлов системы) потоки тепла в каждом из них, а также в каждом из путей, которыми они связаны, зависят от всех остальных источников воздействия.

Рассмотрим простую сетевую модель из 7 ветвей, которая представляет систему реактор-регенератор. Реактор представляют три ветви: потоки сырья, водяного пара и катализатора; регенератор – потоки катализатора и воздуха, который при сгорании кокса превращается в дымовые газы, а также две ветви, представляющие собой подачу катализатора в реактор и отвод катализатора из реактора. Транспорт, перенос сырья и катализатора осуществляется водяным паром. Введение ветвей переноса катализатора необходимо не только с точки зрения физики процесса, но и с точки зрения структуры сети, поскольку иначе потоки компонентов в реакторе и регенераторе окажутся замкнуты в одних и тех же точках (узлах), что не соответствует действительности. Полностью каждая отдельная ветвь состоит из компонент как показано на рис 5.32.а для ветви 1, (поток сырья превращается в продукт), а в соединенном виде все семь ветвей представлены на рис 5.32.б.



а) Отдельные ветви представляют потоки компонент в элементах



б) Соединенные ветви составляют сеть, где отдельные потоки связаны

Рис 5.32. Простейшая сетевая модель системы реактор-регенератор

Ветви обозначим  $b_1, b_2, \dots, b_7$  и, если не возникает недоразумений, будем для простоты обозначать просто цифрами от 1 до 7. Данная сеть имеет следующие топологические параметры: число ветвей  $n = 7$ , число узлов  $J = 4$ , независимых подсетей  $s = 1$  (сеть не разделена на части), независимых разомкнутых путей  $j = J - s = 4 - 1 = 3$ , независимых замкнутых путей (контуров)  $m = n - j = 7 - 3 = 4$ .

Жирные линии – это ветви, через которые проходят материальные и тепловые потоки. Ветви 1, 2, 3 представляют потоки сырья, водяного пара и катализатора в реакторе; ветви 6 и 7 – потоки катализатора и встречного ему потока воздуха в регенераторе, ветвь 5 – поток катализатора из реактора в регенератор, а ветвь 4 – поток катализатора из регенератора в реактор. Стрелки указывают *выбранные* направления ветвей, которые в данном случае совпадают с направлениями движения тепловых и материальных потоков в ветвях.

В соединенной сети, представляющей систему реактор-регенератор, выберем линейно независимые замкнутые  $m$  и разомкнутые  $j$  пути. Они выражаются через пути в отдельных ветвях. Тонкие линии со стрелками показывают выбранные в сети независимые замкнутые и разомкнутые пути, определяющие координаты векторов потоков, которые заданы в сети. Пути в отдельных ветвях выберем совпадающими с самими ветвями. Матрица

преобразования путей от отдельных ветвей к сети с заданной структурой соединенных ветвей имеет вид:

$$C^{a'}_a = C^a_0 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	
1'	1	-1				1		<i>m</i>
2'		1	-1			1		
3'			1	1	1	1		
4'						1	1	
5'					1			<i>j</i>
6'			1					
7'							1	

Буквы *m* и *j* обозначают подматрицы преобразования замкнутых и разомкнутых путей. Цифры со штрихами обозначают и перечисляют пути в соединенной сети. Цифры без штрихов перечисляют пути в свободных, несоединенных ветвях, которые представляют отдельные элементы системы реактор-регенератор.

Матрица обратного преобразования путей от соединенных ветвей к отдельным ветвям (транспонированная к матрице преобразования компонент базиса разомкнутых путей, которая здесь задает систему координат) примет вид:

$$C^{a'}_{a'} =$$

	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	
1	1	1				1		$= A^{a'}_{at} = (C^{a'}_a)^{-1}$
2		1				1		
3						1		
4			1	-1	-1	-1	1	
5					1			
6				1			-1	
7							1	

*m* *j*

Когда заданы узловые источники воздействия в виде потоков на входе и выходе ветвей (в узлах сети), то на всех ветвях возникают отклики, но они являются линейными комбинациями независимых откликов в разомкнутых путях, образующих базис в сети.

Напомним, что количество независимых путей (измерений) в сети равно числу ветвей. Пути, представленные наборами ветвей, могут быть замкнутыми и разомкнутыми. Замыкание разомкнутого пути сокращает число замкнутых путей и увеличивает число разомкнутых путей, и наоборот. Независимые замкнутые пути, контуры составляют базис для воздействий и откликов внутри сети, в замкнутых путях. Независимые разомкнутые пути составляют базис для внешних воздействий, которые заданы в узлах, а отклики на них возникают в разомкнутых путях.

В данном случае в качестве базиса разомкнутых путей выбраны пути 5', 6', 7', подматрица которых справа отделена двойной чертой и будет обозначена как  $A^{a'}_{at}$ . Эта подматрица обеспечивает все преобразования величин сети между отдельными ветвями и соединенной сетью. С помощью  $A^{a'}_{at}$  проведем расчет тепловых потоков  $Q_{a'}$  в разомкнутых путях, а затем  $Q_{ac}$  в отдельных ветвях связанной сети при данном температурном режиме. Массовые расходы компонент в узлах сети определяют вектор источников узловых

воздействий  $I^a \equiv M^a$ . Матрицу энтальпий отдельных ветвей  $g^{ab}$  составляют значения, которые ветви имели бы при заданной температуре.

Вектор воздействий в отдельных ветвях представлен потоками сырья и водяного пара – в реакторе; воздуха (и дымовых газов) – в регенераторе. Физической величиной воздействия является давление, которое состоит из 6 компонент потери давления в потоках через реактор. Горение кокса в регенераторе, представляющее один из основных источников тепла, является внутренним, контурным источником и будут рассчитано в рамках подсети замкнутых путей. Вектор узловых воздействий имеет вид:

$$I^a = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline I^1 & I^2 & & & & & I^7 \\ \hline \end{array}$$

Вектор воздействий в путях соединенной сети получим по формуле преобразования компонент контравариантного вектора:  $I^{a'} = I^a A^{a'}_a =$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline I^1 & I^2 & & & & & I^7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5' & 6' & 7' \\ \hline 1 & & 1 & & \\ \hline 2 & & 1 & & \\ \hline 3 & & 1 & & \\ \hline 4 & -1 & -1 & 1 & \\ \hline 5 & 1 & & & \\ \hline 6 & & & & -1 & \\ \hline 7 & & & & & 1 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5' & 6' & 7' \\ \hline & I^1 + I^2 & I^7 \\ \hline \end{array}$$

Матрица термодинамических потенциалов (энтальпий) отдельных ветвей  $g^{ab}$  имеет ненулевые элементы только на главной диагонали, поскольку эти показатели не влияют друг на друга. Матрицу энтальпий разомкнутых путей соединенной сети  $g^{\alpha\beta'}$  получим по формуле преобразования дважды контравариантного тензора:  $g^{a'b'} = A^{a'}_a g^{ab} A^{a'}_a =$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 5' & & & -1 & 1 & & \\ \hline = 6' & 1 & 1 & 1 & -1 & & \\ \hline 7' & & & & 1 & & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & g^{11} & & & & & \\ \hline 2 & & g^{22} & & & & \\ \hline 3 & & & g^{33} & & & \\ \hline 4 & & & & g^{44} & & \\ \hline 5 & & & & & g^{55} & \\ \hline 6 & & & & & & g^{66} \\ \hline 7 & & & & & & & g^{77} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5' & 6' & 7' \\ \hline & 1 & \\ \hline 2 & & 1 & \\ \hline 3 & & 1 & \\ \hline 4 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 5 & 1 & & \\ \hline 6 & & & -1 & \\ \hline 7 & & & & 1 & \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5' & 6' & 7' \\ \hline g^{44} + g^{55} & g^{44} & -g^{44} \\ \hline = 6' & g^{44} & g^{11} + g^{22} + g^{33} + g^{44} \\ \hline 7' & -g^{44} & -g^{44} & g^{44} + g^{66} + g^{77} \\ \hline \end{array}$$

Физический смысл данной матрицы в том, что на главной диагонали – сопротивления ветвей, составляющих независимые замкнутые пути, контуры в *двойственной сети* (где каждому разомкнутому пути заданной сети соответствует контур). Элементы вне диагонали, в данном случае –  $g^{44}$ , показывают ветви, общие для двух соответствующих контуров, знак + указывает, что данные пути проходят эту ветвь в одном направлении, а знак «минус» – что в противоположных направлениях.

С точки зрения физики тепловых процессов воздействиями для движения тепловых потоков являются разности температур (или разности энтальпий) на входе и выходе потока.

Для решения задачи сети надо найти обратную к этой матрице и умножить ее на вектор  $I^\alpha$  воздействий в разомкнутых путях. Обратную матрицу для общего случая получим или в символьном виде или для численных значений энтальпий при заданном температурном режиме на каждом участке сети (это проще в плане вычислений). В символах обратная матрица к матрице энтальпий базиса разомкнутых путей в связанной сети:  $(g^{a'b'})^{-1} =$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 5' & 6' & 7' \\
 5' & \begin{array}{|c|} \hline (g^{11} + g^{22} + g^{33} + g^{44})(g^{44} + g^{66} + g^{77}) - (g^{44})^2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -g^{44}(g^{66} + g^{77}) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline (g^{11} + g^{22} + g^{33})g^{44} \\ \hline \end{array} \\
 6' & \begin{array}{|c|} \hline -g^{44}(g^{66} + g^{77}) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline (g^{44} + g^{55})(g^{44} + g^{66} + g^{77}) - (g^{44})^2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline g^{44}g^{55} \\ \hline \end{array} \\
 7' & \begin{array}{|c|} \hline (g^{11} + g^{22} + g^{33})g^{44} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline g^{44}g^{55} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline (g^{11} + g^{22} + g^{33} + g^{44})(g^{44} + g^{55}) - (g^{44})^2 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad 1/D$$

где  $D$  – детерминант данной матрицы, равный:

$$D = g^{44} (g^{11} + g^{22} + g^{33}) (g^{55} + g^{66} + g^{77}) + g^{55} (g^{66} + g^{77}) (g^{11} + g^{22} + g^{33} + g^{44}).$$

Проверка правильности расчета обратной матрицы производится умножением на матрицу  $g^{a'b'} (g^{a'b'})^{-1} = I$ , в результате должна получиться единичная матрица. Для расчета численных значений тепловых потоков в сетевой модели необходимы характеристики ветвей, в данном случае энтальпии, а также значения источников воздействия, определяемые массовыми расходами материальных потоков на входных и выходных точках (узлах) сети. Расчет тепловых потоков в ветвях сети (в ккал/с) производится по формуле (5.68).

Данные по ветвям, представляющим регенератор, из таблицы 5.15 представлены в таблице 5.17. Скорость циркуляции катализатора в регенераторе равна 491,6 кг/сек. умножением массового расхода в кг/с на энтальпию в ккал/кг. Тепловые потоки от горения кокса и адсорбции воды измеряются непосредственно и являются источниками воздействия, причем они действуют в замкнутых путях внутри сети. При расчетах с применением более сложной модели количество показателей в данной таблице будет увеличиваться.

Таблица 5.17

Тепловые потоки и характеристики ветвей регенератора

№	Параметры потоков тепла	Тепловые потоки ккал/с	Массовый расход, кг/с	Температура, °С	Энтальпия, ккал/кг
<b>Приход тепла</b>					
1.	с катализатором	67034,5	491,6	505	136,4
2.	с обр. коксом, $k_0 = 0,72\%$	898,9	3,6	505	252,5
3.	с горением кокса	33732,0			(9475)
4.	с адсорбцией воды	1557,2			540
5.	с воздухом	1482,0	51,5	120	28,8
<b>Расход тепла</b>					
1.	с катализатором	91591,70	491,7	690	186,3
2.	с дымовыми газами	9784,91	52,2	700	187,6
3.	с влагой, образующейся при горении кокса	2707,78	2,9	700	939

Пример расчета теплового баланса в таблице 5.15 сделан для равновесного состояния тепловых потоков в регенераторе, при котором не происходит его перегрева или охлаждения, поскольку поступление тепла компенсируется отводом. Применяемые для таких расчетов

методы тепловых и материальных балансов показывают только сохранение потоков на входе и выходе отдельных подсистем, отдельных узлов установки, не определяя их взаимодействие по всей системе. Расчет на основе сетевой модели можно использовать для определения материальных и тепловых потоков в системе реактор-регенератор при заданных источниках воздействий, а также расчет изменения этих потоков при изменении воздействий в условиях различных технологических режимов.

Расчет данной сети делается для упрощенной модели, в которой отражены не все источники и пути поступления и отвода тепла, поэтому тепловые потоки в ветвях могут не совпадать с ранее полученными. Исходные данные ветвей сетевой модели для прямоточного реактора представлены в таблице 5.18. Данные по потоку шлама представлены для расчета вариантов при последующем усложнении сети.

Таблица 5.18

## Тепловые потоки и характеристики ветвей реактора

№	Параметры потоков тепла	Тепловые потоки ккал/с	Массовый расход, кг/с	Температура, °С	Энтальпия, ккал/кг
<b>Приход тепла</b>					
1.	с катализатором	102435,6	574,8	660	178,2
2.	с водяным паром	652,5	0,8	220	675,0
3.	с сырьем в жидкой фазе	11864,4	69,4	303	170,8
4.	со шламом	2956,1	13,9	370	212,8
<b>Расход тепла</b>					
1.	с катализатором	84587,0	574,8	545	147,2
2.	с водяным паром	711,5	0,8	545	853,8
3.	с сырьем	27228,5	69,4	545	392,1
4.	со шламом	2707,78	2,9	545	384,6

В ветвях 4 и 5 сети будем считать энтальпию катализатора постоянной, равной той, с которой он поступил на вход этого канала, ветви. В реакторе (ветви 1, 2, 3) и регенераторе (ветви 6 и 7), как можно видеть, на входе и выходе элементов энтальпии каждого компонента различны (а массовый расход постоянен, как и должно быть для узлового тока, что подтверждает правильность выбранной аналогии).

При практических расчетах высоту реактора и регенератора делят на короткие участки, которые считают изотермическими и делают расчет для каждого из них отдельно. Это позволяет учесть нелинейный характер изменения величин давления и расхода массы, температуры и теплового потока. В сети для этого разделим каждую вертикальную ветвь на последовательно соединенные ветви, с проводимостями, численно равными энтальпии для температуры соответствующего участка. Положим энтальпию ветвей численно равной среднему значению энтальпий на входе и выходе ветви, т.е. будем считать, что температура равномерно распределена по высоте и энтальпия линейно зависит от температуры.

Для данной задачи численные значения диагональных элементов матрицы энтальпии отдельных ветвей в соответствии с таблицами 5.17 и 5.18 и структурой сети на рис. 5.28

будут иметь вид для четырех ветвей, представляющих, соответственно, движение катализатора в реакторе, от реактора к регенератору, в регенераторе и затем назад, в реактор:

$g^{33} = 1(78,2 - 147,2)/2 + 147,2 = 162,7$  ккал/кг; аналогично для других ветвей;

$$g^{44} = 183,3;$$

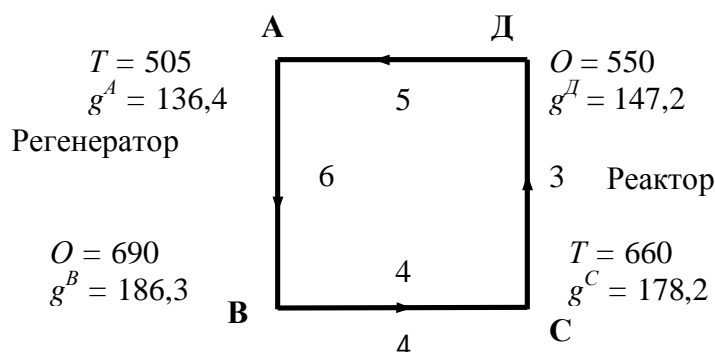
$$g^{55} = 141,8;$$

$$g^{66} = 161,4.$$

$$g^{11} = 281,5$$

$$g^{22} = 764,4$$

$$g^{77} = 108,2$$



Таким же образом получим среднюю энтальпию для потоков сырья и продуктов, водяного пара и воздуха. Для расчета по разности давлений надо вводить длину каждого участка и его сечение (произведение длины на площадь сечения даст объем). Поток тепла от выгорания кокса на катализаторе рассмотрим отдельно. Получая средние значения энтальпий по их значениям для входа и выхода каждой ветви, получим матрицу энтальпий ветвей для данного температурного режима всей установки. Проведем расчет обратной матрицы энтальпий соединенной сети для данного температурного режима.

Выполняя умножения матрицы усредненных энтальпий отдельных ветвей на матрицы преобразования справа и слева по формуле  $g^{a'b'} = A^{a'}_{at} g^{ab} A^{a'}_{ab}$  получим матрицу энтальпий разомкнутых путей соединенной сети:

	5'	6'	7'
5'	324,1	182,3	-182,3
6'	182,3	1390,9	-182,3
7'	-182,3	-182,3	451,9

Детерминант этой матрицы равен:  $Det = 143815954,244$ . Матрица алгебраических дополнений получается подстановкой в каждый элемент матрицы ( $g^{a'b'}$ ) детерминанта дополняющей его матрицы (с учетом изменения знаков):

	5'	6'	7'
5'	595314,42	-49148,08	220327,78
6'	-49148,08	113227,50	25850,14
7'	220327,78	25850,14	417557,40

Деля каждый элемент матрицы алгебраических дополнений на детерминант, получим обратную матрицу соединенной узловой сети:

	5'	6'	7'
5'	0,004139	-0,000342	0,001532
6'	-0,000342	0,000787	0,000180
7'	0,001532	0,000180	0,002903

Проверка правильности обращения производится умножением данной матрицы на обратную; в результате получается единичная матрица  $g^{a'b'} (g^{a'b'})^{-1} = I$ . Умножая эту матрицу на вектор воздействия  $I^{a'}$ , получим отклики в разомкнутых путях сети  $E_{a'}$ :

$$E_{a'} = (g^{a'b'})^{-1} I^{a'}$$

Умножая затем матрицу преобразования на эти отклики получим отклики в отдельных ветвях сети  $E_{a'}^c$ , т.е. те тепловые потоки, которые протекают непосредственно в основных компонентах системы реактор-регенератор:

$$E_{a'}^c = A_{at}^{a'} E_{a'} = A_{at}^{a'} (g^{a'b'})^{-1} A_a^{a'} I^{a'}$$

Вектор воздействий в путях соединенной сети уже получен выше для заданных массовых расходов сырья, пара и воздуха. Однако поток катализатора также является воздействием, более того, по своему массовому расходу определяет основные тепловые потоки. Будем считать, что поток катализатора, как воздействие, задан отдельно в ветви реактора и ветви регенератора как  $I^3$  и  $I^6$ . Это второй вариант вектора воздействия обозначим как  $I_{\kappa}^{a'}$ , он учитывает поток движения катализатора между реактором и регенератором. Тогда, преобразуя компоненты вектора воздействия в разомкнутых ветвях, получим:

$$I_{\kappa}^{a'} = I_{\kappa}^a A_{at}^{a'} =$$

	5'	6'	7'	
1		1		
2		1		
3		1		
4	-1	-1	1	
5	1			
6			-1	
7			1	

$$=$$

1	2	3	4	5	6	7
$I^1$	$I^2$	$I^3$			$I^6$	$I^7$

$$=$$

5'	6'	7'
	$I^1 + I^2 + I^3$	$-I^6 + I^7$

Подставляя значения внешних воздействий (массовых расходов), получим два вектора воздействия для двух вариантов таких потоков, заданных величинами из таблиц 2.3 и 2.4:

$$I^{a'} =$$

5'	6'	7'
	$I^1 + I^2$	$I^7$

$$=$$

5'	6'	7'
	69,4+0,8	51,5

$$=$$

5'	6'	7'
	70,2	51,5

$$I_{\kappa}^{a'} =$$

5'	6'	7'
	$I^1 + I^2 + I^3$	$-I^6 + I^7$

$$=$$

5'	6'	7'
	69,4+0,8+574,8	51,5+574,8

Получим отклики обратные значения тепловых потоков в независимых разомкнутых путях соединенной сети для первого варианта вектора воздействий по формуле:

$$E_{a'} = (g^{a'b'})^{-1} I^{a'}$$

5'	0,004139	-0,000342	0,001532	5'		5'	0,054489
6'	-0,000342	0,000787	0,000180	6'	70,2	6'	0,064517
7'	0,001532	0,000180	0,002903	7'	51,5	7'	0,162141



Отсюда отклики – тепловые потоки в отдельных ветвях – элементах установки реактор-регенератор получим умножением на матрицу преобразования:

$$E_a^c = A_{at}^{a'} E_{a'} =$$

	5'	6'	7'
1		1	
2		1	
3		1	
4	-1	-1	1
5	1		
6			-1
7			1

5'	0,054489
6'	0,064517
7'	0,162141

$$=$$

1	0,064517
2	0,064517
3	0,064517
4	0,043135
5	0,054489
6	-0,162141
7	0,162141

Эти значения надо умножить на матрицу энтальпий  $g^{\alpha\beta}$ , чтобы получить физические величины с размерностью, соответствующей тепловым потокам.

	1	2	3	4	5	6	7
1	$g^{11}$						
2		$g^{22}$					
3			$g^{33}$				
4				$g^{44}$			
5					$g^{55}$		
6						$g^{66}$	
7							$g^{77}$

$$=$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	281,5						
2		764,4					
3			162,7				
4				183,3			
5					141,8		
6						161,4	
7							108,2

Тогда получим:  $I_c^a = g^{ab} E_a^c =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	281,5						
2		764,4					
3			162,7				
4				183,3			
5					141,8		
6						161,4	
7							108,2

$$\times$$

	5'	6'	7'
1	0,064517		
2	0,064517		
3	0,064517		
4	0,043135		
5	0,054489		
6	-0,162141		
7	0,162141		

$$=$$

	5'	6'	7'
1	18,1615		
2	493,1679		
3	10,4969		
4	7,9066		
5	7,7265		
6	-26,1696		
7	17,5437		

Теперь для *второго варианта* вектора воздействий, с учетом теплового потока катализатора как воздействия, получим отклики – обратные значения тепловых потоков в независимых разомкнутых путях соединенной сети:

$$E_{a'} = (g^{a'b'})^{-1} I^{a'}$$

	5'	6'	7'
5'	0,004139	-0,000342	0,001532
6'	-0,000342	0,000787	0,000180
7'	0,001532	0,000180	0,002903

$$=$$

	5'	6'	7'
5'			
6'	645,0		
7'	626,3		

$$=$$

	5'	6'	7'
5'	0,73890		
6'	0,62035		
7'	1,93125		

Отсюда отклики – обратные тепловые потоки в ветвях – элементах установки реактор-регенератор получим умножением на матрицу преобразования:  $E_a^c = A_{at}^{a'} E_{a'} =$

	5'	6'	7'
1		1	
2		1	
3		1	
4	-1	-1	1
5	1		
6			-1
7			1

5'	0,73890
6'	0,62035
7'	1,93125

$$=$$

1	0,62035
2	0,62035
3	0,62035
4	0,57500
5	0,73890
6	-1,93125
7	1,93125

Эти значения надо умножить на матрицу энтальпий ветвей  $g^{ab}$ , чтобы получить физические величины с размерностью, соответствующей тепловым потокам для второго варианта воздействия. Тогда получим:  $I_c^a = g^{ab} E_a^c =$

1	2	3	4	5	6	7
281,5						
	764,4					
		162,7				
			183,3			
				141,8		
					161,4	
						108,2

 $\times$ 

1	0,62035
2	0,62035
3	0,62035
4	0,57500
5	0,73890
6	-1,93125
7	1,93125

 $=$ 

1	174,6285
2	474,1955
3	100,9309
4	105,3975
5	104,7760
6	-311,7038
7	208,9613

Полученные отклики для каждого случая можно подставить в ветви схемы сети для проверки правильности расчета. Для этого используются законы сохранения контравариантных компонент в узлах сети и ковариантных компонент – контурах сети, т.е. – аналоги законов Кирхгофа для цепей. Такие величины надо сравнивать каждый раз с предельно допустимыми значениями для определения возможности возникновения пожароопасной или аварийной ситуации на каждом участке, в каждом узле установки.

При изменении структуры связей (в том числе при нарушениях конструкции, возникновении препятствий на пути тех или иных потоков), меняется матрица преобразования, но схема расчета остается прежняя. Возможно два варианта расчета: по получению сигнала о превышении ПДЗ на каком-то одном участке произвести расчет по данной схеме для определения возникающих изменений (тепловых потоков и давлений) на всех основных участках установки и получить графики диаграммы динамики нарастания критических параметров, пример которого дан на рис. 5.27; произвести обратный расчет по данной схеме для определения участков повреждения по соответствию изменений – матрицы преобразования – соответствующей схемы.

Второй необходимый расчет определяется контурной подсетью сетевой модели реактор-регенератор. Проведенные расчеты узловой сети, соответствующей воздействиям в разомкнутых путях, не в полной мере представляют физику и структурное содержание процессов каталитического крекинга и регенерации катализатора в данной установке. Важным источником тепла, во многом определяющим тепловой баланс установки, является выгорание кокса в регенераторе под действием подаваемого потока воздуха.

Сам поток воздуха, после реакции горения превращается в дымовые газы (их массовые расходы практически совпадают) и выводится из регенератора. Таким образом, здесь образуется разомкнутый путь и это воздействие учтено в предыдущих расчетах. Однако сам процесс горения кокса происходит внутри установки, основная часть теплового потока циркулирует вместе с катализатором и, как можно оценить из таблиц 5.17 и 5.18, передается сырью в реакторе в процессе крекинга.

Проведем расчет тепловых потоков, возникающих в сети от реакции выгорания кокса в регенераторе, с помощью матрицы преобразования замкнутых путей. Этот расчет двойственный к расчету, проведенному с помощью матрицы преобразования разомкнутых путей. Схема контурного расчета может далее использоваться как при большей детализации сетевой модели, так и при включении других источников тепла, которые следует рассматривать как контурные. Будем считать, что источник воздействия расположен в ветви 6, соответствующей потоку катализатора в регенераторе и показан кружком со стрелкой. Выбор путей остается прежним, но матрица преобразования теперь четвертого порядка, поскольку в данной сети 4 контура, и ортогональная к прежней матрице.

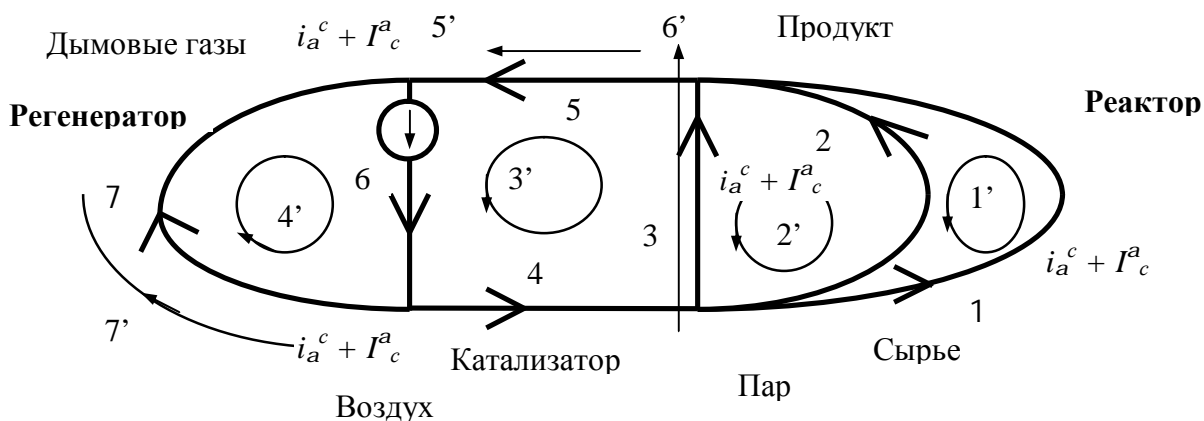


Рис 5.33. Сетевая модель системы реактор-регенератор с контурным источником воздействия – горение кокса

Эта матрица преобразования путей от отдельных ветвей к сети с заданной структурой соединенных ветвей уже была получена выше и имеет вид:

$$C_{a_0}^{a_0} = C_{a_0}^a = \begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ \hline 1' & 1 & -1 & & & & 1 & & \\ 2' & & 1 & -1 & & & 1 & & \\ 3' & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 4' & & & & & & 1 & 1 & \\ \hline 5' & & & & & & 1 & & \\ 6' & & & 1 & & & & & \\ 7' & & & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & & & & m \\ & & & & & & & & & j \end{array}$$

Для преобразования величин от отдельных ветвей к соединенной сети используется контурная часть этой матрицы, которая преобразует пути ветвей в замкнутые пути соединенной сети:

$$C_{a_0}^a = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ \hline 1' & 1 & -1 & & & & 1 & & \\ 2' & & 1 & -1 & & & 1 & & \\ 3' & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 4' & & & & & & 1 & 1 & \\ \hline & & & & & & & & & m \end{array}$$

матрица энтальпий – сопротивлений ветвей преобразуется в матрицу сопротивлений контуров соединенной сети по формуле:

$$g^{a'b'} = C^{a'}_a g^{ab} C^{a'}_a =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1'	1	-1				1	
2'		1	-1			1	
3'			1	1	1	1	
4'						1	1

	1	2	3	4	5	6	7
1	$g^{11}$						
2		$g^{22}$					
3			$g^{33}$				
4				$g^{44}$			
5					$g^{55}$		
6						$g^{66}$	
7							$g^{77}$

	1'	2'	3'	4'
1	1			
2	-1	1		
3		-1	1	
4			1	
5				1
6	1	1	1	1
7				1

$$=$$

	1'	2'	3'	4'
1'	$g^{11} + g^{22} + g^{66}$	$-g^{22} + g^{66}$	$g^{66}$	$g^{66}$
2'	$-g^{22} + g^{66}$	$g^{22} + g^{33} + g^{66}$	$-g^{33} + g^{66}$	$g^{66}$
3'	$g^{66}$	$-g^{33} + g^{66}$	$g^{33} + g^{44} + g^{55} + g^{66}$	$g^{66}$
4'	$g^{66}$	$g^{66}$	$g^{66}$	$g^{66} + g^{77}$

Обращение матрицы четвертого порядка в символьном виде – громоздкая задача по необходимым аналитическим выражениям. Целесообразно рассчитывать данную матрицу для конкретных численных значений ее элементов. Если принять значения энтальпий на ветвях равными их средним значениям, при расчете узловой сети в предыдущем примере, то данная матрица сопротивлений контуров в соединенной сети принимает вид:

$$g^{a'b'} =$$

	1'	2'	3'	4'
1'	1207,3	- 925,8	161,4	161,4
2'	- 925,8	1088,5	- 324,1	161,4
3'	161,4	- 324,1	649,2	161,4
4'	161,4	161,4	161,4	269,6

Обращение матрицы  $g^{a'b'}$  и умножение на источник воздействия в контуре движения катализатора (сгорание кокса в регенераторе) дает отклики (потoki тепла) в других контурах сети. Вектор воздействий в ветвях, если считать, что единственный контурный источник в ветвях – это сгорание кокса (ветвь б – поток катализатора в регенераторе) принимает вид:

$$e_a =$$

	1	2	3	4	5	6	7
						$e_b$	

Вектор воздействий в контурах соединенной сети принимает вид:

$$e_{a'} = e_a C^{a'}_a =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1'	1	-1				1	
2'		1	-1			1	
3'			1	1	1	1	
4'						1	1

$$\times$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	$e_b$
7	

$$=$$

1'	$e_b$
2'	$e_b$
3'	$e_b$
4'	$e_b$

Можно задать значение – тепло от сгорания кокса = 33732 ккал/с – см. таблицу 5.15.

Тогда отклики в контурах соединенной сети получим по формуле:

$$i_a' = (g^{a'b'})^{-1} e_a' = (C_{at}^{a'} g^{ab} C_a^{a'})^{-1} C_{at}^{a'} e_a'$$

Надо получить обратную к этой матрице, затем рассчитать отклики и сложив их с теми, которые получены в узловой сети от обмена теплотоканами, получить суммарные потоки тепла. Затем провести расчет их изменения при изменении структуры сети.

	1'	2'	3'	4'
$g^{a'b'}$	1207,3	- 925,8	161,4	161,4
	- 925,8	1088,5	- 324,1	161,4
	161,4	- 324,1	649,2	161,4
	161,4	161,4	161,4	269,6

Умножая  $i_a'$  на матрицу преобразования замкнутых путей  $C_a^{a'}$  (аналогично алгоритму расчета сети разомкнутых путей, которая приведена выше) получим потоки тепла в каждой ветви сетевой модели, которые вызваны сгоранием кокса:

$$i_c^a = C_a^{a'} i_a' = C_a^{a'} (g^{a'b'})^{-1} e_a' = C_a^{a'} (C_{at}^{a'} g^{ab} C_a^{a'})^{-1} C_{at}^{a'} e_a'$$

Сложение откликов на контурное воздействие от сгорания кокса  $i_c^a$  с откликами на перераспределение потоков тепла от узловых воздействий (пример расчета приведен выше) даст полные потоки тепла в сети, представляющей систему реактор-регенератор.

$$i_{\text{полные}}^a = i_c^a + I_c^a = i_c^a + g^{ab} E_a^c$$

Именно такие отклики, представляющие полные потоки тепла в системе реактор – регенератор для принятой упрощенной сетевой модели, должны быть получены на ветвях сети с контурными и узловыми воздействиями, как показано выше на схеме решения.

Матрица преобразования меняется при изменении структуры сети, в связи с изменениями технологического режима, или возникновением нарушений в структуре, которые могут привести к пожароопасной, предаварийной или аварийной ситуации. Изменение структуры приводит к изменению всех откликов на ветвях сетевой модели. Расчет изменения тепловых потоков должен дополняться расчетом изменений материальных потоков. Только суммарный поток энергии, как механической, так и тепловой, во всех ветвях и узлах установки определяет уровень пожароопасности всего процесса.

Рассмотрим ситуацию, когда нет подачи сырья, что соответствует одному из этапов пускового режима, когда уже поданы пар, поток катализатора и происходит подача воздуха в регенераторе, что представлено сетевой моделью на рис. 5.30.

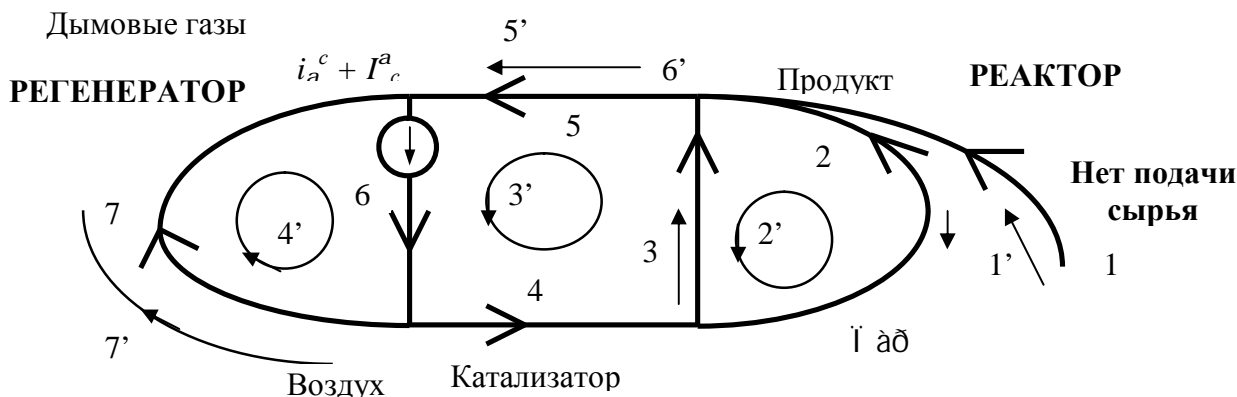


Рис. 5.34. Сетевая модель системы реактор-регенератор в процессе режима пуска, когда еще нет подачи сырья

Топологические параметры данной сети: число ветвей  $n = 7$ , число узлов  $J = 5$  (стало на один больше за счет отключения подачи сырья), независимых подсетей  $s = 1$  (сеть не разделена на части), независимых разомкнутых путей  $j = J - s = 4 - 1 = 3$ , независимых замкнутых путей (контуров)  $m = n - j = 7 - 3 = 4$ . Матрица преобразования путей для такой сети при максимальном сохранении прежнего выбора путей принимает вид:

$$C_{a'}^{a'} = C_{a'}^a =$$

	1	2	3	4	5	6	7	
2'		1	-1			1		$m$
3'			1	1	1	1		
4'						1	1	
1'	1					1		
5'					1			$j$
6'			1					
7'							1	

Буквы  $m$  и  $j$  обозначают подматрицы преобразования замкнутых и разомкнутых путей. Изменение состоит в том, что путь 1' становится разомкнутым и, соответственно, переходит в подматрицу разомкнутых путей. Этапы алгоритма расчета модели остаются прежними.

Матрица обратного преобразования от путей связанной сети к свободным ветвям (задает матрицу преобразования базиса разомкнутых путей) примет вид:

$$C_{a'}^{a'} = C_{a'}^a =$$

	2'	3'	4'	1'	5'	6'	7'	
1			-1	1			-1	$= A_{at}^{a'} = (C_{a'}^{a'})^{-1}$
2	1		-1			1	-1	
3						1		
=4	-1		-1		-1	-1		
5					1			
6			1				-1	
7							1	
	$m$			$j$				

Обе матрицы преобразования отличаются от полученных в первом примере. Затем выполняются все этапы расчета, с учетом технологических изменений (например, снижается

закоксованность катализатора и, возможно, отпадает необходимость расчета контурной части сети) и производится расчет тепловых потоков в отдельных частях установки для данной конфигурации соединения компонент системы.

**Расчет узла регенератора.** В качестве примера расчета отдельного узла установки (подсистемы) рассмотрим расчет тепловых потоков в регенераторе. Схема потоков в регенераторе представлена на рис. 5.35. По сравнению с общей (упрощенной) схемой установки, которая рассмотрена выше, здесь добавлена ветвь, которая представляет потоки влаги, образующейся при горении кокса (их можно объединить с потоками влаги воздуха и потоками влаги из десорбера). Далее можно добавить ветвь, соответствующую потерям тепла. Данные таблицы 5.15 показывают, что вклад этой компоненты в общий баланс тепловых и материальных потоков незначителен. Вместе с тем при нарушениях в работе установки, разрушениях конструкции эти потоки, учитывая высокое давление, высокую температуру, значительные объемы массы, также могут способствовать превышению ПДЗ на отдельных участках и созданию пожароопасной ситуации.

Особенность сетевой модели регенератора состоит в том, что здесь в явном виде присутствует внутренний контурный источник тепла, который не задан входящими и выходящими в отдельных точках (узлах) внешними потоками. Роль внутреннего источника тепла играет сгорание кокса на закоксованном катализаторе под действием встречного потока кислорода воздуха.

Основные потоки, составляющие сетевую модель регенератора:

Внешние потоки делятся на входящие потоки и выходящие потоки.

Входящие потоки:

- катализатор из реактора (закоксованный);
- катализатор добавленный (новый);
- воздух из воздуходувки.

Выходящие потоки:

- катализатор в реактор
- дымовые газы – на выход из регенератора
- влага, образующаяся при горении кокса (а также влага воздуха, влага из десорбера).

Все потоки влаги с точки зрения измерения их параметров разделить трудно, поэтому целесообразно при расчете включать в состав влаги, образующейся при горении кокса, также потоки влаги воздуха, влаги из десорбера. В совокупности их доля в потоках тепла становится ощутима и достигает 4% общего расхода тепла, как видно из таблиц 5.3.15 и 5.3.17. Однако эти потоки имеют одинаковую энтальпию на выходе (находятся при одной температуре в  $700^{\circ}\text{C}$ ), но разные энтальпии на входе (поступают из разных источников, находящихся при разной температуре). Ограничимся тем, что новая ветвь 8 представляет только потоки влаги, которые образуются при сгорании кокса.

Внутренние потоки вызваны сгоранием кокса на катализаторе под действием кислорода воздуха, что приводит к поступлению тепла в материальные потоки, происходит нагревание катализатора и дымовых газов.

Внешние потоки составляют узловую подсеть сетевой модели; внутренние потоки составляют контурную подсеть сетевой модели. Полные отклики состоят из суммы узловых откликов и контурных откликов.

Топологические параметры сетевой модели регенератора: количество ветвей  $n = 3$ , подсетей  $s = 1$ , количество узлов  $J = 2$ , количество разомкнутых путей  $j = J - s = 2 - 1 = 1$ , контуров  $m = n - j = 3 - 1 = 2$ . Таким образом, независимых разомкнутых путей два, замкнутых путей один; матрицы преобразования таких сетей, системы уравнений поведения, имеют порядок, равный, соответственно, 2 и 1. Предполагается, что влага, как и воздух, поступает в регенератор снизу (продукт сгорания кокса), а покидает сверху.

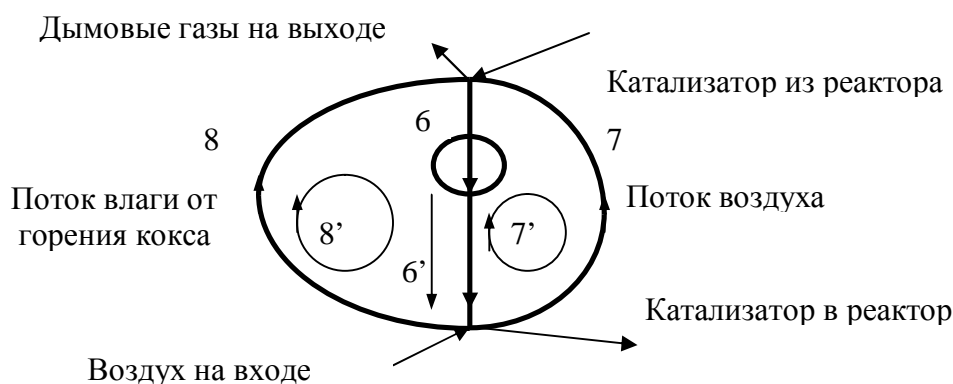


Рис. 5.35. Сеть материальных и тепловых потоков в регенераторе

Выбор путей показан на схеме. Пути сетевой модели всей установки сохраняют свой вид. Добавлен путь 8', который соответствует новой ветви, представляющей потоки влаги, образующейся при сгорании кокса в регенераторе. Матрицы преобразования контуров для такой сети имеют соответствующий вид.

Источником воздействия для узловой сети (сети разомкнутых путей) являются потоки катализатора, поступающие из реактора и отправляемые в реактор, потоки воздуха, которые подаются навстречу потоку закоксованного катализатора и обеспечивают выгорание кокса, а покидают регенератор в виде дымовых газов. Из таблицы 5.3.17 можно видеть, что данные компоненты составляют около 95% от общего объема всех тепловых потоков и примерно такую же долю массового расхода материальных потоков.

Для ветви 8, как и для остальных ветвей, воздействием является разность температур на входе и выходе, которой пропорциональна разность энтальпий. Катализатор с коксом поступают в регенератор при температуре 505<sup>0</sup>С (таблицы 5.3.15 и 5.3.17); можно считать, что это и есть входная температура будущей влаги, которая образуется при сгорании кокса.



При такой же температуре  $505^{\circ}\text{C}$  поступает в регенератор влага из десорбера и ее энтальпия при этом равна 832 ккал/кг; эту энтальпию и примем как значение на входе ветви 8. Покидают регенератор оба вида влаги при температуре  $700^{\circ}\text{C}$ , которой соответствует энтальпия 939 ккал/кг; эту энтальпию и примем как значение на выходе для ветви 8. Тогда разность энтальпий на ветви 8 равна  $939 - 832 = 107$  ккал/кг, которая составляет тепловой потенциал (разность потенциалов) по ветви 8.

Источником воздействия для контурной сети (сети замкнутых путей) являются тепловые потоки от выгорания кокса; величина этого источника определяется скоростью циркуляции катализатора и степенью его закоксованности. Скорость циркуляции катализатора в регенераторе равна 491,6 кг/сек. или 1769,9 т/час. Расчет тепловых потоков в ккал/с производится по формуле (5.67) умножением массового расхода в кг/с на энтальпию в ккал/кг. Тепловые потоки от горения кокса и адсорбции воды измеряются непосредственно.

Значение внутреннего источника тепла определяется теплом от сгорания кокса и равно, например, 33732 ккал/с, в соответствии с таблицей 5.3.15. При нарушениях в конструкции, которые могут вызвать превышение ПДЗ температуры, поток тепла от горения кокса можно регулировать путем уменьшения подачи воздуха или уменьшения содержания кислорода в подаваемом воздухе (катализатор останется более закоксованным), путем уменьшения подачи катализатора из реактора (произойдет накопление катализатора в реакторе и путях транспортировки, реактор снизит эффективность производства продукта, будет работать в холостую).

### Список литературы

1. Абрамов Д.Ю., Арменский А.Е., Ермаков А.Н., Кузин Л.Т., Петров А.Е. Тензорные банки данных. // Изв. Вузов. Приборостроение, 1985, № 6.
2. Авондо-Бодино Дж. Применение в экономике теории графов. М.: Прогресс, 1966. - 160 с.
3. Александров В.А. Повышение эффективности автоматических систем управления технологическими процессами промышленных производств с обеспечением пожарной безопасности. Кандидатская диссертация, Москва, 1985. – 150 с.
4. Андросов А.М. Финансовая отчетность банка. – М.: Менатеп-информ, 1995. - 460 с.
5. Арменский А.Е., Кузин Л.Т., Петров А.Е. Тензорный метод проектирования интегрированных систем управления. // Интегрированные АСУ. М.: МДНТП, 1983.
6. Арменский А.Е., Милославская Н.Г. Решение задач большой размерности по частям с использованием тензорного анализа. // Автоматизация проектирования сложных систем. ЛИТМО, 1986.
7. Арменский А.Е. Тензорные методы построения информационных систем. М.: Наука, 1989. – 152 с.
8. Арменский А.Е., Кузнецов П.Г., Петров А.Е. Программа «Губернатор». Методология разработки информационно-аналитической системы для управления регионом (субъектом Российской Федерации). Журнал «Промышленность России», № 12 (20), М.: ИА «Мобиле», 1998. – с. 65–68.
9. Арменский А.Е., Петров А.Е., Травин С.О. Россия: монетаризм или физическая экономика? Журнал «Наука и промышленность России», № 6–7 (62–63), 2002. – с. 91–97.
10. Арменский А.Е., Гусев В.С., Петров А.Е. Информационная и экономическая безопасность государства. Учебно-методическое пособие для государственных служащих. М.: Издательство «Мобиле», 2003. – 228 с.
11. Арменский Е.В., Кузина И.В. Единая теория электрических машин. М.: МИЭМ, 1975.
12. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., 1974.
13. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. - М.: Энергия, 1969. – 424 с.
14. Афанасьев В.Г. Общество: системность, познание и управление. – М.: Политиздат, 1981. – 432 с.
15. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. Пер. с англ., М.: Мир, 1979.
16. Бартини Р.О. Некоторые соотношения между физическими константами. / ДАН СССР. 1965. Том 163, №4.
17. Бартини Р.О. Соотношение между физическими величинами. // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат. 1966. Вып. 1.
18. Бартини Р.О., Кузнецов П.Г. Множественность геометрий и множественность физик. – В кн.: Моделирование динамических систем. – Брянск, 1974. – с. 18–29.
19. Берендеев А.В. О работах Крона по применению тензорного исчисления в электротехнике. - Электричество, 1950, № 12, с.78 - 79.
20. Большаков Б.Е. Закон природы или как работает Пространство-Время. Российская академия естественных наук, Международный университет природы, общества и человека «Дубна», 2002. – 265 с.
21. Брамеллер А., Аллан Р., Хэмем Я. Слабозаполненные матрицы. М.: Энергия, 1979. – 192 с.
22. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965. – 455 с.
23. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: ГИИЛ, 1948. – 140 с.
24. Веблен О., Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. – М.: ГИИЛ, 1949. – 135 с.
25. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986. – 496 с.
26. Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989. – 400 с.

27. Веников В.А., Ионкин П.А., Петров Г.Н., Копылов И.П. Габриэль Крон. – Электричество, 1969, №1, с. 92-93.
28. Веников В.А. Вступительная статья в кн.: А.Е.Петров. Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985.
29. Веников В.А. Веников Г.В. Теория подобия и моделирования. – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 1984. – 439 с.
30. Галушкин А.И. Нейронные ЭВМ и нейроматематика. – В кн.: Научно-технические средства информатизации, автоматизации и интеллектуализации в народном хозяйстве. – М.: Знание, 1991.
31. Гареев Ф.А., Гареева Г.Ф. Концепция универсальности принципа резонансной синхронизации Гюйгенса, модель структурных особенностей молекул живых систем и новая интерпретация сверхпроводимости. Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции. (Ред. М.М. Лаврентьев). Новосибирск: Изд-во ИМ. 2001, с. 161–192.
32. Громыко Ю.В., Петров А.Е. Подходы к познанию Пространства и Времени в эволюции глобальной системы «Природа – Общество – Человек». Журнал Международного университета природа – общество – человек. Дубна, №1, 2002.
33. Грызинский М. О природе атома. Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции. (Ред. М.М. Лаврентьев). Новосибирск: Изд-во ИМ. 2001.
34. Деглин Э.Г., Петров А.Е. Тензорная вибродинамика ГТД. ВИМИ, сборник рефератов депонированных рукописей, №1, 1990, №Д08204.
35. Деглин Э.Г., Петров А.Е. Тензорная системная вибродинамика ГТД. – В кн.: Тензорные методы анализа и синтеза сложных систем. – Ижевск, 1991.
36. Деннис Дж. Б. Математическое программирование и электрические цепи. – М.: ИЛ, 1961. – 216 с.
37. Долан Э. Дж., Кэмпбелл К.Д., Кэмпбелл Р.Дж. Деньги, банковское дело и денежно-кредитная политика. СПб.: «Санкт-Петербург оркестр», 1993. – 494 с.
38. Зайцев Г.А. Алгебраические проблемы математической и теоретической физики. М.: Наука, 1974.
39. Индексы интенсивности промышленного производства (январь 1990 года – апрель 2001 года). Центр экономической конъюнктуры при Правительстве РФ. – М., май 2001. – 54 с.
40. Инструкция № 1 «О порядке регулирования деятельности кредитных организаций». Вестник Банка России, № 5 (97) от 8.02.96.
41. Инструкция № 1 «О порядке регулирования деятельности банков» (Новая редакция инструкции от 30.01.96 «О порядке регулирования деятельности кредитных организаций»). Утверждена Приказом Банка России № 02-430 от 01.10.97 г.
42. Кант И. Прологомены ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука. 1783. – Сочинения, т.4, ч. 1, М.: Мысль, 1965.
43. Карминский А.М., Петров А.Е. Методика расчета рейтинга динамической финансовой стабильности банков. Банковские и финансовые технологии. Сб. тр. конф./ Под ред. В.И. Тарасова, В.С. Захарова, О.И. Лаврушина. – М.: Международный центр банковских и финансовых технологий, 2001. – 272 с.
44. Карминский А.М., Пересецкий А.А., Петров А.Е. Рейтинги в экономике. Методология и практика. М.: Финансы и статистика, 2005. – 240 с.
45. Комацу М. Многообразие геометрии. М.: Знание, 1981. – 208 с.
46. Копылов И.П. Электрические машины: Учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. Шк.; Логос; 2000. – 607 с.
47. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин: Учеб. для вузов. – М.: Высш. Шк., 2001. – 327 с.
48. Копылов И.П. Электромагнитная Вселенная. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издат. МЭИ, 1999. – 88 с.

49. Копылов И.П. Гелиоэлектромеханика. – М.: Издат. МЭИ, 2002. – 116 с.
50. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для инженеров и научных работников. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
51. Коссов В.В. Межотраслевой баланс. – М.: Экономика, 1966. – 224 с.
52. Котарова И.Н., Шамаева О.Ю. Параллельный метод диакоптики для решения сложных задач на распределенных вычислительных системах. //Кибернетика, 1979, № 1. – с. 112–119.
53. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, изд. 9, 1965. - 426 с.
54. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике: Пер. С англ./Под ред. П.В. Мееровича. – М.: Гостехиздат, 1955. – 250 с.
55. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика). М.: Наука, 1972. – 544 с.
56. Крон Г. Тензорный анализ сетей: Пер. с англ. /Под ред. Л.Т. Кузина, П.Г. Кузнецова. М.: Сов. Радио, 1978. – 720 с.
57. Кузин Л.Т. Предисловие в кн.: Кэрноп Д., Розенберг Р. (ред.). Применение теории графов связей в технике. М.: Мир, 1974.
58. Кузин Л.Т. Основы кибернетики. В 2 т. Т. 1. Математические основы кибернетики. - 2-е изд. - М.: Энергоатомиздат, 1994. - 576 с.
59. Кузина И.В., Петров А.Е. О тензорных методах построения языка базы данных. – В кн.: Банки данных для принятия решений. – М.: Знание, 1976, с. 59–67.
60. Кузина И.В., Таран А.Н. Автоматизация получения математических моделей механических подсистем электроприводов. – В кн.: Математические основания теории сложных систем, Иваново, 1989.
61. Кузина И.В., Тимофеева В.В. Введение уравнений обобщения для построения математических объектов электромеханики//Изв. Вузов. Сер. Электромеханика. 1986, № 10.
62. Кузина И.В., Тимофеева В.В., Бунто А.Н. Введение тензорных операций в алгоритмический язык ПЛ/1. - Программирование, М.: 1987, № 4. - с. 41-47.
63. Кузнецов П. Г. Искусственный интеллект и разум человеческой популяции. - В кн.: Александров Е.А. Основы теории эвристических решений. - М.: Советское радио, 1975.
64. Кузнецов О.Л., Кузнецов П.Г., Большаков Б.Е. Система природа – общество – человек: Устойчивое развитие. – ГНЦ РФ ВНИИгеосистем; Международный университет природы, общества и человека «Дубна», 2000. – 392 с.
65. Кузнецов О.Л., Большаков Б.Е. Начала теории устойчивого развития социо-природных систем. Вестник Международного университета природы, общества и человека «Дубна», №1 (4), июнь 2001. – с. 5–24.
66. Кузнецов О.Л., Большаков Б.Е. Устойчивое развитие: научные основы проектирования в системе природа-общество-человек: Учебник. – Издательство «Гуманистика», Санкт-Петербург – Москва – Дубна, 2002. – 616 с. Илл.
67. Куратовский К. Топология. Пер. с англ. – т. 1, М.: 1966.
68. Кутергин В.А. Искусственные объекты и конструктивные процессы. Введение в методологию и теорию. – Ижевск: Изд-во ИПМ Уро РАН: 2007. – 551 с.
69. Кэрноп Д., Розенберг Р. (ред.). Применение теории графов связей в технике. М.: Мир, 1974. – 95 с.
70. Левантовский В.И. Механика космического полета в элементарном изложении. 3-е изд., М.: Наука, 1980. – 512 с.
71. Леонтьев В., Ченнери Х.В. и др. Исследование структуры американской экономики. Пер. с англ. М.: Госстатиздат, 1958. – 640 с.
72. Максвелл Дж. К. О физических силовых линиях. //Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. Пер. с англ./Под ред. П.С. Кудрявцева. – М.: ГИТТЛ, 1954.
73. Мантуров О.В. Элементы тензорного исчисления. – М.: Просвещение, 1991. – 255 с.

74. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов, т. 3 Коо–Од. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – 1184 стб.
75. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов, т. 5 Слу–Я. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – 1248 стб.
76. Математические основания теории сложных систем. – Межвузовский сборник научных трудов. – Иваново: ИвГУ, 1989.
77. Молоканов Ю.К. Процессы и аппараты нефтегазопереработки. М.: Химия, 1980. – 408 с.
78. Нетер Э., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959, с. 611–630.
79. Образцова Р.И., Кузнецов П.Г., Пшеничников С.Б. Инженерно-экономический анализ транспортных систем. /Под ред. К.В. Фролова. – 2-е изд., стереотип. – М.: Радио и связь, 1996. – 192 с.
80. Петров А.Е. Тензорный метод расчета сложных систем (на примере балансового планирования). – Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – М.: МИФИ, 1984. – 16 с.
81. Петров А.Е. Тензорный метод расчета сложных систем (на примере балансового планирования). – Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – М.: МИФИ, 1985. – 150 с.
82. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 152 с.
83. Петров А.Е. Тензорный анализ сетей и параллельные вычисления. - М.: МИФИ, 1991. – 24 с.
84. Петров А.Е. Тензорный метод и параллельные вычисления. - В сб.: Научно-технические средства информатизации, автоматизации и интеллектуализации в народном хозяйстве. - М.: Знание, 1991. - с. 43–54.
85. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей. – Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. – М.: МИФИ, 1998. – 32 с.
86. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей. – Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – М.: МИФИ, 1998. – 300 с.
87. Петров А.Е. (главный редактор). Банки и финансы. - Информационно-аналитический бюллетень, №№ 1-67. – М.: Издательство «Мобиле», 1995–2007. – 400 с.
88. Петров А.Е. Состояние нефтедобычи и нефтепереработки в России. Журнал «Промышленность России», № 3, М.: ИА «Мобиле», 1997. – с. 11–19.
89. Петров А.Е., Плошкин М.В., Ханин А.А. Энергосистемы России. Журнал «Промышленность России», № 5, М.: ИА «Мобиле», 1997. – с. 57–66.
90. Петров А.Е. Инварианты двойственных сетей. Сборник научных трудов «Научная сессия МИФИ-2000», т. 3, М.: МИФИ, 2000. - с. 200–201.
91. Петров А.Е. Применение двойственных сетей для параллельных вычислений. Сборник научных трудов «Научная сессия МИФИ-2000», т. 3, М.: МИФИ, 2000. – с. 202–203.
92. Петров А.Е., Астрелина В.В., Березинский И.Н., Беляев О.И. Результаты расчета рейтинга динамической финансовой стабильности банков России на 1 сентября 2000 года. Банковские и финансовые технологии. Сб. тр. конф./ Под ред. В.И. Тарасова, В.С. Захарова, О.И. Лаврушина. – М.: Международный центр банковских и финансовых технологий, 2001. – 272 с.
93. Петров А.Е. Состояние и перспективы развития нефтегазовой отрасли России. “Промышленность России”, № 12 (44), М.: ИА «Мобиле», 2000. – с. 35–44.
94. Петров А.Е. Реальный сектор и банки России. Модус (информационно-аналитическая газета), № 11–12 (132), М.: ИА «Мобиле», 2001.
95. Петров А.Е. Банки России по итогам трех кварталов нового века. Модус (информационно-аналитическая газета), № 18–20 (135), М.: ИА «Мобиле», 2001.
96. Петров А.Е. Банки России в начале тысячелетия. Экономическое обозрение Союзного государства Беларуси и России. Приложение к журналу «Наука и промышленность России», № 1, 2001. – с. 44–55.

97. Петров А.Е. Рейтинг динамической финансовой стабильности банков на 1 июня 2001 года. Журнал «Состояние» №3, 2001 – с. 80–88.
98. Петров А.Е. Состояние нефтегазового комплекса. Журнал «Состояние» №3, 2001 – с. 42–45.
99. Петров А.Е. Куда движется экономика США. Журнал «Наука и промышленность России», №8, 2001. – с. 72–80.
100. Петров А.Е. Состояние черной металлургии России. Журнал «Наука и промышленность России», №10, 2001. – с. 31–39.
101. Петров А.Е. Состояние и перспективы производства алюминия. Журнал «Наука и промышленность России», №11, 2001. – с. 28–35.
102. Петров А.Е. Экономика США до и после атаки террористов. Бюллетень «Банки и финансы», №5 (34), 2001. – с. 37–42.
103. Петров А.Е. и др. Система рейтингов – информационное обслуживание экономики. Журнал «Наука и промышленность России», №12, 2001. – с. 70–80.
104. Петров А.Е. Алгоритм расчета тензорных сетей. В книге: Кузнецов О.Л., Большаков Б.Е. Устойчивое развитие: научные основы проектирования в системе природа-общество-человек: Учебник. – Издательство «Гуманистика», Санкт-Петербург – Москва – Дубна, 2002. 616 с. Илл., – с. 502–516.
105. Петров А.Е. Вклад Кузнецова в развитие тензорного метода. Сборник докладов «Задачи научного сообщества в постановке целей человечества и обеспечении национальной и международной безопасности», посвященный памяти П.Г. Кузнецова, члена Экспертного совета Комитета Государственной Думы по безопасности.
106. Петров А.Е. Побиск Георгиевич Кузнецов и тензорный метод. В сборнике «Инженерия истории». Материалы Международного симпозиума «Пространство и Время в эволюции глобальной системы «Природа – Общество – Человек». Москва 14–15.12.2001. Часть 1. «Всемирный фонд планеты Земля», М.: 2002. – с. 47–57.
107. Петров А.Е. Америка uber alles? Журнал «Наука и промышленность России», №1 (69), 2003. – с. 21–30.
108. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей. Сб. трудов научно-технической конференции с международным участием. Технологии информатизации профессиональной деятельности – 2004». Ижевск, 2005 – с. 109–128.
109. Петров А.Е. (руководитель проекта). Теоретическое и экспериментальное моделирование потоков продуктов и денежных средств региона тензорным методом двойственных сетей для управления устойчивым развитием. Итоговый отчет по инициативному проекту РФФИ 05-06-80302-а, - 2007 – 165 с.
110. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей и управление устойчивым развитием. Сборник трудов кафедры «Устойчивое инновационное развитие» Международного университета природы общества и человека «Дубна». – Издательство университета «Дубна», 2007. – с. 20–60.
111. Петров А.Е. Двойственная сетевая модель социально-экономической системы. – с 356–381. Сб. тр. II Всероссийской научной конференции с международным участием «Технологии информатизации профессиональной деятельности (в науке, образовании и промышленности)», ТИПД-2008. Часть 1. – Ижевск: ООО Информационно-издательский центр «Бон Анца», 2008 – 553 с. (ISBN № 978 – 5 – 903140 – 42 – 8).
112. Петров А.Е. Двойственные сети и сетевая модель социально-экономической системы. Режим доступа: [http://www.uni-dubna.ru/departments/sustainable\\_development/Portal/Nauch\\_trudy\\_kafedry/this\\_year\\_articles/dual\\_networks/](http://www.uni-dubna.ru/departments/sustainable_development/Portal/Nauch_trudy_kafedry/this_year_articles/dual_networks/), свободный, 2008.
113. Петров А.Е. Тензорный метод и двойственные сети в электротехнике. Электротехника, №12, ноябрь 2008. – с. 2–12.
114. Петров А.Е. (руководитель проекта). Разработка методологии конструирования измеримых систем ценностей социальных групп для теоретического и

- экспериментального моделирования вариантов распределения ВВП, изучения их влияния на роль социальных групп в обеспечении устойчивого развития государства. Отчет по инициативному проекту РФФИ 07-06-00209-а за 2007 год, - 2008 – 82 с. Отчет по проекту РФФИ 07-06-00209-а за 2008 год, - 2009 – 84 с.
115. План счетов бухгалтерского учета в коммерческих банках (кредитных учреждениях РФ). Журнал «Бухгалтерский бюллетень», 1996.
  116. План счетов бухгалтерского учета в кредитных учреждениях РФ. Утвержден Приказом Банка России № 02-263 от 18.06.97 г.
  117. Платон. Законы. М. – Мысль. – 1999.
  118. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. - М.: МГУ, 1974.
  119. Подолинский С.А. Труд человека и его отношение к распределению энергии. - М.: Слово, 1880; М.: Ноосфера, 1991. – 82 с.
  120. Положение Банка России от 5 декабря 2002 года № 205-П «О правилах ведения бухгалтерского учета в кредитных организациях, расположенных на территории Российской Федерации».
  121. Попков В.В. Всеобщая инженерная наука Габриэля Крона. Международный институт А.Богданова, Екатеринбург, 2001.
  122. Попков В.В. Двойственность. Международный институт А.Богданова, Екатеринбург, 2002.
  123. Система таблиц «ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК» России за 2003 год: М.: Росстат, 2006 г.
  124. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. /ред. В.А.Горбатов. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
  125. Синдж Д.Л. Тензорные методы в динамике. М.: ИЛ, 1947.
  126. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – Изд. 9-е. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
  127. Сохор Ю.Н., Козаченко Е.Г., Фиронов А.Н. Тензорное моделирование режимов линейных двигателей для транспорта на магнитном подвесе. – В кн.: Тензорные методы анализа и синтеза сложных систем. – Ижевск, 1991.
  128. Сохор Ю.Н. Моделирование электромагнитных процессов в синхронном линейном двигателе при питании от тиристорного преобразователя частоты. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, Москва, Московский Государственный университет путей сообщения (МИИТ), 1997. – 152 с.
  129. Сухотин Б.В. Основные проблемы грамматики и семантики в тензорном исчислении. – В кн.: Проблемы структурной лингвистики. – М.: Наука, 1978, с. 234–288.
  130. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. – 454 с.
  131. Физический энциклопедический словарь: Гл. редактор А.М.Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – 944 с.
  132. Л. Форд, Д. Фалкерсон. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. – 276 с.
  133. Фридман А.А.. Мир как пространство и время. М.: Наука, 1965. – 112 с.
  134. Хэпп Х.Х. Диакоптика и электрические цепи. М.: Мир, 1974.
  135. Циолковский К.Э. Механика в биологии. Подобие организмов и уклонение от него. – Собр. соч., т. 4, М.: 1964. – с. 161–263.
  136. Чесноков В.С. Сергей Андреевич Подолинский, 1850–1891. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 2006. – 316 с.
  137. Чуев А.С. Физическая картина мира. В книге: Кузнецов О.Л., Большаков Б.Е. Устойчивое развитие: научные основы проектирования в системе природа-общество-человек: Учебник. – Издательство «Гуманистика», Санкт-Петербург – Москва – Дубна, 2002. 616 с. Илл., – с. 525-573.
  138. Шамаева О.Ю. Модели параллельных вычислений на основе диакоптики для решения задач большой размерности.//Тензорные методы анализа и синтеза сложных систем. – Ижевск, 1991.

139. Шаталов А.С. Работа асинхронной машины с конденсаторами (генераторные и двигательные установки). – Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Новочеркасский индустриальный институт им. С. Орджоникидзе. Новочеркасск, 1941.
140. Шукарев А.Н. Опыт обоснования системы структурного реализма. – Государственная библиотека СССР им. В.И. Ленина, Музейное собрание, ф. 178, 1934, пост. № 11.
141. Amari S. Topological foundations of Kron's Tearing of electrical networks. – RAAG Memoirs, v. 3, 1962. – p. 322–350.
142. Balasubramanian N. V., Lynn J. W., Sen Gupta D.P. Differential forms on electromagnetic networks. – London, Butterworths, 1970.
143. Bowden K. Kron's Method of Tearing on the Transputer.//The SERC/DTI Initiative in the Engineering Applications of Transputers. – v. III, May 1988.
144. Bowden K. Kron's Method of Tearing on the Transputer. (Supplementary Report)//The SERC/DTI Initiative in the Engineering Applications of Transputers. – v. VII, October 1989.
145. Brameller A., John M.N., Scott M.R. Practical diakoptics for electrical networks. – London: Chapman and Hall, 1969. – 212 p.
146. Branin F. N. The relation between Kron's method and the classical methods of network analysis. //The Matrix and Tensor Quart., v. 12, no 3, march 1962. – pp. 69–115.
147. Brown B. A new treatment of analysis of dimensions. – Proc. Phys. Soc., 1941, v. 53, p. 418–432.
148. Carter G.K., Kron G. Network analyser solution of the equivalent circuits for elastic structures. J. of the Franklin Inst., v. 238, №6, 1944.
149. Carter G.K., Kron G. A.C. network analyser study of the Schrödinger equation. // Phys. Rev., 1945, v. 67, ser. 2, № 1, 2. - pp. 44–49.
150. Chua L.O., Chen L.K. Diacoptic and Generalized Hybrid Analysis. // Trans. IEEE on Circuits and Systems, CAS, v. 23, No 12, 1976.
151. Duschek A., Hochrainer A. Grundzüge der Tensorrechnung in Analutscher Darstellung. - Wien: Springer, 1949. – 232 p.
152. Einschtein A., Grassmann M., “Z. Math. und Physik”, 1914, Bd 62, S. 225–61.
153. Einschtein A. – Annalen der Physic. – 4-я серия, т. 49, 1916, с. 769.
154. Firestone F.A. A new analogy between mechanical and electrical systems. – J. Acoustic Soc., 1933, v. 25, N 2, p. 39–47.
155. Fucko V.F., Merugu L.N. Network folding for large electrical Network problems.//Transputer Initiative, July, 1991, p. 42.
156. Gabriel Kron and System Theory. /Ed. by H.H. Happ, N. – Y., Schenectady: Union College Press, 1973. – 186 p.
157. Happ H.H. Piecewise Methods and Applications to Power Systems. – N. Y., Wiley, 1980. – 405 p.
158. Hoffmann B. Kron's method of subspaces. - Quart. Appl. Math., 1944, v. 11, oct., p. 218 - 231.
159. Hoffmann B. Kron's Non-Riemannian Electrodynamics. – Rev. Mod. Phys. (Einstein's 70-th birthday commemorative issue), 1949, v. 21.
160. Hoffmann B. Power invariance. - Matrix and Tensor Quart., 1957, v. 7, Sept., p. 2–4.
161. Kirchoff G. Ueber die Auflosung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersungen der linearen Vertheilung galvanischer strome fuhrт wird. – Poggendorf's Ann. Physik u. Chemie. 1847, v. 72, p. 497 - 508.
162. Kron G. Generalized theory of electrical machinery. – AIEE Trans., 1930, v. 49, Apr., p. 666–683.
163. Kron G. Non-Riemannian dynamics of rotating electrical machinery. //J. Math. Phys., 1934, v.13, № 2, p. 103–194.
164. Kron G. Tensor analysis of networks. - N. Y.; London, Chapman & Hall, 1939. London, MacDonald, 1965. – 635 p. Unrevised except for new introduction.



165. Kron G. The application of tensors to the analysis of rotating electrical machinery. - N. Y., Schenectady: Gen.Electric Rew., 1942.
166. Kron G. Tensors for circuits. – 1942.
167. Kron G. Equivalent circuit of the field equations of Maxwell. // proc. IRE, 1944, v. 32, № 5, p. 289–299.
168. Kron G. Equivalent circuit of the elastic field. //ASME Trans., J. Appl. Mech., 1944, v. 11, № 3.
169. Kron G. Equivalent circuits of compressible and incompressible fluid flow fields. //J. of the Aeronautical Sciences, v. 12, № 2, 1945.
170. Kron G. Numerical solution of ordinary and partial differential equations by means of equivalent circuits. J. of Applied Physics, v. 16, № 3, 1945. – pp. 172–186
171. Kron G. Electrical circuit models of the Schrodinger equation. // Phys. Rev., 1945, v. 67, ser. 2, № 1, 2. – pp. 39–43.
172. Kron G. Electrical circuit models of the nuclear reactor. // AIEE Trans. Communications and Electronics, 1954, v. 73, p. 259–265.
173. Kron G. Multi-dimensional space filters. //Matrix and Tensor Quart., 1958, v. 9, № 2, p. 40–43.
174. Kron G. Basic concepts of multi-dimensional space filters. AIEE Trans. 1, 78, 1959. - 554–561.
175. Kron G. Self-organizing, dynamo-type automata. //Matrix and Tensor Quarterly, 1960, v. 11, № 2, p. 42–52.
176. Kron G. Multi-dimensional curve-fitting with self-organizing automata. //J. Math. Analysis and Appl., 1962, v. 5, № 1, p. 46–69.
177. Kron G. Invisible dual (n-1) networks induced by electric 1-networks//IEEE Trans., v. CT-12, No 4, (December 1965).
178. Lie C.T., Chang W.L. A Generalized Technique for Modeling Switch-controlled Induction Machine Circuits. - IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 7, No 1, March 1992. – p. 168–176.
179. Lynn J. W. Tensors in electrical engineering. – London: Pitman, 1963.
180. Lynn J. W., Russell R.A. Kron`s wave automaton. //Physical Structure in Systems Theory. - London, N. Y.: Academic Press, 1974 – p.131–142.
181. Nickle C.A. Oscillographic Solution of Electro-mechanical Systems. //Trans. AIEE 44, 1925. – 844–856.
182. Olson H.F. Dynamical Analogies. – Van Nostrand, Princeton, 1943.
183. Onodera R. Diakoptics and codiakoptics of electrical networks.// RAAG Memoirs, v. 2, 1958. – pp. 369–388.
184. Peat F.D. Synhronisity: the bridge between matter and mind. Toronto, Bantam Books – 1987.
185. Physical Structure in Systems Theory/Ed. by J. J. Van Dixhoorn and F. J. Evans. – London, N. Y.: Academic Press, 1974. – 306 p.
186. Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by Means of Geometry (Research Association of Applied Geometry - RAAG). – Association for Scientific Documents Information, Tokyo. – v. 1, 1955, v. 2, 1958, v. 3, 1962, v. 4, 1968.
187. Ricci G. Atti della R. Acc. die Lincei Rendiconti, v. 5, Pt. 1, 1889.
188. Ricci G., Levi-Civita T., “Math. Ann.”, 1901, Bd 54, s. – pp. 125–201.
189. Roth J.P. An application of algebraic topology to numerical analysis. On the existence of a solution to the network problem. – Proc. National Acad. of Sciences, v. 41, – 76 1955, pp. 518–521.
190. Roth J.P. An application of algebraic topology: Kron`s method of tearing. – Quart. Appl. Math., 1959, v. 17, № 1. – pp. 1–24.
191. Siano D.B. Orientational Analyses – A Supplement to Dimensional Analyses – I. Journal of The Franklin Institute, v. 320, No. 6, December, 1985. – pp. 267–283.

192. Siano D.B. Orientational Analyses, Tensor Analyses and the Group Properties of the SI Supplement Units – II. Journal of The Franklin Institute, v. 320, No. 6, December, 1985. – pp. 285–302.
193. Simpson A. The Kron methodology and practical algorithms for eigenvalue, sensitivity and response analyses of large scale structural systems. Aeronautical Journal, December, 1980. – pp. 417–433.
194. Voigt W. Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Kristalle. – Leipzig, Teubner, 1898.
195. Weyl H. Repartition de corrente et uno red conductora. – Revista matematica, Hispano–Americana, 1923, № 5, p. 153–164.
196. Wiener N. Notes on the Kron theory of tensors in electrical machinery. – J. Electrical Engineering, China, 1936, № 3/4, p. 11–18.